УДК 621.64.029

Залежність швидкості фільтрації газу від тиску в околах свердловин газоносних пластів

Ярослав П'янило[1], Петро Галій[2], Назарій Лопух[3], Галина П'янило[3]

[1] д. т. н., Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: pjanylo@cmm.lviv.ua
[2] ДК «Укртрансгаз» НАК «Нафтогаз України», Кловський Узвіз, 9/1, Київ, 01021, e-mail: pphaliy.utg@naftogaz.net
[3] Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: pjanylo@cmm.lviv.ua

Досліджено процеси фільтрації газу в пористих середовищах складної структури, зокрема, підземних сховищах газу, циліндричної форми за наявності зосереджених джерел і різних початкових і граничних умов. Зосередженими джерелами є робочі свердловини, через які відбирають або закачують газ у пласт підземного сховища. Отримані результати можна використати для дослідження фільтраційних властивостей околу свердловини, визначення її дебіту залежно від розподілу тиску. Останнє, своєю чергою, дає можливість розраховувати параметри роботи сховища в піковий період.

Ключові слова: моделювання фізичних процесів, фільтрація газу в пористих середовищах, швидкість газу.

Вступ. Підземні сховища газу (ПСГ) використовують, в основному, для ліквідації дисбалансу газу в періоди різкого збільшення його використання [1-4]. Робота сховища значною мірою (особливо в пікові періоди) визначається колекторськими властивостями пласту ПСГ — швидкістю акумуляції або віддачі газу. Робіт, які стосуються цієї тематики, у науковій літературі небагато. Це пояснюється як складністю отримання необхідних вхідних даних, так і складністю математичного моделювання процесів фільтрації в об'єктах такої структури [4]. Зауважимо, що відбір або закачування газу в сховища залежить від розподілу тиску в ньому, який, своєю чергою, визначає швидкість підтоку (відтоку) газу до (від) свердловини.

Метою роботи є знаходження розподілу тиску в пластах підземних сховищ газу та визначення на цій основі поля швидкостей руху газу для побудови алгоритмів визначення оптимальних режимних параметрів експлуатації сховища.

1. Формулювання задачі

Нехай $\Omega_3 \subset R^3$ — тривимірна область, яку займає пласт ПСГ. На Ω_3 задано множину точок (множину свердловин) із координатами $\{x_i, y_i\}, i=\overline{1,n}$, та значення тисків $p\left(x_i, y_i, z_i, t_0\right)$ у цих точках у момент часу t_0. Розподіл тиску газу $p(x,y,z,t)$ у пласті в нестаціонарному випадку описується нелінійним диференціальним рівнянням у частинних похідних [2, 4, 5]

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2010, вип. 12, 144-151

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_x h}{\mu\chi}\frac{\partial p^2}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k_y h}{\mu\chi}\frac{\partial p^2}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k_z h}{\mu\chi}\frac{\partial p^2}{\partial z}\right)=2\alpha_n mh\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\chi}\right)+4mhqp_{st}, \quad (1)$$

де k_u — проникність пласту в напрямі u, μ — динамічна в'язкість газу, а χ — коефіцієнт його стисливості, h — товщина пласту, а m — його пористість, α_n — коефіцієнт газонасиченості, q — густина відбору, p_{st} — значення атмосферного тиску в стандартних умовах (p_A = 0,1033 МПа, T_A = 293 K).

Необхідно знайти розв'язок $p(x,y,z,t)$ рівняння (1) за відомими значеннями $p(x_i,y_i,z_i,t_0)$. При цьому вимагаємо, щоб справджувалася умова балансу маси газу в сховищі

$$M=\int_V \rho dV,$$

де інтегрування проводиться по об'єму сховища V, M — маса газу в сховищі, ρ — густина газу. Якщо врахувати геометрію сховища та перейти від маси газу до його об'єму в стандартних умовах $Q_{зап}$, то останнє рівняння наближено можна записати таким чином

$$Q_{зап}=\frac{T_{am}}{P_{am}}\int_0^S\int_0^h\frac{p\,m}{T\chi}dS\,dh\approx\frac{T_{cm}}{p_{cm}}\frac{\overline{p}}{\overline{T}\,\overline{\chi}}\overline{m}\,\overline{h}\,S.$$

Тут F — площа пласту сховища, а рискою зверху відзначено усереднені значення відповідних величин.

Аналіз функціонування сховища показує, що ефективність використання свердловин, особливо в піковий період, визначається розподілом тиску в їх околі [1, 4, 5]. Тому доцільно детальніше вивчати саме область пласту навколо свердловини. Для цього рівняння розподілу тиску (1) зручно записати в циліндричних координатах без врахування густини відбору

$$\frac{\partial P}{\partial\tau}=\kappa\left(\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 P}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right). \quad (2)$$

Тут z — вертикальна координата,

$$P=p^2,\quad \kappa=\frac{p_0}{D},\quad \tau=\frac{p_2}{p_0}t+\left(1-\frac{p_2}{p_0}\right)\frac{1-e^{-\beta t}}{\beta},\quad D=\frac{m\mu}{nk},\quad \beta=\frac{p_0 k\lambda_m^2}{2m\mu},$$

r — радіус-вектор, проведений із центру свердловини, p_2, p_0 — тиск на внутрішній границі області та його початкове значення. Якщо вісь кругового циліндра співпадає з віссю z, а початкові та граничні умови не залежать від координат θ та z, то рівняння (2) набуде вигляду

$$\frac{\partial P}{\partial\tau}=\kappa\left(\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r}\right).$$

У цьому випадку газ рухається перпендикулярно до осі циліндра. Ваговий дебіт свердловини G на довільній циліндричній поверхні, що знаходиться на віддалі r_0 від центру свердловини, обчислюємо за формулою [2]

$$G = \frac{\pi khg}{\beta\mu}\left[r\frac{dP}{dr}\right]_{r=r_0}.$$

Використовуючи співвідношення між газодинамічними параметрами

$$G = \rho qg = \rho\upsilon gS, \quad \upsilon = \frac{G}{\rho gS}, \quad p = \rho\chi RT \quad \left(\rho = \frac{p}{\chi RT}, \ \frac{1}{\rho} = \frac{\chi RT}{p}\right),$$

швидкість руху газу визначаємо так

$$\upsilon = G\frac{\chi RT}{pgS} = \frac{\pi khg}{\beta\mu}\frac{\chi RT}{pgS}\left[r\frac{dP}{dr}\right]_{r=r_0} = \frac{\pi kh}{\beta\mu}\frac{\chi RT}{pS}\left[r\frac{dP}{dr}\right]_{r=r_0}.$$

Тут S — площа поверхні, через яку проходить газ. Розподіл поля швидкості руху газу в пласті залежить від характеру відбирання (закачування) його зі (в) сховища(е). Розглянемо деякі часткові випадки.

Технологічні об'єкти, які задіяні в експлуатації сховища, є порівняно невеликі за розмірами. Часи виходу на усталений режим експлуатації для таких об'єктів є невеликі. Тому можна вважати, що за короткий час режим роботи сховища виходить на усталений.

2. Усталений рух газу в області свердловини

Нехай область пласту є обмежена вкладеними один в одного двома циліндрами зі спільною віссю, радіуси яких a та b ($a < b$). Розподіл тиску в цьому випадку буде описуватися рівнянням

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dP}{dr}\right) = 0, \qquad a < r < b. \tag{3}$$

Загальний розв'язок рівняння (3) є $P = A + B\ln r$, де A та B — сталі, які визначаємо з граничних умов. Розглянемо різні випадки граничних умов на поверхнях $r = a$ та $r = b$.

1. Нехай на поверхні $r = a$ підтримується тиск P_1, а на поверхні $r = b$ — тиск P_2. Тоді

$$P = \frac{P_1\ln(b/r) + P_2\ln(r/a)}{\ln(b/a)}.$$

Оскільки

$$\frac{dP}{dr} = \frac{-P_1(1/r) + P_2(1/r)}{\ln(b/a)} = \frac{P_2 - P_1}{r\ln(b/a)},$$

то ваговий дебіт буде постійний і дорівнюватиме

$$G = \frac{\pi khg}{\beta\mu}\left[r\frac{dP}{dr}\right]_{r=b} = \frac{\pi khg}{\beta\mu}\frac{P_2 - P_1}{\ln(b/a)}.$$

Швидкість газу в цьому випадку

$$\upsilon = \frac{\pi kh}{\beta\mu S}\frac{\chi RT}{\ln(b/a)}\frac{P_2 - P_1}{p}.$$

2. На поверхні $r = a$ підтримується тиск P_1, а на поверхні $r = b$ відбувається підтік газу із середовища з тиском P_2, тобто гранична умова має вигляд

$$\frac{dP}{dr} + \zeta(P - P_2) = 0,\ r = b.$$

Тут параметр ζ характеризує процес підтоку газу. Тоді розподіл тиску визначається так

$$P = \frac{P_1\left[1 + \zeta\ln(b/r)\right] + \zeta bP_2\ln(r/a)}{1 + \zeta b\ln(b/a)}.$$

Оскільки

$$\frac{dP}{dr} = \frac{P_1\left[-\zeta(1/r)\right] + \zeta bP_2(1/r)}{1 + \zeta b\ln(b/a)} = \frac{\zeta(bP_2 - P_1)}{r\left[1 + \zeta b\ln(b/a)\right]},$$

$$G = \frac{\pi khg}{\beta\mu}\left[r\frac{dP}{dr}\right]_{r=b} = \frac{\pi khg}{\beta\mu}\frac{\zeta(bP_2 - P_1)}{\left[1 + \zeta b\ln(b/a)\right]},$$

то

$$\upsilon = \frac{\pi kh}{\beta\mu S}\frac{\zeta\chi RT}{\left[1 + \zeta b\ln(b/a)\right]}\frac{bP_2 - P_1}{p}.$$

3. Нехай порожнистий циліндр поділено на n підобластей $(a_1, a_2), (a_2, a_3), \ldots.,$ (a_n, a_{n+1}) із коефіцієнтами провідності $k_1, \ldots, k_n$, а $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ — значення тисків газу на поверхнях $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$. Позначимо $\xi = G\beta\mu/(\pi hg)$.

Тоді виконуються співвідношення

$$P_2 - P_1 = \frac{\xi}{k_1}\ln\frac{a_2}{a_1},$$

$$P_3 - P_2 = \frac{\xi}{k_2}\ln\frac{a_3}{a_2},$$

…………

$$P_{n+1} - P_n = \frac{\xi}{k_n}\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Просумувавши відповідно ліві та праві частини, отримаємо

$$P_{n+1}-P_1=\xi\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i}\ln\frac{a_{i+1}}{a_i},\quad G=\frac{\pi hg}{\beta\mu}\frac{P_{n+1}-P_1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i}\ln\frac{a_{i+1}}{a_i}},\quad \upsilon=\frac{\chi RT}{pS}\frac{\pi h}{\beta\mu}\frac{P_{n+1}-P_1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i}\ln\frac{a_{i+1}}{a_i}}.$$

Отримані формули дають можливість визначати депресію тиску, ваговий дебіт і швидкість руху газу в циліндричній області пласту за відомими значеннями тиску на границях і різних значеннях коефіцієнта проникності в кожній підобласті циліндра.

3. Нестаціонарний рух газу в області свердловин

На поверхні $r = a$ підтримується тиск P_1, а на поверхні $r = b$ — тиск P_2, а початковий розподіл тиску задається формулою $f(r)$. В цьому випадку розв'язок вихідної задачі математичної фізики подамо у вигляді $P = P_s + P_n$, де $P_s=\left[P_1\ln\left(b/r\right)+\right.$ $\left.+P_2\ln\left(r/a\right)\right]/\ln\left(b/a\right)$ визначає усталений розподіл тиску між поверхнями, а другий складник розв'язку

$$P_n=\frac{\pi^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n^2J_0^2\left(a\alpha_n\right)}{J_0^2\left(a\alpha_n\right)-J_0^2\left(b\alpha_n\right)}\exp\left(-\kappa\alpha_n^2\tau\right)U_0\left(r\alpha_n\right)\int_a^b rf(r)U_0\left(r\alpha_n\right)dr-$$
$$-\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[P_2J_0\left(a\alpha_n\right)-P_1J_0\left(b\alpha_n\right)\right]J_0\left(a\alpha_n\right)U_0\left(r\alpha_n\right)}{J_0^2\left(a\alpha_n\right)-J_0^2\left(b\alpha_n\right)}\exp\left(-\kappa\alpha_n^2\tau\right).$$

Тут $U_0(ar)=J_0(ar)Y_0(ab)+J_0(ab)Y_0(ar)$, $J_i(x),Y_i(x)$ — функції Бесселя дійсного аргументу першого та другого роду порядку i відповідно,

$$\upsilon=\left\{\frac{P_2-P_1}{\ln\left(b/a\right)}+r\frac{\pi^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n^2J_0^2\left(a\alpha_n\right)}{J_0^2\left(a\alpha_n\right)-J_0^2\left(b\alpha_n\right)}\exp\left(-\kappa\alpha_n^2\tau\right)U_1\left(r\alpha_n\right)\times\right.$$
$$\times\int_a^b xf(x)U_0\left(x\alpha_n\right)dx-r\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[P_2J_0\left(a\alpha_n\right)-P_1J_0\left(b\alpha_n\right)\right]J_0\left(a\alpha_n\right)U_1\left(r\alpha_n\right)}{J_0^2\left(a\alpha_n\right)-J_0^2\left(b\alpha_n\right)}\times$$
$$\left.\times\exp\left(-\kappa\alpha_n^2\tau\right)\right\}\frac{\pi kh}{\beta\mu}\frac{\chi RT}{pS},$$

де

$$U_1\left(r\alpha_n\right)=-\alpha_n\left[J_1\left(a_nr\right)Y_0(ab)+J_0(ab)Y_1\left(a_nr\right)\right].$$

Якщо радіус зовнішнього кола S_0 дорівнює a, а радіус концентричного йому внутрішнього кола $\tilde{s}$ — b, то за граничних умови на зовнішній границі S_0 $\partial P/\partial r=0$ і $P=P_2\equiv const$ на внутрішній границі розв'язок рівняння (3) має вигляд [2]

$$P = P_2 - 2\left(P_0 - P_2\right)\sum_{m=1}^{\infty} D_m \exp\left(-\frac{p_0 \tau \lambda_m^2}{D}\right). \tag{4}$$

Тут $P = p^2$, $P_2 = p_2^2$, $P_0 = p_0^2$. Початковий розподіл тиску є сталий і дорівнює P_0. У рівності (4) позначено

$$D_m = \frac{\left(b\lambda_m\right) Z_1\left(b\lambda_m\right) Z_0\left(r\lambda_m\right)}{\left(a\lambda_m\right)^2 Z_0^2\left(a\lambda_m\right) - \left(b\lambda_m\right)^2 Z_1^2\left(b\lambda_m\right)},$$

$$Z_0\left(\lambda_m r\right) = J_0\left(\lambda_m r\right) + A_m N_0\left(\lambda_m r\right), \quad Z_1\left(\lambda_m r\right) = J_1\left(\lambda_m r\right) + A_m N_1\left(\lambda_m r\right),$$

$N_i\left(\lambda_m r\right)$ — функція Неймана порядку i, λ_m — корені рівняння

$$J_0(\mu x) N_1(x) - J_1(x) N_1(\mu x) = 0, \quad \mu = b/a, \quad a\lambda_m = x, \quad b\lambda_m = \mu x.$$

Ваговий дебіт свердловини за відомим розподілом тиску в області обчислюємо за формулою

$$G = \frac{4\pi nkhg\left(P_0 - P_2\right)}{\beta\left(n+1\right)\mu} \sum_{m=1}^{\infty} B_m \exp\left(-\frac{p_0 \tau \lambda_m^2}{D}\right),$$

де

$$B_m = \frac{2N_1^2\left(a\lambda_m\right)}{N_0^2\left(b\lambda_m\right) - N_1^2\left(a\lambda_m\right)}.$$

Швидкість руху газу визначається так

$$\upsilon = G\frac{\chi RT}{pgS} = \frac{\chi RT}{pS}\,\frac{4\pi nkh\left(P_0 - P_2\right)}{\beta\left(n+1\right)\mu} \sum_{m=1}^{\infty} B_m \exp\left(-\frac{p_0 \tau \lambda_m^2}{D}\right)\sqrt{2}.$$

У праці [1] досліджено особливості розрахунку пластового тиску згідно поданих вище результатів для однієї свердловини та постійних початково-граничних умов.

4. Неусталений радіальний рух газу до свердловини за наявності двох режимів фільтрації

Неусталений рух газу до свердловини розглядаємо як послідовну зміну стаціонарних станів. Область пласту вважаємо циліндричною з радіусом r_k та потужністю h. У центрі циліндра міститься свердловина. З огляду на малі швидкості рух газу на деякій віддалі від свердловини проходить за законом Дарсі. На певній віддалі швидкість руху газу досягає критичного значення υ_{kr}, починаючи з якого порушується закон Дарсі

$$\left|\upsilon\right| = ck^{\frac{3n-1}{2}} \mu^{1-2n} \rho^{n-1} \left|\frac{dp}{dr}\right|^n, \tag{5}$$

причому показник режиму фільтрації n стає менший, ніж одиниця. Радіус цього контуру позначимо r_{kr}, а тиск на ньому p_{kr}. Всередині цієї області показник режиму фільтрації є величина змінна, яка залежить від чисел Re, $0,5 \le n < 1$.

Запишемо вирази для визначення дебіту свердловини

$$q = E'\left(\frac{1-n}{n}\right)^n \left(\frac{p_{kr}^2 - p_c^2}{r_c^{(n-1)/n} - r_{kr}^{(n-1)/n}}\right)^n . \tag{6}$$

Зовнішню область, в якій справедливий закон Дарсі, можна розглядати як свердловину великого діаметру, а тому

$$q = \frac{\pi k h p_{at}}{\mu} \frac{p_k^2 - p_{kr}^2}{\ln\left(r_k / r_{kr}\right)} .$$

Враховуючи, що на контурі, який відділяє дію закону Дарсі, швидкість фільтрації є критична, то можна записати, що $q = 2\pi r_{kr} h \upsilon_{kr} p_{kr}$, де $\upsilon_{kr} = = \mu \mathrm{Re}_{kr} \sqrt{Sl} \Big/ \left(p_{kr} \rho_{at} \sqrt{k}\right)$. З останніх двох формул отримуємо

$$q = \frac{2\pi h \mu \sqrt{Sl}}{\rho_{at} \sqrt{k}} \mathrm{Re}_{kr} \, r_{kr} . \tag{7}$$

Нарешті, враховуючи, що в умовах радіальної фільтрації середній тиск $\tilde{p}$ можна замінити на контурний p_k, отримаємо ще одну формулу для обчислення дебіту свердловини

$$q = -\Omega \frac{dp_k}{dt} . \tag{8}$$

Таким чином, ми одержали систему чотирьох рівнянь (5)-(8) із чотирма невідомими q, p_k, r_{kr}, p_{kr}, які залежать від часу. Застосування аналітичних методів до їх розв'язування є проблематичне. Тому для знаходження їх розв'язку можна користуватися наближеними або числовими методами, зокрема, графоаналітичним.

Висновки. Отримано розв'язки задач фільтрації газу в області свердловин пластів підземних сховищ за різних умов його відбирання або закачування. Усталений режим відповідає експлуатації сховища на порівняно невеликому проміжку часу (порядку декількох діб) за сталого тиску на газозбірному пункті. Одержані формули для розподілу тиску дають можливість будувати гідравлічну ув'язку системи «пласт підземного сховища газу – магістральний газопровід», що дозволяє розв'язувати різного роду режимні задачі. Оскільки подані вище моделі фільтрації газу з достатньою для практики адекватністю описують процеси в околах свердловин, то отримані результати дозволяють розраховувати параметри роботи системи «пласт підземного сховища газу – магістральний газопровід», особливо в піковий період.

Література

[1] *Бузинов, С. Н.* Расчет технологической цепочки пласт-скважина-шлейф-КС-соединительный газопровод при циклической эксплуатации ПХГ / *С. Н. Бузинов, Г. Ф. Толкушин* // Транспорт и хранение газа. — 1980. — № 7. — С. 13-20.

[2] *Закиров, С. Н.* Проектирование и разработка газовых месторождненний / *С. Н. Закиров, Б. Б. Лапук*. — Москва: Недра, 1974. — 376 с.

[3] *Карнаухов, М. Л.* Справочник по испытанию скважин / *М. Л. Карнаухов, Н. Ф. Рязанцев*. — Москва: Недра, 1984. — 268 с.

[4] *П'янило, Я. Д.* Дослідження неусталеного руху газу в пористих середовищах / *Я. Д. П'янило* // Прикл. проблеми мех. і мат. — 2004. — Вип. 2. — С. 178-184.

[5] *Тетерев, И. Г.* Управление процессами добычи газа / *И. Г. Тетерев, Н. Л. Шешуков, Е. М. Нанивский*. — Москва: Недра, 1981. — 248 с.

The dependence of filtration gas rate from pressure in the neighbourhood of wells gas layers

Yaroslav Pyanylo, Petro Haliy, Nazariy Lopuh, Galina Pyanylo

The processes of gas filtration in porous environment with complex structures, including underground gas storage of a cylindrical form in the presence of concentrated sources and different initial and boundary conditions were investigated. The working wells through which the gas is taken or pumped into underground storage layer are concentrated sources. The obtained results allow us to investigate filtration properties of the well neighbourhood, determine its rate depending on the pressure distribution. The latter, in its turn, makes it possible to calculate the parameters of the storage work in the peak period.

Зависимости скорости фильтрации газа от давления в окрестностях скважин газоносных пластов

Ярослав Пянило, Петр Галий, Назарий Лопух, Галина Пянило

Исследованы процессы фильтрации газа в пористых средах сложной структуры, в частности подземных хранилищах газа, цилиндрической формы при наличии сосредоточенных источников и различных начальных и граничных условий. В качестве сосредоточенных источников выступают рабочие скважины, через которые отбирается или закачивается газ в пласт подземного хранилища. Полученные результаты дают возможность исследовать фильтрационные свойства в окрестности скважины, определять ее дебит в зависимости от распределения давления. Последнее, в свою очередь, дает возможность рассчитывать параметры работы хранилища в пиковый период.

Отримано 28.12.09