

инфраструктуры НИОКР, разработка законодательной базы НЭС по защите авторских прав.

Источники и литература

1. Мазурок П.П. Історія економічних учень у запитаннях і відповідях: Навч. Посіб. – 2-ге вид., стер./ Петро Петрович Мазурок. – К.: Знання, 2006. – 477 с. – (Вища школа ХХІ століття).
2. Отчет о мировых инвестициях за 2008 (World Investment Report 2008) – Режим доступа к отчету: www.unctad.org/fdistatistics).
3. Транснационализация – Википедия [Электронный ресурс] – режим доступа к википедии: <http://ru.wikipedia.org/wiki/>.
4. Портер М. Международная конкуренция: Пер. с англ./Под ред. и с предисловием В.Д. Щетинина. / Майкл Портер. – М.: Междунар. отношения, 1993. – 896 с.
5. Адаманова З.О. Инновационные стратегии экономического развития в условиях глобализации: Монография. /З.О. Адаманова. – Симферополь КРЫМУЧПЕДГИХ, 2005. – 504 с.
6. Зорин С. Ф.Современные транснациональные корпорации и их роль в мировой экономике – Режим доступа к статье: <http://socrates.ru/pdf/> .
7. Костиков И. Международное движение капитала и формирование российских транснациональных компаний: РЦБ №№ 12 (339), 16 (343): Режим доступа к статье: http://www.rcb.ru/data/articles_pdf/2007/16/Kostikov.pdf.
8. Железные объятия глобализации – Режим доступа к статье <http://www.business.ua/i549/a18547/>.
9. Журнал Fortune назвал 50 самых успешных компаний в мире – Режим доступа к статье: <http://www.dengi.ua/news/46166.html>.

Сигал А.В.

УДК: 330.131.7

НЕИЗБЕЖНОСТЬ ГЛОБАЛЬНЫХ КРИЗИСОВ. ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЙ ПОДХОД

Как известно, цепи Маркова используются для моделирования функционирования систем [1 – 5], имеющих n несовместных состояний s_1, s_2, \dots, s_n , при этом в фиксированный момент времени эти системы могут или находиться с некоторой вероятностью в любом из этих состояний, или осуществлять переход из одного из этих состояний в другое. Как правило, в таких случаях применяют простую однородную цепь Маркова с конечным числом состояний и дискретным временем. Однако для функционирования экономических систем (ЭС) следует учитывать возможность банкротства, которое, по сути, представляет собой поглощающее состояние. Таким образом, функционирование ЭС целесообразно моделировать поглощающими цепями Маркова. Далее будет рассмотрена простейшая модель функционирования ЭС в виде однородной цепи Маркова с двумя состояниями, одно из которых является поглощающим состоянием. Эта простейшая модель функционирования ЭС позволяет исследовать вопросы, связанные с возможностью банкротства ЭС.

Постановка проблемы

Рассмотрим ЭС, функционирование которой может быть полностью описано n различными состояниями s_1, s_2, \dots, s_n . Эту ЭС возможно наблюдать в фиксированные моменты времени $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ и отмечать её состояние в каждый из этих моментов. Введём следующие обозначения: $p_i(t_k)$ – безусловная вероятность того, что данная ЭС в момент времени t_k находится в состоянии s_i , где $i = \overline{1, n}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $p_{ij}(t_k)$ – условная вероятность перехода данной ЭС в состояние s_j в момент времени t_k , если известно, что в момент времени t_{k-1} она находилась в состоянии s_i , где $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$, $k = 1, 2, \dots$, $p(t_k) = (p_1(t_k); p_2(t_k); \dots; p_n(t_k))$, где $k = 0, 1, 2, \dots$, $p(t_k) = (p_{ij}(t_k))$ – матрица вероятностей одношагового перехода.

Очевидно, для этих вероятностей выполняются следующие свойства:

1. $p_i(t_k) \geq 0, i = \overline{1, n}$;
2. $\sum_{i=1}^n p_i(t_k) = 1, k = 0, 1, 2, \dots$;
3. $p_{ij}(t_k) \geq 0, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$;
4. $\sum_{j=1}^n p_{ij}(t_k) = 1, i = \overline{1, n}, k = 1, 2, \dots$;
5. $p_j(t_k) = \sum_{i=1}^n (p_i(t_{k-1}) \cdot p_{ij}(t_k)), j = \overline{1, n}, k = 1, 2, \dots$;
6. $p(t_k) = p(t_{k-1}) \cdot p(t_k) = p(t_0) \cdot p(t_1) \cdot p(t_2) \cdot \dots \cdot p(t_k), k = 1, 2, \dots$

Предположим дополнительно, что цепь Маркова, характеризующая функционирование ЭС, является

однородной, то есть значения условных вероятностей $p_{ij}(t_k) = p_{ij}$, где $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, не зависят от момента времени t_k , при этом матрица вероятностей одношагового перехода – $p(t_k) = p^{(1)} = p = (p_{ij})$, матрица вероятностей k -шагового перехода – $p^{(k)} = p^k = \left(p_{ij}^{(k)} \right)$, а равенство из свойства б принимает вид $p(t_k) = p(t_{k-1}) \cdot p = p(t_0) \cdot p^{(k)} = p(t_0) \cdot p^k$.

В простейшем случае можно выделить два принципиально разных состояния ЭС: первое состояние – дефолт, второе – не дефолт. Таким образом, будем считать, что $n = 2$. В этом случае матрица вероятностей одношагового перехода имеет вид

$$p = p(1) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix}, \quad (1)$$

то есть $p_{11} = 1$, $p_{12} = 0$, $p_{21} = p > 0$, $p_{22} = q > 0$, где $p + q = 1$. Таким образом, первому состоянию (дефолту) соответствует поглощающее состояние.

Вероятности многошаговых переходов ЭС характеризуют значения элементов матрицы вероятностей k -шагового перехода:

$$p^{(k)} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(k)} & p_{12}^{(k)} \\ p_{21}^{(k)} & p_{22}^{(k)} \end{pmatrix} = p^k. \quad (2)$$

Нерешённые части проблемы

В связи с возможностью объявления дефолта возникают несколько вопросов. Во-первых, как и во всех задачах, использующих цепи Маркова, важно знать предельное поведение вероятностей.

Во-вторых, следует выяснить среднее количество шагов (этапов) функционирования ЭС до момента времени, когда она перейдёт в поглощающее состояние, то есть в состояние дефолта.

В-третьих, полезно найти зависимости элементов матрицы (2) вероятностей k -шагового перехода и наименьшего возможного количества $k(P)$ шагов функционирования ЭС, для которого выполняется неравенство $p_{21}^{(k)} \geq P$, где P – заданное значение соответствующей вероятности, от значений элементов матрицы (1) вероятностей одношагового перехода.

В-четвёртых, как отразится на дальнейшей работе ЭС отсрочка дефолта, когда на соответствующем этапе своего функционирования ей удастся за счёт модернизации избежать ликвидации?

В-пятых, почему кризисы типа Великой Депрессии, когда резко усиливаются все (как количественного, так и качественного характера) негативные тенденции в мировой экономике, связанные с массовыми банкротствами ЭС, неизбежно наступают каждые 50-100 лет? Собственно, этот вопрос можно воспринимать как математическое обоснование длинных волн Кондратьева.

В-шестых, можно для данного моделирования функционирования ЭС применить теоретико-игровой подход? К каким выводам приведёт этот подход.

Постановка задачи

Функционирование ЭС характеризуется однородной цепью Маркова с известной матрицей (1) вероятностей одношагового перехода. Под ЭС будем понимать любой субъект предпринимательской деятельности, любую экономическую структуру (предприятие, фирму, компанию, корпорацию, банк, финансовое учреждение и т.д.) любой формы собственности.

Согласно общепринятому подходу будем считать, что на всём промежутке времени $[t_{k-1}; t_k]$, где $k = 1, 2, \dots$, ЭС остаётся в одном и том же состоянии. Кроме того, так же будем считать, что $t_k = k$, где $k = 0, 1, 2, \dots$. Наконец, единицей времени (то есть одним шагом или этапом функционирования ЭС) будем считать календарный год. Следует заметить, что все эти предположения не ограничивают общности рассуждений.

Требуется исследовать предельное поведение переходных вероятностей и проанализировать эффективность работы ЭС. При этом данная эффективность понимается как возможность ЭС длительный период успешно (без проблем, которые могут привести к дефолту) осуществлять свою предпринимательскую деятельность. В частности, необходимо выразить значения элементов матрицы (2) вероятностей k -шагового перехода через значения элементов матрицы (1) вероятностей одношагового перехода, а так же выразить значение наименьшего возможного количества $k(P)$ шагов функционирования ЭС, для которого выполняется неравенство $p_{21}^{(k)} \geq P$, где P – заданное значение соответствующей вероятности, через значения элементов матрицы (1) вероятностей одношагового перехода.

Общие свойства поглощающих цепей Маркова

В общем случае ЭС, работу которой характеризует поглощающая однородная цепь Маркова, имеет хотя бы одно поглощающее состояние, то есть такое состояние, попадая в которое, ЭС остаётся в нём навсегда (собственно, процесс функционирования ЭС прекращается). При исследовании работы ЭС, функционирование которых характеризует поглощающая цепь Маркова, как правило, интерес представляет

следующая информация:

1. вероятность перехода ЭС в поглощающее состояние при условии, что функционирование ЭС началось с непоглощающего состояния;

2. среднее значение времени пребывания ЭС в непоглощающих состояниях до момента перехода её в некоторое поглощающее состояние при условии, что функционирование ЭС началось с непоглощающего состояния;

3. среднее количество шагов функционирования ЭС до момента перехода её в некоторое поглощающее состояние при условии, что функционирование ЭС началось с непоглощающего состояния.

На эти вопросы хорошо известны ответы, использующие значения переходных вероятностей, то есть значения элементов p_{ij} матрицы p вероятностей одношагового перехода [1 – 5]. При этом сами значения элементов p_{ij} матрицы p вероятностей одношагового перехода, как правило, оценивают на основе имеющейся статистической информации.

Занумеруем поглощающие состояния первыми номерами: s_1, s_2, \dots, s_m . Все остальные состояния $s_{m+1}, s_{m+2}, \dots, s_n$ ЭС являются её непоглощающими состояниями. В таком случае матрицу p вероятностей одношагового перехода представляют в так называемой канонической форме записи поглощающих цепей Маркова, то есть в виде четырёхблочной матрицы:

$$p = \left(\begin{array}{c|c} I & Q \\ \hline R & Q \end{array} \right). \quad (3)$$

В канонической форме (3) матрицы p применены следующие обозначения: I – единичная матрица размера $m \times m$; Q – нулевая матрица размера $m \times (n-m)$; R – матрица размера $(n-m) \times m$, элементами которой являются вероятности одношагового перехода ЭС из непоглощающих состояний в поглощающие; Q – матрица размера $(n-m) \times (n-m)$, элементами которой являются вероятности одношагового перехода ЭС из непоглощающих состояний в непоглощающие.

Для поглощающих цепей Маркова большое значение имеет матрица Q , лежащая в основе построения стохастических моделей при помощи этих цепей. Матрица Q удовлетворяет следующим свойствам:

1. $\lim_{l \rightarrow +\infty} Q^l = 0$, где 0 – нулевая матрица размера $(n-m) \times (n-m)$;
2. существует обратная матрица $(I - Q)^{-1} = N$, при этом матрицу $N = (n_{ij})$ называют фундаментальной матрицей поглощающей цепи Маркова.

Элементы n_{ij} фундаментальной матрицы N представляют собой значения математических ожиданий пребывания ЭС в своих соответствующих непоглощающих состояниях, а $\sum_{j=1}^{n-m} n_{ij}$ – среднее количество шагов функционирования ЭС до момента перехода её в некоторое поглощающее состояние при условии, что функционирование началось с непоглощающего состояния s_{m+i} , $i = \overline{1, n-m}$.

Анализ свойств элементов матрицы многошагового перехода

Пользуясь определением произведения матриц, легко найти натуральную степень матрицы (1) вероятностей одношагового перехода. Тогда для элементов матрицы (2) вероятностей k -шагового перехода получаем формулы:

$$p_{11}^{(k)} = 1,$$

$$p_{12}^{(k)} = 0,$$

$$p_{21}^{(k)} = 1 - q^k, \quad (3)$$

$$p_{22}^{(k)} = q^k.$$

Из равенства (3) получаем, что вероятность перехода ЭС за k шагов её функционирования в поглощающее состояние s_1 дефолта равно $p_{21}^{(k)} = 1 - q^k$. Если на соответствующем этапе функционирования ЭС ей удастся избежать своей ликвидации, то значение вероятности (3) перехода ЭС за k шагов её функционирования в поглощающее состояние s_1 дефолта с течением времени будет возрастать, неуклонно приближаясь к числу 1. Можно предположить, что в случае, когда количество таких отсрочек индивидуальных дефолтов ЭС превышает некоторое критическое значение, происходит скачкообразный переход всей экономики в состояние подобное Великой Депрессии, когда резко усиливаются все (как количественного, так и качественного характера) негативные тенденции в мировой экономике, связанные с массовыми банкротствами ЭС.

С учётом неравенств $0 < q < 1$ получаем такие предельные соотношения: $\lim_{k \rightarrow +\infty} p_{11}^{(k)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} 1 = 1$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} p_{12}^{(k)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \theta = \theta, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} p_{21}^{(k)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} (1 - q^k) = 1, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} p_{22}^{(k)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} q^k = \theta,$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} p^{(k)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} p^k = \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ 1 & \theta \end{pmatrix}. \text{ Очевидно, вектор } (1; \theta) \text{ является левым собственным вектором}$$

Фробениуса матрицы (1) для собственного значения Фробениуса $\mathbb{1}_p = 1$.

Итак, предельная вероятность перехода в поглощающее состояние s_1 (в состояние дефолта) при условии, что функционирование ЭС началось с непоглощающего состояния s_2 , равна $p_1 = \lim_{k \rightarrow +\infty} p_{i1}^{(k)} = 1$, поэтому с течением времени объявление любой ЭС своего дефолта следует считать практически достоверным событием, а сам дефолт – практически неизбежным состоянием ЭС.

Очевидно, при $n=2$, матрицы $Q, I-Q, N=(I-Q)^{-1}$ представляют собой матрицы первого порядка, то есть соответственно числа $Q=q, I-Q=1-q=p, N=(I-Q)^{-1}=(1-q)^{-1}=p^{-1}$. Следовательно, среднее значение времени (в календарных годах) пребывания ЭС в непоглощающих состояниях до момента перехода её в поглощающее состояние s_1 дефолта при условии, что функционирование ЭС началось с непоглощающего состояния, равно среднему количеству шагов функционирования ЭС до момента перехода её в поглощающее состояние s_1 дефолта при условии, что функционирование ЭС началось с

непоглощающего состояния: $\sum_{j=1}^1 n_{ij} = N = p^{-1}$ лет.

Если задано значение вероятности P , где $0 < P < 1$, то из равенства $1 - q^k = P$ получаем, что наименьшее возможное количество $k(P)$ шагов функционирования экономической системы, для которого выполняется неравенство $p_{21}^{(k)} \geq P$, равно числу

$$k(P) = \lceil \log_q(1 - P) \rceil = \left\lceil \frac{\ln(1 - P)}{\ln q} \right\rceil, \text{ где } \ln x \text{ – натуральный логарифм, } \lceil x \rceil \text{ – значение}$$

функции потолка заданного действительного числа x [6, 7], то есть $\lceil x \rceil$ – это такое целое число $\lceil x \rceil \in \mathbb{Z}$, что справедливы соотношения $\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$.

Пусть $P = 0,5$, тогда получаем следующую формулу:

$$k(0,5) = \lceil \log_q(1 - 0,5) \rceil = \lceil \log_q 0,5 \rceil = \left\lceil \frac{\ln 0,5}{\ln q} \right\rceil. \quad (4)$$

Если дополнительно задать $p = 0,01$, то получим следующие соотношения: $q = 1 - p = 1 - 0,01 = 0,99$,

$$k(P) = \left\lceil \frac{\ln(1 - P)}{\ln 0,99} \right\rceil, \text{ а с учётом формулы (4)}$$

$$k(0,5) = \left\lceil \frac{\ln 0,5}{\ln 0,99} \right\rceil \approx \lceil 68,9676 \rceil = 69.$$

Заметим, что полученное значение $k(0,5) = 69$ совпадает с приблизительным значением длительности длинных циклов Кондратьева в 70 лет. Кроме того, для $p = 0,01$ среднее количество шагов функционирования ЭС до момента перехода её в поглощающее состояние s_1 дефолта при условии, что

функционирование ЭС началось с непоглощающего состояния, равно $\sum_{j=1}^1 n_{ij} = N = p^{-1} = 0,01^{-1} = 100$ годам.

Теоретико-игровой аспект

Рассмотрим парную матричную игру с нулевой суммой, заданную платёжной матрицей (1). Седловая точка в этой игре отсутствует, так как $p < q$,

$$a = \max_i \min_j p_{ij} = \max_i a_i = \max\{0; p\} = p < q = \min\{1; q\} = \min_j b_j = \min_j \max_i p_{ij}.$$

Найдём решение [8, С. 291 – 310] данной игры:

$$p_1^* = \frac{p_{22} - p_{21}}{p_{11} - p_{12} - p_{21} + p_{22}} = \frac{q - p}{1 - 0 - p + q} = \frac{q - p}{2 \cdot q} = 0,5 - \frac{p}{2 \cdot q},$$

$$p_2^* = 1 - p_1^* = \frac{q + p}{2 \cdot q} = 0,5 + \frac{p}{2 \cdot q},$$

$$q_1^* = \frac{p_{22} - p_{12}}{p_{11} - p_{12} - p_{21} + p_{22}} = \frac{q - 0}{1 - 0 - p + q} = \frac{q}{2 \cdot q} = 0,5,$$

$$q_2^* = 1 - q_1^* = 1 - 0,5 = 0,5,$$

$$V_P^* = \frac{p_{11} \cdot p_{22} - p_{12} \cdot p_{21}}{p_{11} - p_{12} - p_{21} + p_{22}} = \frac{1 \cdot q - 0 \cdot p}{1 - 0 - p + q} = \frac{q}{2 \cdot q} = 0,5.$$

Выводы

1. Для простейшей вероятностной модели эффективности работы ЭС с одним поглощающим и одним непоглощающим состояниями имеется стационарный режим функционирования ЭС. Этот стационарный режим характеризуется вектором предельных вероятностей вида $(1; 0)$.

2. Среднее значение времени пребывания ЭС в непоглощающем состоянии до момента перехода её в поглощающее состояние дефолта равно $N = p^{-1}$ лет, где p – вероятность одношагового перехода ЭС из непоглощающего состояния в поглощающее.

3. Наименьшее возможное количество $k(P)$ шагов (лет) функционирования ЭС, для которого выполняется неравенство $p_{21}^{(k)} \geq P$, равно числу $k(P) = \lceil \log_q(1 - P) \rceil = \left\lceil \frac{\ln(1 - P)}{\ln q} \right\rceil$. Если

$p = 0,01$, $P = 0,5$, то $k(0,5) = 69$ лет. Это означает, что для заданного значения вероятности $p = 0,01$ одношагового перехода ЭС из непоглощающего состояния в поглощающее через 69 лет вероятность объявления дефолта превышает 0,5.

4. Если на соответствующем этапе функционирования ЭС ей удастся за счёт модернизации избежать своей ликвидации, то значение вероятности перехода ЭС за k шагов её функционирования в поглощающее состояние дефолта с течением времени будет возрастать, неуклонно приближаясь к числу 1.

5. В случае, когда количество отсрочек индивидуальных дефолтов ЭС превышает некоторое критическое значение, происходит скачкообразный переход всей экономики в состояние подобное Великой Депрессии, когда резко усиливаются все (как количественного, так и качественного характера) негативные тенденции в мировой экономике, связанные с массовыми банкротствами ЭС.

6. Таким образом, можно считать неизбежными как индивидуальные банкротства ЭС, так и систематические кризисы мировой экономической системы, повторяющиеся каждые 50-100 лет. В свою очередь эти процессы приводят к полному обновлению мировой экономической системы: и по составу, и по структуре, и по качественным и количественным характеристикам функционирования ЭС.

7. Теоретико-игровой подход показывает, что для любой ЭС за достаточно длительный период времени шансы объявления ею своего дефолта можно оценить вероятностью 0,5.

Источники и литература

1. Жлуктенко В. И., Бегун А. В. Стохастичні моделі в економіці. – К.: КНЕУ, 2005. – 352 с.
2. Кемени Дж. Дж., Снелл Дж. Л., Кнепп Э. У. Счетные цепи Маркова. – М.: Наука, 1987 – 414 с.
3. Кемени Дж. Дж., Снелл Дж. Л. Конечные цепи Маркова. – М.: Наука, 1970. – 271 с.
4. Нуммелин Э. Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы – М.: Мир, 1989. – 207 с.
5. Чжун Кай-лай. Однородные цепи Маркова. – М.: Мир, 1964. – 425 с.
6. Грэхем Р. Л., Кнут Д. Э., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. – М.: Мир, 1998. – 703 с.
7. Сигал А. В., Яценко Л. Ф. Конкретная математика. Учебное пособие. – Симферополь: КИПУ 2007. – 178 с.
8. Романюк Т. П. Математичне програмування: навч. посібник / Т. П. Романюк, Т. А. Терещенко, Г. В. Присенко, І. М. Городкова. – К.: ІЗМН, 1996. – 312 с.