УДК 519.876.2

О.А. ДЯЧУК

МЕТОД ОТРИМАННЯ СПРОЩЕНОЇ МАКРОМОДЕЛІ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ ЗАСОБАМИ SIMULINK-MATLAB

Abstract: *In work the computer method of receipt of simplified macromodel of the dynamic system, which is based on the methods of selection of dominant eigenvalue of the system, is offered. The algorithm of computer approximation transformation of complex model to more simple format is represented.*
Key words: *dynamic system, structural model, macromodel, method of selection of dominant own values, approximation.*

Анотація: *В роботі пропонується комп'ютерний метод отримання спрощеної макромоделі динамічної системи, який базується на методах виділення домінантних власних значень системи. Представлено алгоритм комп'ютерного апроксимаційного перетворення складної моделі до більш простішого вигляду.*
Ключові слова: *динамічна система, структурна модель, макромодель, метод виділення домінантних власних значень, апроксимація.*

Аннотация: *В работе предлагается компьютерный метод получения упрощенной макромодели динамической системы, который базируется на методах выделения доминантных собственных значений системы. Представлен алгоритм компьютерного аппроксимационного преобразования сложной модели к более простому виду.*
Ключевые слова: *динамическая система, структурная модель, макромодель, метод выделения доминантных собственных значений, аппроксимация.*

1. Вступ

Важливою характеристикою при використанні методу математичного моделювання є адекватність математичних моделей об'єктам, які вони описують. Побудова більш точних моделей супроводжується збільшенням їх розмірності, що при проведенні чисельних експериментів, у свою чергу, призводить до труднощів комп'ютерної реалізації.

Часто виникають ситуації, коли необхідно швидко оцінити загальну інформацію про поведінку системи або її частини, чи оперативно обробити таку інформацію в режимі реального часу. Для цього намагаються побудувати спрощену або апроксимаційну модель, яка має важливе значення для розв'язання практичних задач управління.

В усій множині використовуваних підходів до спрощення математичних моделей досліджуваних систем спрощення складної моделі завжди ґрунтується на деякому критерію еквівалентності складної та апроксимаційної моделей. Оцінка еквівалентності моделей суттєвим чином визначається цілями дослідження системи і специфікою складної моделі.

2. Simulink-модель

Загальна структурна схема типової системи управління зі зворотним зв'язком може бути самостійною системою або частиною більш складної системи управління. Хоча деякі елементи можуть не входити в систему управління, однак вони включені для загальності і для оцінки більш складних систем [1].

На рис. 1 зображено вигляд структурної схеми системи управління, де вона задається в Simulink [2]. Прямокутники відображають динамічні характеристики одного елемента або групи елементів. З'єднувальні стрілки (→) між елементами моделі показують однонаправлений потік передачі сигналу від одного елемента до сусіднього. З'єднання ліній кружечками $\oplus$ означає, що

ISSN 1028-9763. Математичні машини і системи, 2008, № 2

має місце сумування, а якщо ⊖ — різниця; змінна, що має знак плюс біля з'єднання, проходить через нього, не змінюючи знак, а змінна, що має знак мінус біля з'єднання, проходить через нього, змінюючи знак на протилежний.

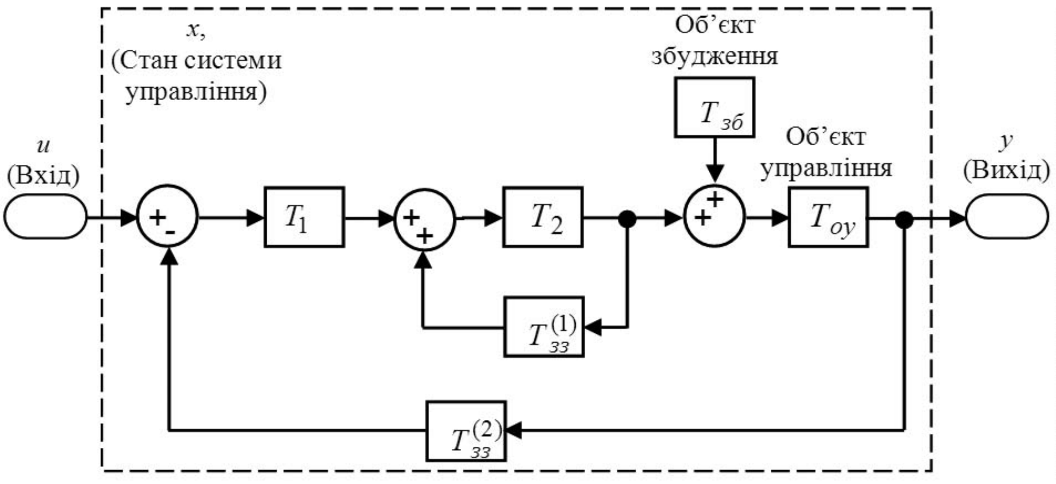

Рис. 1. Структурна simulink-модель типової системи управління зі зворотним зв'язком: u – вхідний сигнал; T_1 і T_2 – елементи, що регулюються; $T_{оу}$ – об'єкт управління; $T_{зз}^{(1)}$ і $T_{зз}^{(2)}$ – елементи зворотного зв'язку; $T_{зб}$ – об'єкт збудження; y – сигнал системи на виході

Кожен simulink-блок однозначно описується наборами вхідних параметрів u, змінними стану x і вихідними змінними y. В математичній формі блок можна описати змішаною системою диференціальних, різницевих та алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x}_c = f_c(t, x, u), \\ x_d(k) = f_d(t, x, \mathrm{u}), \\ x = x_c + x_d, \\ y = g(t, x, u), \end{cases} \tag{1}$$

де x_c – вектор непевних змінних стану;

$\dot{x}_c$ – вектор похідних змінних стану;

x_d – вектор дискретних змінних стану;

y – вектор вихідних змінних;

f_c – функція обчислення похідних вектора стану;

f_d – функція обчислення дискретних змінних;

g – функція обчислення виходів системи.

Будь-якій лінійній simulink-моделі "вхід-вихід" однозначно відповідає математична модель у просторі станів:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \end{cases} \tag{2}$$

де x, u та y – вектори стану, входу та виходу системи відповідно, A, B, C та D – сталі матриці, наперед задані або отримані експериментально.

Матриці A, B, C та D мають такі характеристики, які проілюстровані на рис. 2. Тобто A – мусить бути $n \times n$-матриця, де n – число станів; B – $n \times m$-матриця, де m – число входів; C – $r \times n$-матриця, де r – число виходів; D – $r \times m$-матриця.

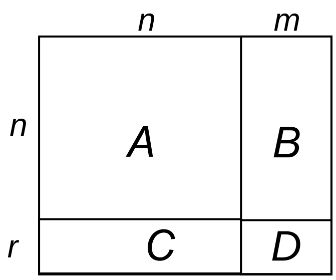

Рис. 2. Схема розмінностей матриць A, B, C та D моделі у просторі станів

3. Постановка задачі

Аналіз систем управління, які мають багато контурів, часто виявляється досить громіздким через наявність взаємозв'язаних контурів, що мають загальні елементи. При експериментальних дослідженнях може виявитись корисним заміна моделі динамічного об'єкта чи її частини макромоделлю, яка має найпростіший вигляд та є менш енергоємною. Тому актуальною стає задача побудови макромоделі, зображеної на рис. 3, яка повинна б досить точно відтворювати поведінку початкової системи.

Рис. 3. Макромодель системи управління

У макромоделі вхідний вектор u залишається тим самим, що і у початковій моделі, а сама система управління засобами Simulink-Matlab перетворюється так, що її можна описати за допомогою однієї передатної функції H. На виході отримується вектор $\tilde{y}$, що наближено дорівнює вектору y, з наперед заданою або з отриманою задовільною точністю.

4. Структурно-алгоритмічний метод спрощення динамічної моделі

Виходячи з вищесказаного, можна запропонувати комп'ютерний метод побудови спрощеної макромоделі динамічної системи стосовно складних simulink-моделей лінійних динамічних систем. При цьому для пониження розмірності моделі у просторі станів використовуються методи виділення домінантних власних значень [3–5], основна ідея яких полягає в тому, що при пониженні розмірності початкової моделі можна знехтувати тими елементами системи, що характеризують перехідні процеси, які швидко спадають. Алгоритм запропонованого методу побудови спрощеної макромоделі динамічної системи має такий вигляд:

1. В середовищі Simulink [2], яке виконує блочно-ситуаційне моделювання, будується й зберігається структурна модель динамічної системи.

2. За допомогою пакета Matlab отримується еквівалентна модель, яка є неперервною або дискретною лінійною моделлю заданої системи у просторі станів.

3. Після отримання моделі у просторі станів, якщо це потрібно, її розмірність понижується згадуваними вище методами виділення домінантних власних значень. Для цього можна використати, наприклад, один із методів Девісона [4, 5], метод Маршала [3], методи, що представлені в пакеті Matlab – MatchDC та Truncate [7], або інші методи, які дозволяють, при задовільній похибці апроксимації, будувати спрощені моделі.

4. Отримавши апроксимаційну модель засобами Matlab, перетворюємо представлену модель в просторі станів у рівноцінну їй модель у вигляді передатної функції.

5. Як критерій ефективності методів апроксимації динамічної системи регулювання можуть бути вибрані такі показники, як комп'ютерний час побудови спрощеної моделі, похибки апроксимації, оцінка амплітудно-фазо-частотної характеристики або реакції системи на заданий вхідний сигнал, а також певний комбінований показник.

5. Чисельний експеримент

Розглянемо застосування методу побудови спрощеної макромоделі на прикладі [1]. Нехай маємо структурну схему системи регулювання швидкості подачі палива двигуна внутрішнього згоряння, що зображена на рис. 4.

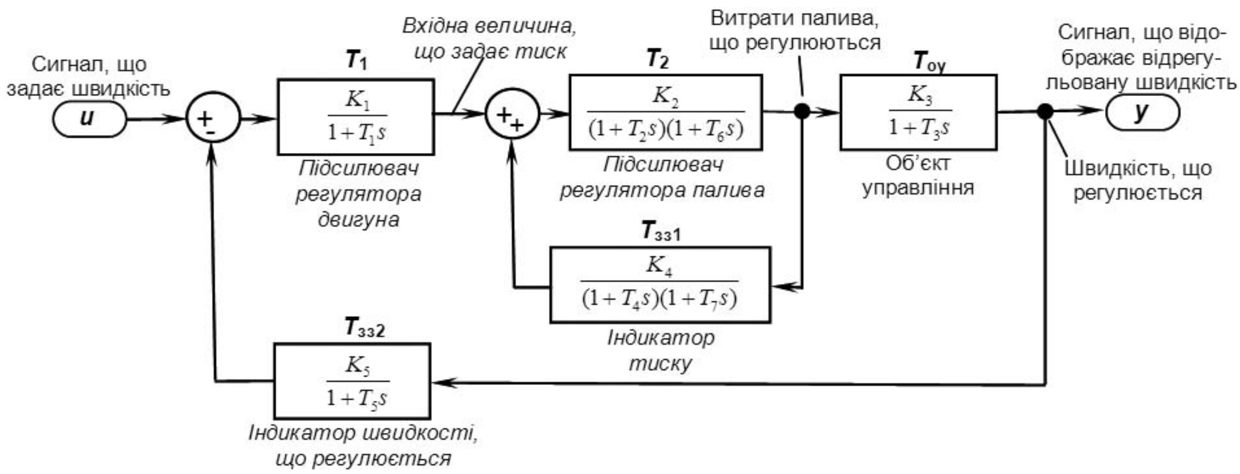

Рис. 4. Структурна схема системи регулювання швидкості подачі палива

На рис. 3 коефіцієнти передатних функцій дорівнюють: K_1=0,318, K_2=45, K_3=0,95, K_4=0,0083, K_5=1,00, T_1=0,0195, T_2=0,010, T_3=2,00, T_4=0,025, T_5=0,013, T_6=0,050, T_7=0,0065.

У цій схемі основною змінною, що регулюється, є швидкість, яка вимірюється за допомогою індикатора швидкості і порівнюється зі вхідним сигналом u системи. Розбіжність по швидкості діє на підсилювач регулятора двигуна, щоб встановити вхідний сигнал тиску, який задається. Цей тиск додається до того тиску, який створюється кількістю палива, що протікає. Сигнал розбіжності регулятора палива діє на підсилювач регулятора палива. Для заданих робочих умов витрати палива характеризують значення швидкості, що регулюється.

6. Програмна реалізація методу побудови спрощеної макромоделі

Не дивлячись на величезні успіхи в області чисельного моделювання, пов'язані, перш за все, із застосуванням обчислювальної техніки, потреба у створенні нових підходів до самого процесу моделювання постійно зростає. Традиційні алгоритми і методи їх реалізації не дають можливості гнучко переходити від однієї моделі системи до іншої в процесі обчислювального експерименту, тим самим знижуючи ефективність процесу дослідження.

З метою проведення обчислювальних експериментів для побудови спрощеної моделі в середовищі Matlab було створено програму ApprSM (Approximation of Structure of Model), яка реалізує структурно-алгоритмічний метод спрощення динамічних моделей, а також інші вищезгадувані методи. Програма дозволяє понизити розмірність структурної моделі системи і визначити передатну функцію, яка з достатньою точністю в інженерних розрахунках апроксимує складну систему регулювання зі зворотними зв'язками.

Для визначення потрібного ступеня апроксимації в програмі використовуються значення діагональних елементів матриць Грама, що характеризують вплив змінних стану на зв'язок між входом і виходом і, відповідно, вказують на ті змінні стану, які можуть бути відкинуті при спрощенні.

Алгоритм виконання програми має такий вигляд:

1. Будуємо систему регулювання швидкості подачі палива, що зображена на рис. 4, в середовищі Simulink, запускаємо процес моделювання і записуємо файл під ім'ям test.

2. Викликаємо в середовищі Matlab створену функцію MGramm('test'), що містить вмонтовані в Matlab функції linmod, ss для визначення матриць структурної моделі системи регулювання швидкості подачі палива в просторі станів і balreal для визначення діагональних елементів матриць Грама.

Синтаксис використання функції linmod має такий вигляд:

$$[A,B,C,D] = lin\,\mathrm{mod}('name\_sys'),$$

де A, B, C, D – є матрицями представлення структурної simulink-моделі в просторі станів, а $name\_sys$ – ім'я файлу, в якому зберігається структурна модель, що змодельована в Simulink.

Синтаксис використання функції ss :

$$sys = ss(A,B,C,D),$$

де sys – лінійна модель у просторі станів, що задається матрицями A, B, C, D.

Синтаксис використання функції balreal:

$$[hb, g] = balreal(sys),$$

де hb – врівноважена лінійна модель у просторі станів, g – вектор діагональних елементів матриці Грама.

Результат виконання функції MGramm буде таким:

$$A=\begin{bmatrix} -0{,}5 & 0 & 0 & 90000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -51{,}28 & 0 & 0 & -76{,}92 & 0 & 0 \\ 0 & 16{,}31 & -120 & -2000 & 0 & 0 & 51{,}08 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}475 & 0 & 0 & 0 & -76{,}92 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 90000 & 0 & -193{,}8 & -6154 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad C=\left[0{,}475\,0\,0\,0\,0\,0\,0\right],\quad D=[0],\quad g=\begin{bmatrix} 1{,}112 \\ 0{,}644 \\ 0{,}011 \\ 0{,}001 \\ 9{,}39e\text{-}005 \\ 1{,}002e\text{-}006 \\ 2{,}211e\text{-}008 \end{bmatrix}.$$

Отримані результати говорять про те, що модель системи регулювання швидкості подачі палива має розмірність 7, оскільки ранг матриці A має розмірність 7. Три останні змінні стану, по відношенню до інших, мають незначний вплив на систему і можуть бути відкинуті при спрощенні.

3. Викликаємо функцію ***ApprSM('test', e)***, де число e означає, що всі значення матриць Грама, які менше за нього, мають бути відкинуті і спрощена система буде мати розмірність меншу настільки, наскільки буде відкинуто елементів вектора g. Функція виводить на екран матриці Am, Bm, Cm, Dm, що задають апроксимовану модель у просторі станів.

У табл. 1–4 для апроксимованих моделей 4-го порядку Девісона, Маршала, MatchDC та Truncate наведені похибки апроксимації та комп'ютерний час побудови даних моделей.

Таблиця 1. Похибки апроксимованої моделі, отриманої за допомогою методу Девісона

Вхідні сигнали	Відносна похибка	Середньоквадратична похибка	Середня абсолютна похибка	Час побудови моделей, с
Імпульсний	0,50762	0,20765	0,023022	0,031
Ступінчатий	0,028665	0,035602	0,035429	

Таблиця 2. Похибки апроксимованої моделі, отриманої за допомогою методу Маршала

Вхідні сигнали	Відносна похибка	Середньоквадратична похибка	Середня абсолютна похибка	Час побудови моделей, с
Імпульсний	1,2484	2,3683	1,5751	0,094
Ступінчатий	0,51059	0,46266	0,56307	

Таблиця 3. Похибки апроксимованої моделі, отриманої за допомогою методу MatchDC

Вхідні сигнали	Відносна похибка	Середньоквадратична похибка	Середня абсолютна похибка	Час побудови моделей, с
Імпульсний	0,15986	0,4273	0,31268	0,031
Ступінчатий	0,092172	0,098569	0,15035	

Таблиця 4. Похибки апроксимованої моделі, отриманої за допомогою методу Truncate

Вхідні сигнали	Відносна похибка	Середньоквадратична похибка	Середня абсолютна похибка	Час побудови моделей, с
Імпульсний	0,15986	0,4273	0,31268	0,016
Ступінчатий	0,092172	0,098569	0,15035	

На рис. 5–8 зображено графіки амплітудно-частотних, фазо-частотних, амплітудно-фазо-частотних характеристик та реакції складної й спрощених моделей на імпульсний та ступінчатий вхідні сигнали.

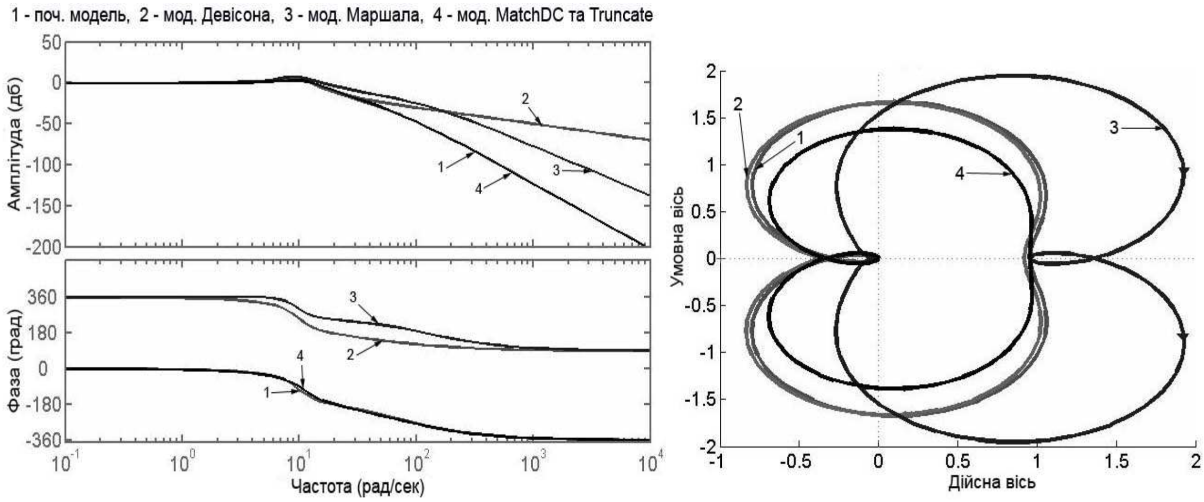

Рис. 5. Амплітудно-частотна (зліва зверху), фазо-частотна (зліва внизу) характеристики моделей та діаграма Найквіста або амплітудно-фазо-частотна характеристика моделей (справа)

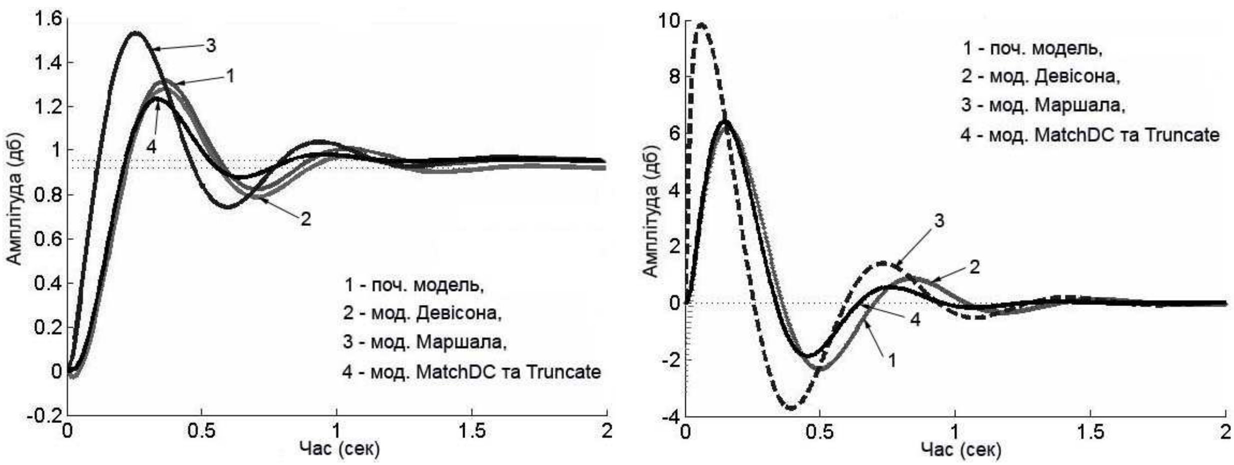

Рис. 6. Реакції складної та спрощених моделей на ступінчатий (зліва) та імпульсний (справа) вхідні сигнали

Дослідивши рис. 5–6 та керуючись значеннями табл. 1–4 похибок апроксимації і незначною різницею в часі між побудовами спрощених моделей різними методами, варто вибрати метод Девісона, за допомогою якого отримується апроксимаційна модель у просторі станів, де матриці Am, Bm, Cm, Dm мають такий вигляд:

$$Am = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 1{,}967e-11 & 1{,}478e-12 & 9e+04 \\ -1{,}108 & -127{,}6 & 23{,}26 & 2986 \\ -1{,}564 & -166{,}1 & -129 & 4206 \\ 7{,}481e-18 & 2{,}7e-15 & 1 & -1{,}021e-13 \end{bmatrix}, \quad Bm = \begin{bmatrix} -6{,}622 \\ 0{,}247 \\ -0{,}2643 \\ 0{,}00499 \end{bmatrix},$$

$$Cm = [0{,}475000], \quad Dm = [0].$$

Результати чисельного експерименту показують, що спрощена модель з необхідною точністю наближає початкову модель. Амплітудно-частотна характеристика (рис. 5, зліва зверху) говорить про еквівалентність моделей на низьких частотах. Фазо-частотні характеристики (рис. 5, зліва внизу) апроксимованої моделі Девісона і початкової моделі відрізняються тільки на період 2π. Перехідні процеси складної та спрощеної моделі Девісона співпадають у випадку імпульсного вхідного сигналу, а при ступінчатому вхідному сигналі мають незначну відмінність.

Для отримання передатної функції H (рис. 3), яку ми назвали макромоделлю вихідної моделі, що задана у вигляді структурної схеми (рис. 4), використовується вмонтована в Matlab функція ss2tf, яка має такий синтаксис:

$$[Btf, Atf] = ss2tf(Am, Bm,\ Cm,\ Dm),$$

де Am, Bm, Cm, Dm – матриці, отримані після апроксимації моделі у просторі станів. Вектор Atf містить коефіцієнти знаменника, а вектор Btf – коефіцієнти чисельника передатної функції H (макромоделі).

4. Задавши в Simulink передатну функцію з отриманими коефіцієнтами чисельника і знаменника, отримаємо спрощену структурну макромодель системи регулювання, яка має такий вигляд:

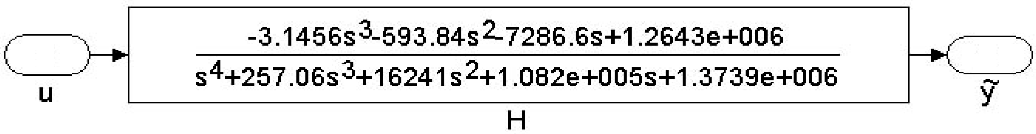

Рис. 7. Апроксимаційна макромодель системи регулювання, зображеної на рис. 4

7. Висновки

Отже, за допомогою запропонованого комп'ютерного структурно-алгоритмічного методу можна отримувати спрощені макромоделі лінійних динамічних системи стосовно складних simulink-моделей, заданих у структурному вигляді. У досить великому діапазоні частот отримані моделі мають не суттєві похибки апроксимації та вимагають невеликі ресурси при комп'ютерній реалізації.

Оскільки, в залежності від потреб дослідника, вимоги до апроксимаційних моделей можуть бути різними (час виконання, амплітудно-фазо-частотні характеристики, похибки апроксимації, об'єм пам'яті тощо), то створена автором програма ApprSM дає можливість навіть не досить досвідченому користувачеві в області програмування самому будувати макромодель лінійної системи управління, вибирати ступінь похибки апроксимації та метод отримання спрощеної моделі.

Програма ApprSM може використовуватися разом з іншими пакетами прикладних програм, які входять у програмний комплекс Matlab.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Честнат Г., Майер Р.В. Проектирование и расчет следящих систем регулирования. – М.-Л.: Государственное энергетическое издательство, 1959. – 488 с.
2. Черных И.В. SIMULINK: среда создания приложений / Под общ. ред. к.т.н. В.Г. Потемкина. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2003. – 496 с.
3. Федорчук В.А., Дячук О.А. Про спрощення динамічних моделей, поданих рівняннями стану // Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г.Є. Пухова НАН України. – К., 2006. – Вип. 32. – С. 107–110.
4. Дячук О.А. Апроксимаційні алгоритми пониження розмірності диференціальної моделі динамічного об'єкта // Моделирование-2006: Сб. научн. тр. (по материалам международной научной конференции). – К., 2006. – 16–18 мая. – С. 209–212.
5. Дячук А.А. Аппроксимационные алгоритмы понижения размерности дифференциальной модели динамического объекта // Электронное моделирование. – 2007. – Т. 29, № 2. – С. 39–47.
6. Ануфриев И.Е. MATLAB 7 / И.Е. Ануфриев, А.Б. Смирнов, Е.Н. Смирнова. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 1104 с.
7. Верлань А.А. Способ упрощения динамической модели / А.А. Верлань, М.В. Сагатов, В.Ф. Юзвенко // Моделювання та інформаційні технології: Зб. наук. пр. ІПМЕ ім. Г.Є. Пухова НАН України. – К., 2001. – Вип. 10. С. 98–101.

Стаття надійшла до редакції 25.12.2007