свойства 5) из [1, с. 6] если существует единичный корневой функционал, то любой функционал $L(x_*)$, аннулирующий $(f(x))_x$ и такой, что $L(y_*).\det\|\nabla f(x,y)\| \in (f(x))_x$, равен нулю. Следовательно, $\lambda(x_*) = 0_*$.

Замечание 1 (к теореме 5). $\mathbf{R}$ является алгебраически замкнутым полем. В этом случае условие $\mathbf{R}[x]/(f(x))_x$ является конечно порожденным как модуль над $\mathbf{R}$ эквивалентно условию 0-мерности многообразия корней. Тогда *2* теоремы 5 означает, что в случае 0-мерного многообразия корней нет ненулевых вырожденных корневых функционалов.

1. *Сейфуллин Т. Р.* Корневые функционалы и корневые полиномы системы полиномов // Доп. НАН України. – 1995. – № 5. – С. 5–8.
2. *Seifullin T. R.* Extension of bounded root functionals of a system of polynomial equations // Там же. – 2002. – № 7. – С. 35–42.
3. *Сейфуллин Т. Р.* Корневые функционалы на 1-мерном многообразии // Там же. – 2007. – № 7. – С. 18–23.

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 16.02.2007

УДК 517.5

Член-кореспондент НАН України **О. І. Степанець, А. Л. Шидліч**

Про один критерій для опуклих функцій

We obtain some new facts for the convex downwards functions vanishing at infinity.

У роботі встановлено низку нових фактів для опуклих донизу функцій, які зникають на нескінченності. Інтерес до таких функцій в останні десятиліття обумовлений введенням поняття узагальнених похідних і вивченням апроксимативних властивостей класів періодичних функцій, що визначаються на їх основі (див., напр., [1, 2]). Властивості таких функцій досліджувались у роботах [1, гл. III; 2, гл. III; 3; 4] та ін. Зокрема, в [1] було запропоновано класифікувати опуклі донизу функції таким чином.

Нехай $\mathfrak{M}$ — множина всіх додатних при $t \geqslant 1$ опуклих донизу спадних до нуля функцій:

$$\mathfrak{M} = \left\{\psi(t)\colon \psi(t) > 0,\ \psi(t_1) - 2\psi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) + \psi(t_2) \geqslant 0,\ \forall t_1, t_2 \in [1,\infty),\ \lim_{t\to\infty}\psi(t) = 0\right\}.$$

Нехай, далі, $\psi \in \mathfrak{M}$, тоді через $\eta(t) = \eta(\psi;t)$ позначають функцію, яка пов'язана із ψ рівністю

$$\psi(\eta(t)) = \frac{1}{2}\psi(t), \qquad t \geqslant 1. \tag{1}$$

Внаслідок строгої монотонності функції ψ, $\eta(t)$ при всіх $t \geqslant 1$ визначається однозначно:

$$\eta(t) = \eta(\psi;t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right). \tag{2}$$

Покладають

$$\mu(t) = \mu(\psi; t) = \frac{t}{\eta(t) - t}.$$

Залежно від поведінки функції μ розрізняють такі підмножини множини $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{M}_0 = \{\psi \in \mathfrak{M} \colon 0 < \mu(\psi; t) \leqslant K \ \forall\, t \geqslant 1\},$$

$$\mathfrak{M}_\infty = \{\psi \in \mathfrak{M} \colon 0 < K \leqslant \mu(\psi; t) < \infty \ \forall\, t \geqslant 1\},$$

$$\mathfrak{M}_C = \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}_\infty = \{\psi \in \mathfrak{M} \colon 0 < K_1 \leqslant \mu(\psi; t) \leqslant K_2 \ \forall\, t \geqslant 1\},$$

де, як і надалі, K, $K_1, \ldots$ — деякі додатні сталі, що не залежать від параметра t.

Через $\mathfrak{M}_0^+$ позначають підмножину всіх функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких величина $\mu(\psi; t)$ при $t \to \infty$ монотонно прямує до нуля:

$$\mathfrak{M}_0^+ = \{\psi \in \mathfrak{M} \colon \mu(\psi; t) \downarrow 0\},$$

а через $\mathfrak{M}_\infty^+$ — підмножину всіх функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких $\mu(\psi; t)$ монотонно і необмежено зростає при $t \to \infty$:

$$\mathfrak{M}_\infty^+ = \{\psi \in \mathfrak{M} \colon \mu(\psi; t) \uparrow \infty\}. \tag{3}$$

Така класифікація дала змогу створити апарат дослідження, за допомогою якого було отримано результати для відомих класів $L^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ періодичних функцій практично в такій же повноті та завершеності, в якій вони були отримані раніше для класів функцій, які визначаються похідними в сенсі Вейля.

У роботі [3] було вказано такі умови належності функцій $\psi \in \mathfrak{M}$ до введених множин.

Твердження А. *Функція $\psi \in \mathfrak{M}$ належить множині $\mathfrak{M}_0$ тоді і лише тоді, коли величина*

$$\alpha(t) = \alpha(\psi; t) = \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|}, \qquad \psi'(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \psi'(t+0), \tag{4}$$

задовольняє умову

$$\alpha(t) \geqslant K > 0 \qquad \forall\, t \geqslant 1;$$

$\psi \in \mathfrak{M}$ належить множині $\mathfrak{M}_\infty$ тоді і лише тоді, коли

$$\alpha(t) \leqslant K \qquad \forall\, t \geqslant 1;$$

$\psi \in \mathfrak{M}$ належить множині $\mathfrak{M}_C$ тоді і лише тоді, коли

$$0 < K_1 \leqslant \alpha(t) \leqslant K_2 \qquad \forall\, t \geqslant 1.$$

Якщо функція $\alpha(t)$ не спадає і

$$\lim_{t \to \infty} \alpha(t) = \infty, \tag{5}$$

то $\psi \in \mathfrak{M}_0^+$. *Якщо ж* $\alpha(t)$ *не зростає і*

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = 0, \tag{6}$$

то $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$.

Однак якщо для множин $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_\infty$ та $\mathfrak{M}_C$ знайдені умови є необхідними і достатніми, то для множин $\mathfrak{M}_0^+$ і $\mathfrak{M}_\infty^+$ вони є лише достатніми. Нижченаведене твердження дає необхідні і достатні умови того, щоб функція $\psi \in \mathfrak{M}$ належала до множин $\mathfrak{M}_0^+$ і $\mathfrak{M}_\infty^+$.

Теорема 1. *Нехай* $\psi \in \mathfrak{M}$. *Тоді для того щоб* ψ *належала множині* $\mathfrak{M}_\infty^+$, *необхідно і достатньо, щоб функція* $\alpha(t) = \alpha(\psi; t)$, *яка визначається рівністю* (4), *задовольняла умову* (6) *і нерівність*

$$\frac{\alpha(\eta(\psi;t))}{\alpha(t)} \leqslant 1 \qquad \forall\, t \geqslant 1. \tag{7}$$

Для того щоб ψ належала множині $\mathfrak{M}_0^+$, необхідно і достатньо, щоб функція $\alpha(t)$ задовольняла умову (5) і нерівність

$$\frac{\alpha(\eta(\psi;t))}{\alpha(t)} \geqslant 1 \qquad \forall\, t \geqslant 1.$$

Доведення. Покажемо спочатку, що якщо функція α задовольняє умови (6) та (7), то $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$. Прямування до нескінченності при $t \to \infty$ величини $\mu(\psi; t)$ за умови (6) доведено в [3]. Переконаємось, що функція $\mu(\psi; t)$ монотонно спадає.

Розглядаючи функцію $1/\mu(\psi; t) = (\eta(t)/t) - 1$, робимо висновок, що це можливо тоді і лише тоді, коли

$$t\eta'(t) - \eta(t) \leqslant 0. \tag{8}$$

Згідно з (1) та (4)

$$\frac{1}{2}\psi(t) = \psi(\eta(t)) = -\eta(t)\psi'(\eta(t))\alpha(\eta(t)).$$

Об'єднуючи цю рівність з рівністю (4) і враховуючи те, що внаслідок (2) $\forall \varphi \in \mathfrak{M}$

$$\eta'(t) = \frac{\psi'(t)}{2\psi'(\eta(t))}, \tag{9}$$

отримуємо

$$\frac{t\eta'(t)\alpha(t)}{\eta(t)\alpha(\eta(t))} = 1,$$

або

$$t\eta'(t) = \eta(t)\frac{\alpha(\eta(t))}{\alpha(t)}. \tag{10}$$

Звідси, на підставі (7), робимо висновок, що співвідношення (8) є правильним, а отже, функція $\mu(\psi; t)$ монотонно спадає при $t \geqslant 1$, і $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$.

Переконаємось тепер, що для довільної функції $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$ величина $\alpha(\psi; t)$ задовольняє умови (6) та (7).

Якщо $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, то справджується нерівність (8), враховуючи яку, із співвідношення (10) отримуємо (7). Крім того, для довільної функції $\psi \in \mathfrak{M}$ при кожному $t \geqslant 1$ маємо

$$|\psi'(\eta(t))|(\eta(t) - t) \leqslant \frac{1}{2}\psi(t) = -\int\limits_t^{\eta(t)} \psi'(\tau)d\tau \leqslant |\psi'(t)|(\eta(t) - t).$$

Звідси

$$\alpha(t) = \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|} \leqslant 2\frac{\eta(t) - t}{t} = \frac{2}{\mu(\psi; t)}.$$

Тому, якщо $\psi \in \mathfrak{M}$ така, що величина $\mu(\psi; t)$ монотонно і необмежено зростає, коли $t \to \infty$, тобто $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, то виконується співвідношення (6).

Цілком аналогічно доводиться друге твердження теореми 1.

У роботі [3] (див. також [2]) було отримано твердження B для функцій з множин $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_\infty$ та $\mathfrak{M}_C$.

Твердження B. *Якщо $\psi \in \mathfrak{M}_0$, то можна вказати таке $r_1 > 0$, що при всіх $t \geqslant 1$ буде виконуватись нерівність*

$$\psi(t) \geqslant Kt^{-r_1},$$

якщо $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, то існує число $r_2 > 0$ таке, що при всіх $t \geqslant 1$

$$\psi(t) \leqslant Kt^{-r_2},$$

якщо ж $\psi \in \mathfrak{M}_C$, то існують числа r_1, $r_2 > 0$ такі, що при всіх $t \geqslant 1$

$$K_1 t^{-r_1} \leqslant \psi(t) \leqslant K_2 t^{-r_2}.$$

Встановимо відповідний факт і для функцій з множин $\mathfrak{M}_0^+$ та $\mathfrak{M}_\infty^+$.

Теорема 2. *Якщо $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, то для довільного $r > 0$ знайдеться число $K > 0$ таке, що $\forall t \geqslant 1$*

$$\psi(t) \leqslant Kt^{-r}. \tag{11}$$

Якщо ж $\psi \in \mathfrak{M}_0^+$, то яке б не було число $r > 0$, знайдеться стала $K > 0$ така, що

$$\psi(t) \geqslant Kt^{-r} \qquad \forall\, t \geqslant 1. \tag{12}$$

Доведення. Записуючи рівність (4) у вигляді

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = -\frac{1}{t\alpha(t)}$$

і інтегруючи останнє співвідношення по проміжку $[1, t]$, $t > 1$, отримуємо

$$\psi(t) = \psi(1) \exp\left(-\int\limits_1^t \frac{d\tau}{\tau\alpha(\tau)}\right).$$

Оскільки $\alpha(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то для довільного $r > 0$ знайдеться число t_r таке, що для всіх $t > t_r$ виконується нерівність $1/\alpha(t) > r$. Тому при $t > t_r$ будемо мати

$$\psi(t) = \psi(1)\exp\left(-\int\limits_1^{t_r}\frac{d\tau}{\tau\alpha(\tau)} - \int\limits_{t_r}^{t}\frac{d\tau}{\tau\alpha(\tau)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \psi(1)\exp\left(-\int\limits_1^{t_r}\frac{d\tau}{\tau\alpha(\tau)}\right)\exp\left(-r\int\limits_{t_r}^{t}\frac{d\tau}{\tau}\right) = \psi(1)t_r^r\exp\left(-\int\limits_1^{t_r}\frac{d\tau}{\tau\alpha(\tau)}\right)t^{-r},$$

звідки і випливатиме співвідношення (11).

Справедливість співвідношення (12) для функцій $\psi \in \mathfrak{M}_0^+$ доводиться аналогічно.

Із співвідношення (9) випливає, що для довільної функції $\psi \in \mathfrak{M}$ виконується нерівність

$$\eta'(\psi;t) \geqslant \frac{1}{2} \qquad \forall\, t \geqslant 1.$$

З іншого боку, якщо $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, то внаслідок (3) маємо

$$\eta(\psi;t) = t(1+\gamma(t)),$$

де $\gamma(t)$ — функція, монотонно спадна до нуля при $t \to \infty$. Звідки випливає, що

$$\eta'(\psi;t) \leqslant 1 + \gamma(t).$$

Таким чином, якщо $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, то справджується оцінка

$$\frac{1}{2} \leqslant \eta'(\psi;t) \leqslant 1 + \gamma(t), \qquad \lim_{t\to\infty}\gamma(t) = 0. \tag{13}$$

Виявляється, що якщо існує границя при $t \to \infty$ величини $\eta'(\psi;t)$, то ця границя дорівнює одиниці. Точніше справедлива

Теорема 3. *Якщо $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, і, крім того,*

$$\lim_{t\to\infty}\eta'(\psi;t) = a, \tag{14}$$

то $a = 1$.

Доведення. Із (13) випливає, що величина a більшою за одиницю бути не може. Припустимо, що $a < 1$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ знайшлося б таке число t_ε, що при всіх $t \geqslant t_\varepsilon$ виконувалася б нерівність $\eta'(\psi;t) < 1 - \varepsilon$. У такому разі

$$\eta(\psi;t) - \eta(\psi;t_\varepsilon) = \int\limits_{t_\varepsilon}^{t}\eta'(\psi;\tau)d\tau < (1-\varepsilon)(t - t_\varepsilon),$$

звідки випливало б, що при досить великих значеннях t $\eta(\psi;t) < t$, що неможливо. Тому дійсно $a = 1$.

1. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
2. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч // Праці Ін-ту математики НАН України. – Т. 40 – Київ: Вид. Ін-ту математики НАН України, 2002. – Ч. 2. – С. 159–176.
3. *Степанец А. И.* Несколько утверждений для выпуклых функций // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 5. – С. 688–702.
4. *Тихонов С. Ю.* Об эквивалентности некоторых условий для выпуклых функций // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 3. – С. 427–431.

Інститут математики НАН України, Київ
Надійшло до редакції 20.12.2006