

Методы и средства решения задач оптимизации этапа размещения при проектировании систем и сетей

Мирослав Хайдер

Жешувский Политехнический Институт, 35-959 Rzeszów, ul. W.Pola 2, Pologne, факс: +48-17-865-12-60, телефон: +48-17-865-11-06, E-mail: mhajder@prz.rzeszow.pl

В работе рассматриваются вопросы проектирования этапа размещения узлов в компьютерной сети. Анализуются многоуровневые системы, в частности: дерево/полносвязная сеть, дерево/центральный узел и др. Описывается структура сети, определяются шаги итерационного процесса проектирования, приводятся модели сети, предназначенные для проведения процесса проектирования. Вопросы повышения качества проектирования решаются на основе объединения отдельных шагов проектирования. Для решения проектной задачи предлагается новый подход, основанный на разбиении множества внешних условий на области наиболее эффективного применения отдельных объектов, а также на выборе оптимальных параметров каждого из объектов единой системы.

1. Введение

Важнейшим направлением развития вычислительных систем являются вопросы распараллеливания преобразования информации. В настоящее время вместо суперкомпьютеров появились мультикомпьютерные вычислительные системы, связанные между собой высокоскоростными каналами передачи информации (ВКПИ). При этом задачей ВКПИ является не только передача данных, связанных с вычислительным процессом. На сегодняшний день они выполняют также задачи характерные для систем связи, в частности, ВКПИ используются для передачи звука, образов, групповой связи (видео- и аудио-конференций). Выполнение данного класса услуг предполагает использование систем передачи нового качества, основанных на специализированных коммуникационных протоколах.

Функциональное объединение телекоммуникационных и компьютерных сетей позволяет понизить стоимость проектирования, построения и эксплуатации вычислительных систем. Кроме того, широкое использование в телекоммуникационных сетях цифрового представления различных видов информации позволяет использовать для передачи одни и те же каналы и устройства. Объединение сетей обоих типов понижает также управленческие расходы: администратор, использующий одну программу, может одновременно управлять передачей данных другого типа.

Однако объединение телекоммуникационных и компьютерных сетей требует значительного увеличения пропускной способности и надежности каналов связи. Так передача звука и образов особо чувствительны к потерям пакетов, что определяет дополнительные требования к надежности каналов связи. Требования к задержкам передачи, предъявляемые телекоммуникационными и компьютерными сетями весьма противоречивы. Сети, связывающие вычислительные устройства, особо чувствительны к увеличению задержек, и их значение не должно превышать нескольких миллисекунд. В тоже время телекоммуникационные сети не очень чувствительны к задержкам и их значение может достигать сотен миллисекунд.

Для выполнения рассмотренного уровня требований по отношению к скорости и степени надежности передачи необходимо предусмотреть следующие меры:

1. Большинство современных сетей имеет многоуровневую, иерархическую, структурную организацию. Увеличение количества уровней упрощает задачи построения сетей, но ухудшает их временные характеристики. В этой связи в высокоскоростных сетях целесообразно уменьшать количество уровней при одновременном использовании виртуальных каналов связи.
2. Применение новых физических сред передачи. Современные сети передачи в значительной мере основаны на использовании электрических сигналов. Ввиду общеизвестных ограничений построение на их основе высокоскоростных каналов связи, рассчитанных на длинные дистанции невозможно [1]. Однако эта задача решается на основе применения многоканальных оптических связей с прозрачной организацией.
3. Улучшением качества процесса проектирования. Вычислительная сложность процесса проектирования сетей больших размеров чрезвычайно велика. Поэтому проектный процесс либо разбивается на отдельно решаемые фрагменты, либо проводится приближенным образом. Все это приводит к понижению качества проектирования. Таким образом, требуется создание новых методов и средств проектирования, применение которых позволит оптимизировать процесс проектирования [2], [3].

В работе рассмотрены вопросы оптимизации топологических организаций на основе ограничения количества уровней иерархии, предложены методы и средства проектирования. Работа является частью исследований, посвященных созданию и развитию высокоскоростных параллельных вычислительных систем.

2. Архитектура сетей связи

С целью улучшения параметров современных гипертекстовых систем связи целесообразно уменьшать количество уровней иерархической структуры. Их количество должно учитывать противоречивые требования,

с одной стороны, уменьшение задержек передачи данных и, с другой стороны, упрощение процедур проектирования и эксплуатации сети. Количество уровней современных сетей приближается к десяти [4]. Для максимального уменьшения задержек, при одновременном сохранении ее зональной архитектуры сеть должна состоять из трех уровней: ядра сети, сети доступа и пользовательского уровня [4]. Сеть доступа (СД) объединяет информацию, пересылаемую между пользовательскими узлами. Связь между СД и ядром сети (ЯС) может быть либо однократной (для сетей с низкой стоимостью), либо многократной (для сетей с высокой надежностью). СД обычно формируется на основе использования таких топологий как дерево, звезда и др. Второй элемент высокоскоростных сетей связи ЯС объединяет трафики, пересылаемые между элементами, присоединенными к сетям доступа. Для его реализации чаще всего применяются такие топологические организации как: полносвязная сеть, звезда, кольцо и др. В дальнейшем для обозначения топологической организации сети связи будем использовать запись вида *топология сети доступа/топология ядра сети*. Например, запись *дерево/полносвязная сеть* означает, что СД построена на основе топологии дерева, а ЯС на основе полносвязной сети. Пример такой сети представлен на рис.1.

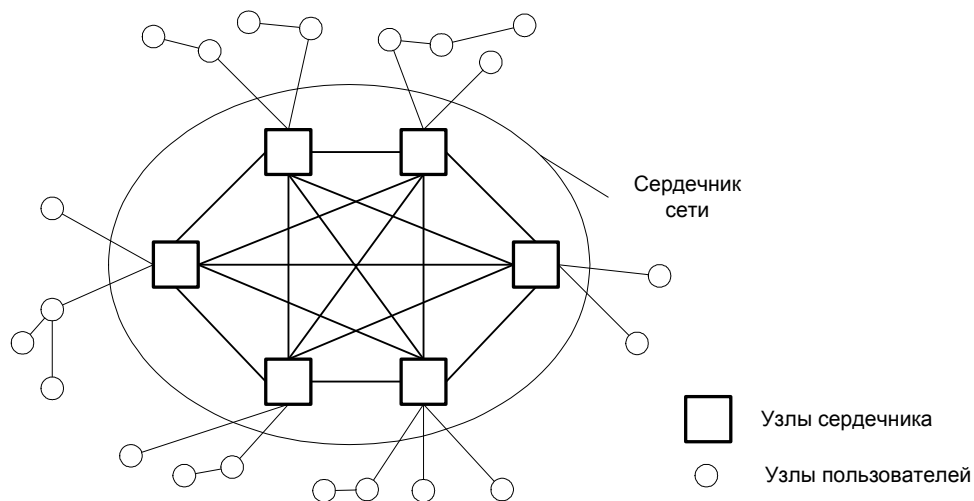


Рис. 1. Топологическая организация типа дерево/полносвязная сеть.

Сеть, представленная на рис.1, имеет иерархическую организацию. Верхний уровень образует ЯС, в данном случае это полносвязная сеть. Нижний уровень СД представляется здесь в виде древовидной структуры. К преимуществам использования ЯС следует отнести: возможность создания и использования высокоскоростной платформы переключения, упрощение вопросов управления в системе, возможность создания виртуальных каналов связи, упрощение проблем распределения ресурсов, выравнивания нагрузок, отказоустойчивости.

Альтернативной архитектурой является сеть, в которой ЯС заменяется центральным узлом. В сети с такой организацией вопросы проектирования и управления значительно упрощаются. Однако требования к центральному узлу здесь оказываются чрезвычайно высокими. Пример сети с такой организацией представлен на рис.2.

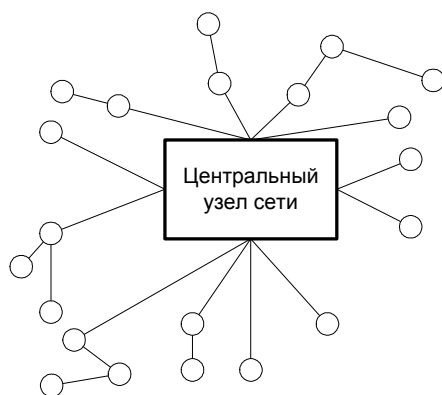


Рис. 2. Топологическая организация типа дерево/центральный узел.

Организация высокоскоростных сетей связи с использованием трехуровневых архитектур приводит к значительному повышению эффективности передачи потоков сообщений. Однако получаемые при этом результаты часто оказываются недостаточными для эффективной передачи гипертекстовой информации. Поэтому при создании высокоскоростных каналов передачи необходимо использовать возможности новых физических

сред передачи. При этом значительный интерес представляет построение гибридных сетей, в которых ЯС выполняется в виде многоканальной оптической сети, а СД на основе классической среды основанной на электрических сигналах. Гибридную архитектуру связей особо целесообразно применять в сетях с ЯС в виде полностью либо регулярной сети. При этом особую роль играет процесс проектирования топологии.

В процессе проектирования системы связей следует учитывать такие факторы как:

1. Допустимое количество узлов, образующих ЯС. В частном случае может использоваться только один центральный узел.
2. Ограничения на размещение узлов ЯС. В реальной сети локализация узлов не произвольна, их размещение ограничивается коммерческими причинами, правами собственности, техническими условиями и др.
3. Показатель производительность/стоимость некоторых узлов сети. Пропускная способность сверхскоростных оптических переключателей превышает 300 Пб/с. Однако, их высокая стоимость существенно ограничивает их применение. Поэтому для построения ЯС чаще всего используется терабитное оборудование, что для гипертекстовых применений может оказаться недостаточным.
4. Способ подключения пользователей к ЯС. Пользовательские узлы с помощью СД группируются в связную структуру и присоединяются к ЯС двухточечным каналом связи. Это понижает стоимость оборудования ЯС, но одновременно возрастают требования к каналам передачи, и понижается надежность связей. С другой стороны, минимизация размера пользовательских групп (тем самым рост их количества) приводит к увеличению числа портов ЯС при одновременном уменьшении требований к пропускной способности каналов.

Проектирование архитектуры связи компьютерных сетей это, как правило, обычно итерационный процесс. Его первый шаг связан с определением количества узлов ЯС и их размещением и отождествлением пользовательских узлов с конкретными узлами СД. Второй шаг связан с проектированием СД, третий с определением архитектуры ЯС. Итерационные методы основаны на предположении, что все три проектные проблемы могут решаться независимо. Это позволяет уменьшить сложность процедуры проектирования, однако качество проекта при этом оставляет желать лучшего. Можно доказать [3], что суммарная вычислительная сложность трех независимых проектных процедур всегда ниже сложности одной процедуры, включающей в себя все три шага проектирования. С точки зрения эффективности функционирования создаваемой сети интересным является частичное объединение шагов проектирования. В частности следует рассмотреть объединение этапов проектирования СД и ЯС. Объединение всех трех шагов может привести к NP-полной задаче [5].

Отдельной проблемой, решение которой ставится перед проектантом, является выбор целевой функции. Чаще всего в качестве цели проектирования рассматривается либо создание сети с минимальной стоимостью, либо создание сети с минимальными задержками передачи информации [6], [7].

3. Постановка задачи проектирования

Размещение узлов это комбинаторная проблема характерна для проектирования сетей связи. В процессе ее решения следует учитывать пропускные способности узлов ЯС, однако тогда вычислительная сложность задачи довольно высока. Можно ее уменьшить, пренебрегая пропускной способностью узлов ЯС. В обоих случаях решение проектной задачи сводится к такому определению связей, чтобы их стоимость была минимальной. Альтернативным способом решения проблемы размещения является определение p -медиан [8], [9].

Пусть существует связный ненаправленный граф $G(V, E)$, где V – множество вершин графа, $|V| = n$; E – множество ребер графа, $|E| = m$. Каждой из вершин графа припишем вес w , для вершины v определяемый как $w(v)$. Любое ребро описывается длиной l , которая для e -того ребра выражается как $l(e)$. Пусть $X_p = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ является подмножеством p узлов графа G . Введем понятие расстояния между вершиной графа G и подмножеством X_p , которое дальше будем записывать как $d(v, X_p)$. Его значение выражается формулой:

$$d(v, X_p) = \min_{1 \leq i \leq p} \{d(v, x_i)\},$$

где: $d(v, x_i)$ – длина кратчайшего пути между вершинами v и x_i в графе G .

Для любого подмножества $X_p = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ вершин графа G определим значение:

$$H(X_p) = \sum_{v \in V} w(v) d(v, X_p). \quad (1)$$

Тогда p -медианой графа G называем множество X_p^* , для которого

$$H(X_p^*) = \min_{X_p \in G} \{H(X_p)\}. \quad (2)$$

Размещение центрального узла сети определяется на основе выражения (2). На практике вес $w(v)$ вершины определяет расходы на построение и размещение узла сети, а расстояние $d(v, X_p)$ между вершиной v и множеством X_p соответственно используется для представления стоимостных характеристик каналов связи. Выражение (1) представляет собой функцию стоимости, зависящую от выбора узла v , причем нет явной связи между стоимостью и выбором узлов составляющих X_p . Кроме того, решение здесь достигается для заданного количества узлов p , что не характерно для задач размещения узлов в системе связи. Предложенный метод эффективно используется исключительно при определении размещения узлов ЯС.

Рассмотрим размещения узлов на основе методов, не учитывающих пропускных способностей используемого оборудования для двухуровневых сетей, в которых отсутствует СД, а пользовательские узлы подключаются непосредственно к ЯС. Пусть N это множество пользовательских узлов, а M – множество, описывающее количество и размещение узлов ЯС. Пользовательские узлы заранее приписаны к конкретным узлам ЯС. В дальнейшем используются следующие обозначения: C_{ij} – стоимость присоединения i -того пользовательского узла к j -ому узлу ЯС; F_j – полная стоимость размещения j -ого узла, включающая расходы на покупку оборудования, размещение узла и др. Тогда каноническое представление процедуры проектирования можно записать как:

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in M} C_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in M} F_j y_j \rightarrow \min, \quad (3)$$

где: x_{ij} определяет соотношение между i -тым пользовательским узлом и j -ым узлом ЯС. Значение $x_{ij} = 1$ если i -тому пользовательскому узлу назначен j -ый узел ЯС, в противном случае $x_{ij} = 0$. Значение y_j устанавливает связь между узлами и их локализацией. Если в j -ой локализации размещен узел то $y_j = 1$, в противном случае $y_j = 0$. Для правильной работы процедуры необходимо выполнение условий:

$$\sum_{j \in M} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in N; \quad (4)$$

$$x_{ij} \leq y_j \quad \forall i \in N, j \in M; \quad (5)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i \in N, j \in M; \quad (6)$$

$$y_j \in \{0,1\} \quad \forall j \in M. \quad (7)$$

Выражения (4) и (6) гарантируют подключение пользовательского узла исключительно к одному узлу ЯС. Благодаря выражению (5) пользовательский узел можно присоединить только к размещенному узлу ЯС. В проектной процедуре размещение узла доступа заключается в его помещении во множество M , на практике это снабжение узла соответствующем оборудованием.

Предложенная процедура выполняет исключительно планирование размещения, вопросы проектирования СД и связей ЯС здесь не решаются. Она может использоваться также для определения способов присоединения СД к узлам ЯС. Разделение процедур размещения узлов и проектирования топологии целесообразно по двум основным причинам. Во первых, это позволяет уменьшить вычислительную сложность проектирования в целом. Во вторых, объединенная проектная процедура сильно зависит от проектируемой топологии – для различных топологических организаций требуются различные процедуры проектирования.

В качестве примера рассмотрим проектирование сети с организацией звезда/звезда, основанной на центральном узле. Тогда сеть состоять будет из трех уровней иерархии: пользовательского уровня, уровня СД и уровня ЯС. Так как СД имеет звездообразную организацию, вместо физической СД используются переключатели, присоединенные непосредственно к узлам ЯС. С целью улучшения качества проектирования в стоимости учтем дополнительные расходы функционирования узлов СД. Заметим, что если два пользовательских узла присоединены к одному и тому же узлу СД (переключателю) в процедуре проектирования следует учитывать исключительно пропускную способность данного узла, при этом остальные узлы СД не будут нагружаться. Если информационный поток протекает между пользовательскими узлами, подключенными к различным узлам СД, тогда анализируемый трафик следует учитывать при нагрузке всех промежуточных узлов СД. Таким образом, учет нагрузки узлов позволяет повысить точность процесса моделирования. Предположим, что стоимость пересылки потока единичной величины для узла ЯС равна C и S соответственно для узла СД. Пусть трафик между пользовательскими узлами i и k будет равен t_{ik} . Тогда полный трафик t_i , инцидентный i -тому узлу определяется как:

$$t_i = \sum_{k \in N} t_{ik} + \sum_{k \in N} t_{ki}. \quad (8)$$

Количество узлов ЯС, к которым можно приписать i -тый узел ограничено и определяется множеством M_i . Если к рассматриваемому узлу ЯС подключается одновременно два узла СД, обозначаемые как i и k , тогда соответствующее им множество M_{ik} узлов будет равно произведению множеств M_i и M_k , т.е. $M_{ik} = M_i \cap M_k$. Учитывая вышесказанное, выражение (3) преобразуется к виду:

$$\sum_{i \in N} t_i \sum_{j \in M_i} C_{ij} x_{ij} - (2C - S) \sum_{i \in N} \sum_{k \in N} t_{ik} \sum_{j \in M_{ik}} x_{ij} x_{kj} + \sum_{j \in M} F_j y_j \rightarrow \min . \quad (9)$$

Для уменьшения вычислительной сложности в предложенных методах размещения не учитываются пропускные способности узлов. Такой подход допускается в связи с чрезвычайно высокой эффективностью (превышающей 300Пб/с) оптических переключателей, преимущественно используемых в узлах ЯС. Однако не все современные сети строятся в виде прозрачных оптических структур. Так как пропускная способность электрических устройств значительно ниже, вероятно перегрузка узлов, а в процессе проектирования целесообразно учитывать нагрузочные параметры используемого оснащения. Рассмотрим каноническое представление задачи проектирования, в которой учтена пропускная способность узлов.

Пусть N это множество пользовательских узлов. Для любого пользовательского узла $i \in N$ частота поступления создаваемых запросов равна d_i . Множество допустимых локализации узлов ЯС определяет множество M . Для любого $j \in M$ возможно размещение узла ЯС с пропускной способностью Q_j . Целью проектной процедуры является размещение узлов ЯС и назначение им пользовательских узлов. При этом стоимость размещения и назначения должна быть была минимальной, а пропускная способность достаточной для обслуживания поступающих запросов. Таким образом, проблема размещения, учитывающая пропускные способности узлов, представляется выражением:

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in M} C_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in M} F_j y_j \rightarrow \min , \quad (10)$$

при условиях:

$$\sum_{j \in M} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in N , \quad (11)$$

$$\sum_{i \in N} d_i x_{ij} \leq Q_j y_j \quad \forall j \in M , \quad (12)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i \in N, j \in M , \quad (13)$$

$$y_j \in \{0,1\} \quad \forall j \in M . \quad (14)$$

Выражение (10) определяет суммарные расходы на организацию узлов ЯС и назначение им пользовательских узлов. Выражения (11) и (13) гарантируют подключение произвольного пользовательского узла исключительно к одному узлу ЯС. Выражение (12) разрешает подключение i -того пользовательского узла к j -му узлу сердечника только тогда, когда j -ый узел размещен, а его производительность достаточна для обслуживания создаваемых им запросов.

Альтернативное решение проблемы проектирования получаем на основе замены выражения (12) последовательностью выражений:

$$\sum_{i \in N} d_i x_{ij} \leq Q_j \quad \forall j \in M , \quad (15)$$

$$x_{ij} \leq y_j \quad \forall i \in N, j \in M . \quad (16)$$

Предложенные алгоритмы используется в качестве первого шага процедуры проектирования компьютерных сетей. Если этап размещения и назначения узлов свяжем с этапом топологического проектирования сети доступа, качество проектирования улучшится, а процедура значительно усложнится, в частности возрастает количество критериев проектирования.

Для решения проблем, описанных выражениями (3), (9), (10), можно использовать классические методы, в частности, метод ветвей и границ, эвристику релаксации Лагранжа и др. Однако, эти методы часто не приносят ожидаемых результатов. Во первых, в ряде случаев их сходимость невысока, результатом чего является высокая вычислительная сложность. Во вторых, ряд параметров проектирования не имеет точных числовых характеристик качества, либо эти характеристики изменяются, например, со временем. К таким параметрам можно отнести: затраты на эксплуатацию узлов СД и ЯС, стоимость оснащения узлов, частоту появления пользовательских запросов. Поэтому требуется создание нового метода решения (3), (9), (10) который позволит внести в процесс проектирования определенный уровень неопределенности, благодаря чему вместо одного оптимального решения будем получать множество допустимых решений.

4. Многоцелевой подход к решению проблемы размещения

Предлагается подход к созданию системы поддержки и принятия решений при проектировании размещения узлов системы связи с учетом совмещения отдельных шагов процедуры проектирования. Суть предлагаемого многоцелевого подхода к оптимальному проектированию сетей связи сводится к выделению множества внешних условий и многокритериальной оптимизации многоэлементного проектного решения на допустимом множестве.

Применительно к топологии связей, как к элементу некоторой системы, множество внешних условий описывает заданную с определенной степенью детализации совокупность операций, выполняемых такой системой объектов, многоэлементность решения – собственно систему однотипных и разнотипных объектов, а множество решений – допустимое множество параметров системы технических объектов. Применительно к процессу проектирования множество внешних условий описывает различного рода неопределенности, устраняемые или неустраняемые в процессе проектирования, а многоэлементность решения – конкурентоспособные варианты системы связей.

Оптимизация заключается в разбиении множества внешних условий на области наиболее эффективного применения отдельных (разнотипных) объектов, а также – в выборе оптимальных параметров каждого из объектов единой системы. При этом оптимальность понимается в векторном смысле, т.е. как совокупность множества количества и качественных критериев, отражающих отдельные аспекты эффективности проектируемой сети связей. Для этого в предлагаемом подходе введено множество принципов оценки решений в условиях неопределенности исходных данных, моделей, заданий и критериев. На основе ряда аксиом описаны свойства этого множества, позволяющие вычислить показатель эффективности решения с учетом множества неопределенности. При этом интерпретация совокупности критериев в виде неопределенности (нечеткости) способов оценки эффективности позволяет свести проблему выбора решений к оптимизации многоэлементного решения на основе методов оптимальных покрытий.

5. Математические модели

Введем в рассмотрение внешнее множество системы X , множество допустимых вариантов решений Y и многоэлементную стратегию $A = \{y_j \in Y\}_{j=1, \dots, m}$. Определим на X целочисленную распределяющую функцию, принимающую значения $1, 2, \dots, m$. Тогда каждому центру $y_j \in Y$, $j = 1, 2, \dots, m$ сопоставляется в X его область Дирихле E_j , в точках которой распределяющая функция принимает значение, равное j , т.е.

$$E_j = \{x \in X / E(x) = j\}, j = 1, \dots, m. \quad (17)$$

Пусть эффективность проектируемой топологии с параметрами y при внешних условиях x характеризуется функцией локальной эффективности $f(x, y)$.

Полагаем, что распределяющая функция сопоставляет каждому элементу $x \in X$ обслуживающий его элемент $y_{E(x)} \in Y$. Тогда эффективность проектного решения, определяемого параметрами y и распределяющей функцией $E(x)$, характеризуется выражением $f(x, y_{E(x)})$. Поскольку проектируемой топологии предстоит функционировать при любых условиях $x \in X$, необходимо оценить эффективность его функционирования *в целом*, на всем внешнем множестве. Это можно сделать двумя путями. Если известна частота $p(x)$ реализации различных внешних условий $x \in X$, то говорим об интегральной многоцелевой системе (ИМС), эффективность F которой задается формулой:

$$F(A, E(x)) = \int_{x \in X} p(x) f(x, y_{E(x)}) dx \quad (18)$$

Если частота $p(x)$ неизвестна либо требуется обеспечить максимальную эффективность проектируемого объекта именно в наиболее неблагоприятных условиях, комплексная эффективность его функционирования выражением:

$$F(A, E(x)) = \min_{A, E(x)} f(x, y_{E(x)}) \quad (19)$$

В этом случае говорим о гарантирующей многоцелевой системе (ГМС). При этом число элементов стратегии A предполагается заданным.

В предложенной модели функция локальной эффективности и, соответственно, критерий F – скаляры. Безусловно, этого недостаточно для оптимизации топологических объектов, эффективность которых многопланова и соответственно требует для своего описания целого набора характеристик, как числовых, так и качественных. Это приводит к задаче многокритериальной оптимизации или, более широко, к задаче принятия решений в условиях неопределенности. В этой области широко известны как классические, так и современные методы. Однако их анализ привел к необходимости разработки нового метода, получившего название метода OPNEO. От общеизвестных методов он отличается тем, что не требует непосредственного задания информа-

ции, снимающей неопределенность. Взамен этого метод OPNEO, исходя из небольшого количества аксиом (монотонности, устойчивости, гладкости), позволяет математически описать все множество допустимых способов учета неопределенности и выделить в нем наиболее представительный набор типовых способов учета неопределенности (оптимальную ε -сеть), который и используется для принятия решений.

6. Способы учета неопределенности

Под способом учета неопределенности (СУН) будем понимать правило, однозначно сопоставляющее любому подмножеству $X_A \subset X$ с определенной на нем функцией $f(x)$ (обобщенными потерями) некоторое число $F(X_A)$ (n -обобщенные потери).

Функцию $f(x)$ будем считать нормированной, т.е.: $x \leq f(x) \leq 1$, $x \in X$. Перечислим требования, которым должны удовлетворять допустимые способы учета неопределенности.

Монотонность. Если n -обобщенные потери на одном подмножестве больше, чем на другом, то при любом допустимом способе учета неопределенности добавление к ним общего подмножества не меняет характера этого соотношения, т.е. если $F(X_1) > F(X_2)$, то $\forall X_3 \subset X \quad F(X_1 \cup X_3) > F(X_2 \cup X_3)$, при любых $X_1, X_2 \subset X$.

Устойчивость. Если, не нарушая других требований к допустимым способам учета неопределенности, изменить значения n -обобщенных потерь, рассчитываемых по некоторому допустимому способу учета неопределенности, на бесконечно малую величину, то получившийся при этом другой способ учета неопределенности также должен быть допустимым.

Теорема 1. Пусть существует так называемая функция построения $\Phi(u, v)$, для $0 \leq u, v \leq 1, 0 \leq \Phi \leq 1$. Если X_1, X_2 – произвольные непересекающиеся подмножества множества X , то справедливо равенство $F(X_1 \cup X_2) = \Phi(F(X_1), F(X_2))$, т.е. n -обобщенные потери для множества $X_1 \cup X_2$ зависят лишь от n -обобщенных потерь для составляющих его множеств X_1 и X_2 .

Следствие. Функция построения симметрична и ассоциативна относительно своих аргументов: $\Phi(u, v) = \Phi(v, u)$; $\Phi(u, \Phi(v, z)) = \Phi(v, \Phi(u, z))$.

Наложим на допустимые СУН еще два естественных условия. Условие универсальности состоит в том, что функция построения определена для любых $u, v \in [0, 1]$. Условие гладкости состоит в том, что функция построения на $[0, 1] \times [0, 1]$ имеет непрерывные частные производные 1-го порядка.

Используя все наложенные выше условия, можно установить ряд дополнительных свойств допустимых способов учета неопределенности.

Теорема 2. Существует такое число $l \in [0, 1]$, что $\forall u \in [0, 1]$ справедливо выражение: $\Phi(u, l) = u$.

Теорема 3. Пусть $G(l)$ дифференцируемая, строго монотонно возрастающая на отрезке $[0, 1]$ функция – так называемая порождающая функция. Тогда для $\forall u \in [0, 1]$ и $\forall v \in [0, 1]$ выполняется зависимость:

$$G(\Phi(u, v)) = G(u) + G(v) - G(l).$$

Следствие. Множество S способов учета неопределенности, удовлетворяющих перечисленным выше свойствам, описывается множеством порождающих функций, удовлетворяющих условиям $G(0) = 0, G(l) = l$.

Теорема 3 является необходимым условием для функции построения. По ее подобию доказывается аналогичное достаточное условие. Из нее выводится общая формула для расчета n -обобщенных потерь для допустимой СУН:

$$\begin{cases} F(X, y) = G^{-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G(f(x_i, y)) \right) & \text{для } X = \{x_i\}, i = 1 \dots N \\ F(X, y) = G^{-1} \left(\frac{1}{S_X} \int_{x \in X} G(f(x, y)) dx \right) & \text{для } X \text{ область конечномерного Евклидова пространства,} \\ & S_X - \text{мера области } X \end{cases}$$

Развитый подход позволяет ввести адекватную количественную оценку таких расплывчатых понятий как *более важно* и *менее важно*. Обозначим через k число уровней значимости качественного критерия и пронумеруем их в порядке возрастания значимости номерами $s = 1, 2, \dots, k$. Тогда переход к адекватной количественной оценке, т.е. к некоторому количественному критерию, принимающему числовое значение F_s , когда исходный критерий находится на уровне s , производится по формуле $F_s = 3^s - 1/3^k - 1$.

Заменим бесконечное множество допустимых способов учета неопределенности, описываемых всевозможными порождающими функциями $G(t)$, конечным набором элементов, достаточно полно представляющим

все множество. Если определить на нем расстояние $\rho(G_1, G_2)$ между любыми двумя порождающими функциями $G_1(t)$, $G_2(t)$ достаточно естественным соотношением $\rho(G_1, G_2) = \int_0^1 (G_1(t) - G_2(t)) dt$, то эта задача сводится к построению оптимальной ε -сети. Ее численное решение получено для различного числа элементов ε -сети. Для практического использования выбран оптимальный типовой набор СУН, состоящий из 7 элементов. Для них получены удобные формулы вычисления n -обобщенных потерь в случае, когда эффективность задается вектором критериев $(\varphi^s)_{s=1, \dots, n}$.

Для наихудшего СУН $F = \max_{s=1, \dots, n} \varphi^s$, для наилучшего $F = \min_{s=1, \dots, n} \varphi^s$; для среднего ($K=1$), осторожного ($K=4$) и оптимистического ($K=0,25$) способов учета неопределенности:

$$F = \left[\frac{(n-1)!}{\prod_{i=1}^n (K+i)} \sum_{s=1}^n \frac{(\varphi^s)^{K+n-1}}{\prod_{i=1}^n (\varphi^s - \varphi^i)} \right]^{\frac{1}{K}},$$

а для релейного ($k=0,2$) и нивелирующего ($k=5$):

$$F_1 = 0,5 + \left[\frac{(n+1)!}{\prod_{i=1}^n (k+i)} \sum_{s=1}^n \frac{(\varphi^s - 0,5)^{k+n-1}}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^n (\varphi^s - \varphi^i)} \right]^{\frac{1}{k}}.$$

Использование типового набора СУН позволяет построить автоматизированную процедуру комплексной оценки эффективности многокритериальных альтернатив, моделирующую методы экспертных оценок.

7. Алгоритм решения

В [10], [11], [12] предложен целый ряд алгоритмов оптимизации МС. В дискретной постановке, типичной для достаточно сложных задач проектирования топологии, в которых число прорабатываемых вариантов решения конечно, наиболее универсальным является следующий алгоритм оптимизации МС, основанный к сведению задачи к булевому линейному программированию.

Будем для определенности полагать, что в задаче проектирования функция локальной эффективности приведена к виду затрат, т.е. решается задача на минимум. Введем булевы переменные u_j , x_{ij} , $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, p$, где i, j – количество элементов множеств X и Y соответственно. Переменные u_j показывают, какие элементы множества допустимых решений войдут в оптимальную стратегию, а элементы x_{ij} задают области Дирихле. Тогда система ограничений очевидна:

$$\sum_{j=1}^p x_{ij} = 1 \quad \text{для } i=1, \dots, n, \quad (20)$$

$$x_{ij} \leq u_j, \quad \text{для } i=1, \dots, n, \quad j=1, \dots, p, \quad (21)$$

$$\sum_{j=1}^p u_j = m. \quad (22)$$

где m – заданное количество элементов многоэлементной стратегии А. В случае ИМС критерий оптимальности определяется как:

$$F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (23)$$

где f_{ij} – значение функции локальной эффективности на i -тм и j -ым элементах множеств X и Y соответственно. В случае ГМС добавляется еще одно ограничение

$$F \geq f_{ij} x_{ij} \quad \text{для } i=1, \dots, n, \quad j=1, \dots, p, \quad (24)$$

а критерий оптимальности имеет вид

$$F \rightarrow \min . \quad (25)$$

В задаче булевого линейного программирования, к которой мы свели оптимизацию МС, $np + p$ переменных и $pn + p$ ограничений для ИМС и $2pn + p$ ограничений для ГМС. Если задача проектирования содержит сотни вариантов решений и возможных внешних условий, размерность задачи линейного программирования оказывается достаточно большой, что требует значительных вычислительных ресурсов.

Для ГМС можно предложить иной алгоритм оптимизации, при котором размерность решаемых задач булевого линейного программирования существенно уменьшается (всего p булевых переменных и n ограничений). Зададимся величиной F^* и сформируем матрицу $\|a_{ij}\|_{i=1,\dots,n, j=1,\dots,p}$ соотношением $a_{ij} = 1$ при $f_{ij} \leq F^*$, $a_{ij} = 0$ в противном случае. Тогда ограничения:

$$\sum_{j=1}^p a_{ij} u_j \geq 1, i = 1, \dots, n \quad (26)$$

гарантируют, что оптимальная стратегия обслужит каждый элемент множества X с величиной критерия, не большей F^* . Критерий:

$$F = \sum_{j=1}^p u_j \rightarrow \min \quad (27)$$

устанавливает требование, чтобы это достигалось при минимальном числе элементов стратегии A , т.е. решается задача оптимизации, взаимная с исходной. Решая серию таких задач при различных значениях F^* , можно решить и непосредственно исходную задачу.

8. Итоги и дальнейшие работы

Предложенный метод использовано при проектировании топологических организаций Польского Оптического Интернета PIONIER. В процессе проектирования крупномасштабной сети появился целый ряд неопределенностей. При этом проведение проектного процесса требовало определения значений неопределенных параметров. Использование метода позволило получить множество полноценных решений. Результаты проектного процесса описаны в [13], [14], [16].

В дальнейшем будут проводиться исследования в направлении:

1. Типизации способов учета неопределенности,
2. Совершенствования математической модели оценки параметров и принятия решений в условиях неопределенности,
3. Разработки методов решения задач оптимизации для кластерных систем,
4. Практического использования разработанных алгоритмов.

Одновременно с теоретическими исследованиями ведутся работы по разработке математического обеспечения использующего предложенные алгоритмы. Для написания программ используется пакет Maple.

9. Литература

1. Hartman D.H.: Optical Interconnection Technology in the Telecommunications Network. Bell Communication Research, Morristown, New Jersey, 1986.
2. Hajder M., Bolanowski M., Paszkiewicz A.: Design of improvement efficiency of multi-channel optical communication system criteria optimization. Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska – Informatica. Lublin, p. 271-276, vol. 1, 2003
3. Hajder M., Mazurek M., Dymora P.: Designing of multichannel optical communication systems topologies criteria optimization. Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska – Informatica. Lublin, p. 277-284, vol. 1, 2003
4. Spohn D.L.: Data Network Design. Second Edition. McGraw-Hill, New York, 1997.
5. Pikul H.: Efficient Algorithms for the Concentrator Location Problem. Computers and Operations Research, vol. 14, 1987, pp. 197-208.
6. Hajder M., Paszkiewicz A., Bolanowski M.: Rozmieszczanie zasobów w klastrowych sieciach komputerowych. Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, seria Informatyka: s. 31-40, z.1, 2003.
7. Hajder M., Paszkiewicz A., Bolanowski M.: Planowanie rozmieszczenia zasobów w rozproszonym systemie obliczeniowym. Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, seria Informatyka: s. 33-42, z.2, 2003.
8. Hakimi S.L.: Optimum Distribution of Switching Center in Communications Network and Some Related Theoretic Problems. Operations Research, vol. 13, 1965, pp. 462-475.
9. Hakimi S.L.: Optimal Locations of Switching Centers and the Absolute Centers and Medians of a Graph. Operations Research, vol. 12, 1964, pp. 450-459.
10. Пиявский С.А., Брусков В.С., Хвилон Е.А. Оптимизация параметров многоцелевых летательных аппаратов. Машиностроение, Москва, 1975.
11. Seidler J., Badach A., Molisz W.: Metody rozwiązywania zadań optymalizacji. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1980.
12. Брусков В.С., Баранов С.К.: Оптимальное проектирование летательных аппаратов – многоцелевой подход. Машиностроение, Москва, 1989.
13. Hajder M., Dymora P., Mazurek M.: Projektowanie topologii transparentnych sieci optycznych. Konferencja: Polski Internet Optyczny: technologie, usługi i aplikacje; Poznań 2002, s.183-195.
14. Hajder M., Mazurek M., Dymora P.: Topologie wirtualne wielowęzłowych sieci rozległych. Konferencja: Polski Internet Optyczny: technologie, usługi i aplikacje; Poznań 2002, s.197-211.
15. Hajder M.: Wybrane aspekty projektowania i symulacji metropolitalnych sieci komputerowych. Krajowe Sympozjum Telekomunikacji. Bydgoszcz 1995, tom C, str. 272-280.