Теоретико-категорная характеризация развертки временных сетей Петри*

Дубцов Роман Сергеевич

Институт Систем Информатики им А.П. Ершова СО РАН, пр. Академика Лаврентьева, 6, г. Новосибирск, 630090, Россия. Тел.: +7 (383-2) 35-62-59, факс: +7 (383-2) 32-34-94. E-mail: dubtsov@gorodok.net.

The intention of the paper is to study a category-theoretic characterization of a semantic representation of the behaviour of time Petri nets, which are a time extension of heavily used model for concurrency – Petri nets. First, we introduce a notion of unfolding of a time Petri net and then provide its category-theoretic characterization.

Введение

Методы теории категорий, получив широкое распространение, в последние десятилетия стали активно использоваться для описания и изучения параллельных систем и процессов. Объекты категорий представляют процессы, а морфизмы соответствуют взаимосвязям между поведениями процессов. Теоретико-категорные методы позволяют классифицировать и унифицировать различные модели параллелизма. Основная идея этого похода заключается в формальном выражении того факта, что одна модель более выразительна, чем другая, в терминах вложений (или прообразов).

Сети Петри – одна из популярных моделей параллельных/распределенных систем. Эта модель является привлекательной, с точки зрения теории, благодаря своей простоте и внутренней параллельной природы, и часто используется как семантический базис, на котором интерпретируются параллельные языки [6].

В статьях [10, 11] дана теоретико-категорная характеризация поведения сетей Петри, которое представляется в виде сети-процесса, получаемого посредством развертки сети Петри в ациклическую сеть. Такой подход дает возможность установить взаимосвязь в виде сопряженных функторов между категориями сетей Петри и их семантических представлений.

Необходимость в разработке и исследовании параллельных/распределенных систем, функционирующих в режиме реального времени привела к попыткам ввести понятие времени в формальные модели. В литературе такие системы часто представляются временными автоматами, содержащими конечное множество счетчиков [1] и алгебрами временных процессов (см., например, [12]). Однако все эти формализмы базируются на интерливинговой семантике и не позволяют моделировать параллелизм естественным образом (напрямую). К временным моделям «истинного параллелизма» относятся временные расширения следующих моделей: структур событий [7], сетей Петри [3], частично-упорядоченных множеств [5], асинхронных систем переходов [2] и т.д.

В данной работе рассматриваются временные сети Петри и их семантические представления, а также дается теоретико-категорная характеризация развертки поведения временной сети Петри в ациклическое сетевое представление.

Работа состоит из трех частей. В первой части приводятся необходимые сведения из теории категорий. Вторая часть содержит основные определения, касающиеся сетей Петри и их семантических представлений. В третьей, основной, части вводятся определения временных сетей Петри и семантики их развертки во временные сети-процессы, а также дается теоретико-категорная характеризация этой семантики.

1. Элементы теории категорий

В данной части будут приведены основные используемые теоретико-категорные определения (см., например [4, 8]).

Определение 1.1. Будем говорить, что задана категория C **,** если заданы

- класс $|\mathsf{C}|$, элементы которого будем называть *объектами категории,*
- для каждой пары объектов A, B – множество $\mathsf{C}(A,B)$, элементы которого будем называть

$$\circ : \mathsf{C}(A,B) \times \mathsf{C}(B,C) \to \mathsf{C}(A,C).$$

  морфизмами A в B,
- для каждой тройки объектов A, B, C – правило композиции:
  композиция пары (f, g) будет обозначаться как $f \circ g$
- Для каждого объекта A – морфизм $1_A \in \mathsf{C}(A,A)$, называемый *тождественным,*

удовлетворяющие следующим аксиомам:

---

* Работа частично поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований (грант №04-01-00789)

- Ассоциативность композиции: для любых морфизмов $f \in \mathsf{C}(A,B)$, $g \in \mathsf{C}(B,C)$, $h \in \mathsf{C}(C,D)$ выполнено равенство: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$,
- Аксиома тождественности: для любых морфизмов $f \in \mathsf{C}(A,B)$, $g \in \mathsf{C}(B,C)$ выполнены равенства: $1_B \circ f = f$, $g \circ 1_B = g$.

Определение 1.2. Будем говорить, что задан *функтор* F из категории A в категорию B, если заданы:

- отображение $|\mathsf{A}| \to |\mathsf{B}|$ класса объектов первой категории в класс объектов второй; образ объекта $A \in |\mathsf{A}|$ обозначается как $F(A)$ или просто FA;
- для каждой пары объектов $A, A' \in \mathsf{A}$ отображение $\mathsf{A}(A, A') \to \mathsf{B}(FA, FA')$; образ морфизма $f \in \mathsf{A}(A, A')$ обозначается как $F(f)$ или просто Ff;

удовлетворяющие следующим аксиомам:

- для каждой пары морфизмов $f \in \mathsf{A}(A, A')$, $g \in \mathsf{A}(A', A'')$ верно: $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$
- для любого объекта $A \in |\mathsf{A}|$ верно: $F(1_A) = 1_{FA}$.

Если нам даны два функтора $F : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ и $G : \mathsf{B} \to \mathsf{C}$, то поточечная композиция дает нам новый функтор: $G \circ F : \mathsf{A} \to \mathsf{C}$.

Определение 1.3. Пусть даны два функтора $F : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ и $G : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$. *Функторным морфизмом* функтора F в функтор G будем называть класс морфизмов $(\alpha_A : FA \to GA)_{A \in |\mathsf{A}|}$ в категории B, индексируемый объектами A, такой, что для каждого морфизма $f: A \to A'$ в категории A выполнено: $\alpha_{A'} \circ F(f) = G(f) \circ \alpha_A$.

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "\alpha_A"'] & FA' \arrow[d, "\alpha_{A'}"] \\ GA \arrow[r, "Gf"] & GA' \end{tikzcd}$$

Определение 1.4. *Обратный конус над функтором* $F : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ состоит из

- объекта $C \in \mathsf{C}$;
- для каждого объекта $D \in \mathsf{D}$ – морфизма $s_D : FD \to C$ в категории C,

таких, что для каждого морфизма $d : D \to D'$ в категории D верно: $s_{D'} = s_D \circ Fd$.

Определение 1.5. *Обратный предел функтора* $F : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ – это обратный конус $(L, (s_D)_{D \in \mathsf{D}})$ над F, такой, что для любого другого обратного конуса $(M, (t_D)_{D \in \mathsf{D}})$ существует единственный изоморфизм $m : L \to M$ такой, что $t_D = m \circ s_D$. Для обозначения обратного предела будем использовать следующую запись: $\mathrm{Colim}(F)$.

Определение 1.6. Пусть $F : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ – функтор и B – объект категории B. Будем говорить, что задано *отражение* B относительно F, если задана пара (R_B, η_B), где

- R_B – объект A и $\eta_B : B \to F(R_B)$ – морфизм в B,
- если $A \in |\mathsf{A}|$ – объект A и $b : B \to F(A)$ – морфизм в B, то существует единственный морфизм $a : R_B \to A$ в A такой, что $F(a) \circ \eta_B = b.$

Определение 1.7. Будем говорить, что функтор $R : \mathsf{B} \to \mathsf{A}$ является *левым сопряженным к* функтору $F : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$, если существует такой функторный морфизм $\eta : 1_{\mathsf{B}} \to F \circ R$, что для каждого объекта $B \in |\mathsf{B}|$ верно, что (RB, η_B) – отражение B относительно F.

2. Элементы теории сетей Петри

В данной части приводятся некоторые определения теории сети Петри из статьи [11], которые будут использованы в дальнейшем. Начнем с некоторых вспомогательных определений.

Множество *мультимножеств над* S (т.е. множество функций из S в множество натуральных чисел ω) будем обозначать через $S^{\oplus}$, а через $S^{\oplus_\infty}$ – множество *мультимножеств с* (возможно) *бесконечными вхождениями* (т.е. функций из S в расширенное множество натуральных чисел $\omega_\infty = \omega \cup \{\infty\}$). *Носитель мультимножества* μ (т.е. множество элементов $s \in S$) будем обозначать через $[\mu]$.

Мы часто будем обозначать мультимножество $\mu \in S^{\oplus}$ через формальную сумму $\bigoplus_{s \in S} \mu(s) \cdot s$. Пусть I – некоторое множество индексов и дан набор $\{n_i \in \omega_\infty \mid i \in I\}$, тогда значение суммы $\sum_{i \in I} n_i$ будет конечно (и равно обычной сумме) если и только если множество $\{n_i \mid n_i > 0\}$ конечно; иначе значение суммы равно ∞.

Теперь мы можем определить линейную комбинацию мультимножеств следующим образом:

$$\bigoplus_{\mu\in S^{\oplus_\infty}} n_\mu \cdot \mu = \bigoplus_{\mu\in S^{\oplus_\infty}} n_\mu \cdot \Big(\bigoplus_{s\in S} \mu(s)\cdot s\Big) = \bigoplus_{s\in S} \Big(\sum_{\mu\in S^{\oplus_\infty}} n_\mu \mu(s)\Big)\cdot s.$$

$(\_)^{\oplus_\infty}$-гомоморфизмом из $S_0^{\oplus_\infty}$ в $S_1^{\oplus_\infty}$ будем называть функцию $g : S_0^{\oplus_\infty} \to S_1^{\oplus_\infty}$ такую, что

$$g(\mu) = \bigoplus_{s\in S_0} \mu(s)\cdot g(1\cdot s),$$

где $1\cdot s$ – формальная сумма, соответствующая функции, принимающей значение 1 на элементе s и 0 – на всех остальных.

Мы будем рассматривать $S^{\oplus}$ как множество с выделенной точкой – пустым мультимножеством, т.е. функцией принимающей значение 0 на всех элементах S, которое в дальнейшем будем обозначать как 0. Также будем обозначать $\mu\in S^{\oplus}$ через $\bigoplus_{i\in I} n_i s_i$, где $\{s_i \mid i\in I\} = [\mu]$ и $n_i = \mu(s_i)$, т.е. как сумму с ненулевыми слагаемыми. Кроме того, если $S'\subset S$, то будем писать $\bigoplus S'$ вместо $\bigoplus_{s\in S} 1\cdot s$.

Если $s\in X_1\times\ldots\times X_n$, то его проекция на компоненту X_i будет обозначаться как $s\downarrow X_i$. Кроме того, если $S = \bigcup\{s_j \mid j\in J\}$, то $S\downarrow X_i$ будет обозначать $\{s_j\downarrow X_i \mid j\in J\}$, а $s\overset{\oplus}{\downarrow} X_i$ будет обозначать $\bigoplus_{j\in J}(s_j\downarrow X_i)$.

Далее перейдем к определению собственно сетей Петри. Заметим, что использование в определении множеств с выделенной точкой позволяет «моделировать» частичные функции с помощью всюду определенных.

Определение 2.1. *Сеть Петри* – это структура $N = (\delta_N^0, \delta_N^1 : (T_N, 0)\to S_N^{\oplus}, u_N)$, где T_N – множество *переходов* с выделенной точкой 0, S_N – множество *мест*, δ_N^0 и δ_N^1 – морфизмы множеств с выделенной точкой и $u_N\in S_N^{\oplus}$ – *начальная разметка*. Кроме того, мы требуем, чтобы выполнялось $\delta_N^0(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Морфизм сетей Петри N_0 и N_1 – это пара функций (f, g) таких, что

1. $f : T_{N_0}\to T_{N_1}$ – морфизм множеств с выделенной точкой,
2. $g{:}S_{N_0}^{\oplus_\infty}\to S_{N_1}^{\oplus_\infty}$ – $(\_)^{\oplus_\infty}$-гомоморфизм,
3. $\delta_N^0\circ f = g\circ\delta_N^0$ и $\delta_N^1\circ f = g\circ\delta_N^1$, т.е. f и g сохраняют действие δ_N^0 и δ_N^1,
4. $g(u_{N_0}^I) = u_{N_1}^I$,
5. $\forall b\in[u_{N_1}^I], \exists! a\in[u_{N_1}^I]$, такое, что $b\in[g(a)]$,

   $\forall b\in[\delta_{N_1}^1(f(t))], \exists! a\in[\delta_{N_0}^1(t)]$, такое, что $b\in[g(a)]$.

Определив композицию покомпонентно, получаем категорию сетей Петри PTNets.

Таким образом, сеть Петри представляется как граф, дуги которого – переходы, а вершины – мультимножества мест, т.е. *разметки*.

Сеть Петри N – *безопасная*, тогда и только тогда, когда выполнено:

$$\forall t\in T_N, \bigoplus[\delta_N^i(t)] = \delta_N^i(t) \quad (i = 0,1) \text{ и } \forall v\in \mathsf{R}[N], \bigoplus[v] = v,$$

где $\mathsf{R}[N]$ – множество разметок N, *достижимых* из начальной. Для безопасных сетей мы будем использовать следующие обозначения. *Входное множество* a будем обозначат, как $^{\bullet}a = \{t\in T_N \mid a\in[\delta_N^1(t)]\}$. Симметрично определяется *выходное множество:* $a^{\bullet} = \{t\in T_N \mid a\in[\delta_N^0(t)]\}$. Очевидным образом эти понятия можно расширить на множество мест. Безопасные сети определяют полную подкатегорию $\mathsf{Safe}\subset\mathsf{PTNets}$.

Определение 2.2. *Сеть-процесс* – это безопасная сеть θ такая, что

1. $a\in[u_N] \Leftrightarrow {}^{\bullet}a = \varnothing$,
2. $\forall a\in S_\theta, |{}^{\bullet}a|\le 1$, где $|\_|$ обозначает мощность множества,
3. отношение $\prec$ является иррефлексивным, где $\prec$ – транзитивное замыкание отношения

   $$\prec^1 = \{(a,t) \mid s\in S_\theta t\in T_\theta, t\in a^{\bullet}\}\cup\{(t,a) \mid s\in S_\theta t\in T_\theta, t\in{}^{\bullet}a\},$$

   кроме того, для всех $t\in T_\theta$ множество $\{t'\in T_\theta \mid t'\prec t\}$ конечно,

4. бинарное отношение «конфликта» # определенное на $S_\theta\cup T_\theta$ иррефлексивно, по определению,

   $$\forall t_1, t_2\in T_\theta, t_1\#_m t_2 \Leftrightarrow [\delta_\theta^0(t_1)]\cap[\delta_\theta^0(t_2)]\ne\varnothing\wedge t_1\ne t_2,$$

   $$\forall x, y\in T_\theta\cup S_\theta, x\#_m y \Leftrightarrow \exists t_1, t_2\in T_\theta : t_1\#_m t_2\wedge t_1\preceq x\wedge t_2\preceq y,$$

   где $\preceq$ – рефлексивное замыкание $\prec$. Сети-процессы образуют полную подкатегорию $\mathsf{Occ}\subset\mathsf{Safe}$.

Введем следующие обозначения: пусть $[n,m]$ обозначает интервал $\{n,\ldots,m\}\subset\omega$, $[n]$ обозначает $[1,n]$, $[k]_i$ обозначает i-й блок длины k множества $\omega\setminus\{0\}$, т.е. $[ik]\setminus[(i-1)k]$.

Мы будем называть функцию $f:[n]\to[m]$ *блоковой* тогда и только тогда, когда $n=km$ и $f([k]_i)=\{i\}$ для всех $i=1,\ldots,m$.

Заметим, что компонента g, действующая на местах, в морфизме сетей Петри $(f,g):N_0\to N_1$ может рассматриваться как *мультиотношение* (с, возможно, бесконечными множественностями) между S_{N_0} и S_{N_1}, т.е. отношение g такое, что $a\,g\,nb$ тогда и только тогда, когда $g(a)(b)=n$. В случае сетей-процессов, g является *отношением*, и обратное к нему отношение g^{op} определяется так: $ag^{op}b$ тогда и только тогда, когда agb. Кроме того, в случае сетей-процессов, следующие сужения g^{op} являются (всюду определенными) функциями: $g^{op}_{\varnothing}:[u^I_{N_1}]\to[u^I_{N_0}]$ и $g^{op}_{\{t\}}:[\delta^1_{N_1}(f(t))]\to[\delta^1_{N_1}(t)]$ для каждого $t\in T_{N_0}$. Эти функции будут использованы в приведенном ниже определении специальных сетей-процессов, места которых сгруппированы в семейства, что позволяет удобным образом строить развертку для любых (не только безопасных) сетей Петри.

Определение 2.3. *Декорированная сеть-процесс* θ – это сеть-процесс такая, что

1. S_θ имеет вид $\bigcup\limits_{a\in A_\theta}\{a\}\times[n_a]$, где множество $\{a\}\times[n_a]$ называется *семейством* a, мы будем использовать обозначение a^F для семейства a, рассматриваемого как мультимножество,
2. $\forall a\in A_\theta,\forall x,y\in\{a\}\times[n_a],{}^\bullet x={}^\bullet y$.

Морфизм декорированных сетей-процессов $(f,g):\theta_0\to\theta_1$ – это морфизм сетей-процессов, действующий с учетом семейств, т.е. для каждого $[a^F]\subseteq S_\theta$ верно:

1. $g(a^F)=\bigoplus\limits_{i\in I_a}b_i^F$ для некоторого множества индексов I_a,
2. $\pi_a\circ g_i^{op}\circ in_{b_i}$ – блоковая функция, где

   π_a – проекция $\{a\}\times[n_a]$ на $[n_a]$,

   in_{b_i} – биекция из $[n_a]$ в $\{a\}\times[n_a]$, и

   $g_i^{op}:\{b_i\}\times\{n_{b_i}\}\to\{a\}\times[n_a]$ является сужением g^{op} на $\{b_i\}\times[n_{b_i}]$.

Декорированные сети-процессы и их морфизмы образуют категорию DecOcc .

Пусть θ – декорированная сеть-процесс (согласно которой определяются отношения #, $\prec$, $\preceq$). Далее введем отношение *параллельности*:

- для $x,y\in T_\theta\cup S_\theta, x\;co\;y\Leftrightarrow\neg(x\prec y\vee y\prec x\vee x\# y)$,
- для $X\subseteq T_\theta\cup T_\theta, Co(X)\Leftrightarrow(\forall x,y\in X, x\;co\;y)\wedge(|\{t\in T_\theta\mid\exists x\in X, t\preceq x\}|\in\omega)$.

3. Временное расширение сетей Петри и их развертки

В данной части вводится ряд понятий, связанных с временными сетями Петри модели Мерлина [7] и ее семантическими представлениями, а также дается теоретико-категорная характеризация построения семантик.

Пусть R – множество действительных неотрицательных чисел. Введем дополнительное обозначение: $Interv=\{[a,b]\subset\mathrm{R}\mid a,b\in\omega\}$ – множество интервалов R с целочисленными границами.

Определение 3.1. *Временной сетью Петри* будем называть пару $TN=(N,\chi)$, где N – сеть Петри, а $\chi:T_N\to Interv$ – *функция временных интервалов*. При этом будем обозначать $\min(\chi(t))$ – нижнюю границу интервала, – как $\chi^\varepsilon(t)$ – *самое раннее время срабатывания перехода*, и $\max(\chi(t))$ как $\chi^\lambda(t)$ – *самое позднее время срабатывания перехода*, т.е. $\chi(t)=[\chi^\varepsilon(t),\chi^\lambda(t)]$. Морфизмы временных сетей Петри $TN_0=(N_0,\chi_0)$ и $TN_1=(N_1,\chi_1)$ – это морфизмы сетей Петри $(f,g):N_0\to N_1$, удовлетворяющие следующему условию: $\forall t\in T_{N_0}\chi_0(t)\subseteq\chi_1(f(t))$. Определенные выше временные сети Петри и их морфизмы образуют категорию TPTNets .

Определение 3.2. *Временная сеть-процесс* – это пара $\tau\theta=(\theta,\varphi)$ такая, что θ – сеть-процесс, $\varphi:T_\theta\to Interv$ – функция временных интервалов и для любых переходов $t,t'\in T_\theta$ выполнено условие: $t\preceq t'\Rightarrow\varphi^\varepsilon(t)\le\varphi^\varepsilon(t')\wedge\varphi^\lambda(t)\le\varphi^\lambda(t')$.

Аналогичным образом, определим временные декорированные временные сети-процессы.

Определение 3.3. *Декорированная временная сеть-процесс* – это временная сеть-процесс $\tau\theta=(\theta,\varphi)$ такая, что θ – декорированная сеть-процесс.

Далее будем рассматривать взаимосвязи между категориями TDecOcc и TPTNets.

Перед этим введем вспомогательное понятие. *Глубина* некоторого элемента множества $T_\theta \cup S_\theta$, где θ – либо сеть-процесс, либо декорированная сеть-процесс, определяется по индукции:

- $depth(b)=0$, если $b \in [u_\theta^I]$,
- $depth(t) = \max\{depth(b) \mid b \prec t\} + 1$,
- $depth(b)=depth(t)$, если $\{t\}={}^\bullet b$.

Определение 3.4. Пусть $\tau\theta = (\theta, \varphi)$ – временная декорированная сеть-процесс. По определению, положим $(\tau\theta)_\tau^+ = (\theta^+, \chi^+)$, где сеть θ^+ определяется следующим образом. Пусть $\theta = (\delta_\theta^0, \delta_\theta^1 : (T_\theta, 0) \to (\bigcup_{a \in A_\theta} \{a\} \times [n_a])^\oplus, u_\theta^I)$ – декорированная сеть-процесс, $(\_)^+$ – $(\_)^{\oplus_\infty}$-гомоморфизм из $S_\theta^{\oplus_\infty}$ в $A_\theta^{\oplus_\infty}$ такой, что $(a, j)^+ = a$. Тогда определим сеть θ^+ следующим образом: $\theta^+ = ((\_)^+ \circ \delta_\theta^0, (\_)^+ \circ \delta_\theta^1 : (T_\theta, 0) \to A_\theta^\oplus, (u_\theta^I)^+)$. Функция временных интервалов χ^+ определяется следующим образом:

$$\chi^+(t) = \begin{cases} \varphi(t), \text{если } depth(t) = 0, \\ [\varphi^\varepsilon(t) - \max\{\varphi^\varepsilon(t') \mid t' \preceq t\}, \varphi^\lambda(t) - \max\{\varphi^\lambda(t') \mid t' \preceq t\}] \text{ иначе.} \end{cases}$$

Пусть $(f, g) : \tau\theta_0 \to \tau\theta_1$ – морфизм декорированных временных процессов. Тогда $(f, g)_\tau^+ = (f, (\_)^+ \circ g \circ in) : \theta_0^+ \to \theta_1^+$, где $in : A_{\theta_0}^\oplus \to S_{\theta_0}^\oplus$ – $(\_)^{\oplus_\infty}$-гомоморфизм из $S_\theta^{\oplus_\infty}$ в $A_\theta^{\oplus_\infty}$ такой, что $in(a) = (a,1)$.

Нетрудно показать, что определенный выше $(\_)_\tau^+$ является функтором.

Далее определим развертку временной сети Петри в декорированную временную сет-процесс.

Определение 3.5. Пусть $TN = (N, \chi)$ – временная сеть Петри. Тогда $\mathsf{U}_\tau[TN] = (\mathsf{U}[N], \varphi_{\mathsf{U}_\tau[TN]})$. Здесь $\mathsf{U}[N]$ – развертка N [11], являющаяся обратным пределом (который существует, согласно теореме 1.10, [11]) последовательности (которая может рассматриваться как функтор из подходящей категории в категорию TDecOcc) декорированных сетей-процессов $\mathsf{U}[N]^{(k)} = (\delta_k^0, \delta_k^1 : (T_k, 0) \to S_k^\oplus, u_k)$ $(k \in \omega)$, определенной следующим образом. Для $k = 0$:

- $S_0 = \bigcup\{\{(\varnothing, b)\} \times [n] \mid u_N^I(b) = n\}$,
- $T_0 = \{0\}$,
- $u_0^I = \bigoplus S_0$.

Для $k > 0$:

- $T_k = T_{k-1} \cup \{(B, t) \mid B \subseteq S_{k-1} \wedge Co(B) \wedge t \in T_N \wedge B \overset{\oplus}{\downarrow} S_N = \delta_N^0(t)\}$,
- $S_k = S_{k-1} \cup \left(\bigcup\left\{\{(\{t_0\}, b)\} \times [n] \mid t_0 \in T_k \wedge b \in S_N \wedge \delta_N^1(t_0 \downarrow T)(b) = n\right\}\right)$,
- $\delta_k^0(B, t) = \bigoplus B$ и $\delta_k^1(B, t) = \bigoplus\left\{((\{(B, t)\}, b), i) \in S_k\right\}$,
- $u_k^I = u_0^I$.

Далее, $\varphi_{\mathsf{U}_\tau[TN]}$ – функция временных интервалов, определенная следующим образом:

$$\varphi_{\mathsf{U}_\tau[TN]}(B, t) = \begin{cases} \chi(t), \text{если } depth(t) = 0, \\ [\chi^\varepsilon(t) + \max\{\varphi_{\mathsf{U}_\tau[TN]}^\varepsilon(t') \mid t' \preceq t\}, \chi^\lambda(t) + \max\{\varphi_{\mathsf{U}_\tau[TN]}^\lambda(t') \mid t' \preceq t\}], \text{ иначе.} \end{cases}$$

Нетрудно показать, что определенный таким образом $\mathsf{U}_\tau[\_]$ является функтором.

Теорема 3.6. *Пара функторов* $((\_)_\tau^+, \mathsf{U}_\tau[\_])$ *образует сопряжение.*

Доказательство (набросок). Для доказательства теоремы построим для каждой временной сети Петри $TN = (N, \chi)$ следующий *сворачивающий* морфизм (или *свертку*) $\varepsilon_{TN} = (f_\varepsilon, g_\varepsilon) : (\mathsf{U}_\tau[TN])_\tau^+ \to TN$ следующим образом:

- $f_\varepsilon(B, t) = t$ и $f_\varepsilon(0) = 0$,
- $g_\varepsilon(\oplus_i (x_i, y_i)) = \oplus_i y_i$.

Заметим, что он полностью совпадает с сверткой $\varepsilon_N = (f_\varepsilon, g_\varepsilon) : \mathsf{U}[N]^+ \to N$ из [11].

Рассмотрим декорированную временную сеть $\tau\theta = (\theta, \varphi)$ и морфизм $k : (\tau\theta)^+_\tau \to TN$ в категории $\mathsf{TPTNets}$. Так как по определению, $k : \theta^+ \to N$, то по теореме 1.15 [11] имеем: в категории DecOcc существует единственный морфизм $h : \theta \to \mathsf{U}[N]$ такой, что $k = \varepsilon_N \circ h^+$. Осталось показать, что морфизм h удовлетворяет условиям, накладываемым на морфизмы временных декорированных сетей-процессов, т.е. действует с учетом временных интервалов и, следовательно, является морфизмом $h : \tau\theta \to \mathsf{U}_\tau[TN]$. Для этого рассмотрим следующую диаграмму.

$$\begin{tikzcd}
T_{\mathsf{U}[N]} \ni (B,t) \arrow[r, "\varepsilon_{TN}"] & t \in T_N \arrow[d, equal] \\
& t' \in T_N \\
T_\theta \ni t_\theta \arrow[uu, "h^+"] \arrow[ur, "k"'] &
\end{tikzcd}$$

Здесь равенство $t = t'$ следует из того, что $k = \varepsilon_{TN} \circ h^+$. По определению, имеем: $\chi^+(t_\theta) \subseteq \chi(t') = \chi(t)$ и $\chi^+_{\mathsf{U}_\tau[TN]}(B,t) = \chi(t) = \chi(t')$. Следовательно, $\chi^+(t_\theta) \subseteq \chi^+_{\mathsf{U}_\tau[TN]}(B,t)$ и $(h)^+_\tau = (h)^+ : (\tau\theta)^+_\tau \to (\mathsf{U}_\tau[TN])^+_\tau$ – морфизм в категории $\mathsf{TPTNets}$ и, как нетрудно показать, $h : \tau\theta \to \mathsf{U}_\tau[TN]$ – морфизм в категории $\mathsf{TDecOcc}$. Таким образом, мы показали, что для любого морфизма $k : (\tau\theta)^+_\tau \to TN$ в категории $\mathsf{TPTNets}$ в категории $\mathsf{TDecOcc}$ существует единственный морфизм $h : \tau\theta \to \mathsf{U}_\tau[TN]$, такой, что $k = \varepsilon_{TN} \circ (h)^+_\tau$. Следовательно (по теореме 2, [8]), пара функторов $((\_)^+_\tau, \mathsf{U}_\tau[\_])$ образует сопряжение. *Теорема доказана.*

Чтобы связать категории $\mathsf{TDecOcc}$ и TOcc, определим «забывающий» функтор $\mathsf{F}_\tau[\_] : \mathsf{TDecOcc} \to \mathsf{TOcc}$, который «забывает» о семействах мест.

Определение 3.7. Пусть $\tau\theta$ – декорированная сеть-процесс, тогда $\mathsf{F}_\tau[\tau\theta]$ – это сеть-процесс $\tau\theta$. Пусть $(f,g) : \tau\theta_0 \to \tau\theta_1$ – морфизм декорированных сетей-процессов, тогда $\mathsf{F}_\tau[(f,g)] = (f,g)$.

Для того чтобы определить функтор, действующий в обратную сторону, введем некоторые дополнительные определения.

Пусть Σ – алфавит. Тогда бинарное отношение $\mapsto$ на Σ^+, языке непустых цепочек над Σ, определяется следующим образом:

$$\sigma_1^{n_1} \ldots \sigma_k^{n_k} \mapsto \sigma_1^{m_1} \ldots \sigma_k^{m_k} \Leftrightarrow \sigma_i \neq \sigma_{i+1} \wedge \exists q \in \omega : q n_i = m_i, i = 1, \ldots, k.$$

Тогда язык *простых строк* над Σ определяется следующим образом:

$$\Sigma^P = \Sigma^+ \setminus \{\sigma_1^{n_1} \sigma_2^{n_2} \ldots \sigma_k^{n_k} \mid \sigma_i \neq \sigma_{i+1} \wedge \text{НОД}(n_1, \ldots, n_k) > 1\},$$

где НОД – *наибольший общий делитель*.

Рассмотрим некоторую декорированную сеть-процесс θ и переход $t \in T_\theta$. Будем обозначать через $\Sigma_{\{t\}}$ алфавит $[\delta^1_\theta(t)]$. Аналогично, так как места входной разметки не принадлежат выходному множеству ни одного перехода, то $\Sigma_\varnothing$ будет обозначать $[u^I_\theta]$, кроме того, в дальнейшем мы будем обозначать u^I_θ как $\delta^1_\theta(\varnothing)$.

Так как семейство b^F является ничем иным как упорядоченным подмножеством начальной разметки или выходного множества перехода, то оно соответствует некоторой строке из Σ^+_x, где $x = {}^\bullet[b^F]$, а именно строке длины $|[b^F]|$, у которой на *i*-м месте находится символ (*b*,*i*). Мы будем обозначать такую строку как $\hat{b}^F$.

Теперь определим функтор $\mathsf{D}_\tau[\_] : \mathsf{TOcc} \to \mathsf{TDecOcc}$, который, как будет показано ниже, совместно с $\mathsf{F}_\tau[\_]$, составляет сопряжение.

Определение 3.8. Пусть $\tau\theta = (\theta, \varphi)$ – временная сеть-процесс. По определению, $\mathsf{D}_\tau[\tau\theta] = (\mathsf{D}[\theta], \varphi)$, где $\mathsf{D}[\theta]$ – «декорирование» θ [11], определенное следующим образом. Пусть θ – сеть-процесс из Occ. Тогда декорированная сеть-процесс $\mathsf{D}[\theta] = (\delta^0_{\mathsf{D}[\theta]}, \delta^1_{\mathsf{D}[\theta]} : (T_\theta, 0) \to S^\oplus_{\mathsf{D}[\theta]}, u^I_{\mathsf{D}[\theta]})$ строится по следующим правилам:

- $S_{\mathsf{D}[\theta]} = \bigcup \{\{s\} \times [|s|] \mid s \in \Sigma^P_x \wedge (x = \{t\} \subseteq T_\theta \vee x = \varnothing)\}$,
- $\delta^0_{\mathsf{D}[\theta]} = \bigoplus \{(s,i) \in S_{\mathsf{D}[\theta]} \mid s_i \in [\delta^0_\theta(t)]\}$,
- $\delta^1_{\mathsf{D}[\theta]} = \bigoplus \{s^F \mid s \in \Sigma^P_{\{t\}}\}$,
- $u^I_{\mathsf{D}[\theta]} = \bigoplus \{s^F \mid s \in \Sigma^P_\varnothing\}$.

Теорема 3.9. *Пара функторов* $(\mathsf{D}_\tau[\_], \mathsf{F}_\tau[\_])$ *образует сопряжение.*

Доказательство (набросок). Определим для каждой временной сети-процесса $\tau\theta = (\theta, \varphi)$ морфизм $\eta_{\tau\theta} : \tau\theta \to \mathsf{F}_\tau \mathsf{D}_\tau[\tau\theta]$ следующим образом:

- $\eta_{\tau\theta}(t) = t$,
- $\eta_{\tau\theta}(a) = \oplus\{(s,i) \in S_{\mathsf{D}[\theta]} \mid s_i = a\}$.

Заметим, что определенный выше морфизм совпадает с морфизмом $\eta_\theta : \theta \to \mathsf{FD}[\theta]$ из утверждения 2.6 [11].

Пусть $\tau\theta = (\theta, \varphi)$ – временная сеть-процесс, $\tau\theta' = (\theta', \varphi')$ – декорированная временная сеть-процесс и $k : \tau\theta \to \mathsf{F}_\tau[\tau\theta']$ – морфизм в категории TOcc . Согласно определения морфизма имеем: $k : \theta \to \mathsf{F}[\theta']$ – морфизм в категории Occ . Следовательно, по теореме 2.9 [11], имеем: в категории DecOcc существует морфизм $(f, g) : \mathsf{D}\ [\theta] \to \theta'$ такой, что $k = \mathsf{F}[(f,g)] \circ \eta_\theta$. Покажем, что (*f*, *g*) действует с учетом временных интервалов, т.е. является морфизмом в категории $\mathsf{TDecOcc}$. Необходимое условие следует из того факта, что так как $k = \mathsf{F}[(f,g)] \circ \eta_\theta$, то $\mathsf{F}(f)(t) = k(t)$, и, следовательно, для любого перехода $t \in T_\theta$ верно: $\varphi(t) \subseteq \varphi'(k(t)) = \varphi'(f(t))$, то есть $(f, g) : \mathsf{D}_\tau[\tau\theta] \to \tau\theta'$ – морфизм в категории $\mathsf{TDecOcc}$. Таким образом, для всякого морфизма $k : \tau\theta \to \mathsf{F}_\tau[\tau\theta']$ в категории TOcc , существует морфизм $(f, g) : \mathsf{D}_\tau[\tau\theta] \to \tau\theta'$ в категории $\mathsf{TDecOcc}$ такой, что $k = \mathsf{F}_\tau[(f,g)] \circ \eta_\theta$, следовательно, по теореме 2 [8], пара функторов $(\mathsf{D}_\tau[\_], \mathsf{F}_\tau[\_])$ образует сопряжение. *Теорема доказана.*

Литература

1. **Alur R., Dill D.** The theory of timed Automata. *Lecture Notes In Computer Science* **600**, (1991) 45–73.
2. **Aceto L., Murphi D.** Timing and causality in process algebra. *Acta Informatica.* **33(4)** (1996) 317–350.
3. **Berthomieu B., Diaz M.** Modelling and verification of time dependent systems using time Petri nets. *IEEE Transactions on Software Engineering.* **17(3)** (1991) 259–273.
4. **Bourceux F.** Handbook of Categorical Algebra. Cambridge: Cambridge University Press (1994)
5. **Casley R.F., Crew R.F., Meseguer J., Pratt V.R.** Temporal structures. *Mathematical Structures in Computer Science.* **1(2)** (1991) 79–213.
6. **Degano P., De Nicola R., Montanari U.** A distributed operational secamtic for CSS based on condition event system. *Acta Informatica.* **26** (1988) 59–91.
7. **Katoen J.-P.** Quatitative and Qualitative Extensions of Event Structures. PhD Thesis, Twente University (1996).
8. **MacLane S.** Categories for the Working Mathematician. GTM, Springer-Verlag, 1971
9. **Merlin P.M., Farber D.J.** Recoverability of communication protocols – implications of theoretical study. *IEEE Transactions on Communications,* **24(9) (**1976) 1036-1043
10. **Meseguer J., Montanari U., Sassone V.** Process versus unfolding semantics for Place/Transition Petri nets. *Theoretical Computer Science* **153,** (1996) 171–210.
11. **Meseguer J., Montanari U.** On the Semantics of Petri Nets. *Lecture Notes in Computer Science* **630,** (1992) 286–301.
12. **Schneider S., Davies J., Jackson D.M., Reed G.M., Reed J.M., Roscoe A.W.** Timed CSP: theory and practice. *Lecture Notes in Computer Science* **600** (1991) 640–675.
13. **Winskel G.** Event structures. *Lecture Notes in Compiter Science* **255**, (1987) 325–392