

## Числове дослідження взаємодії механічного й електричного полів у п'єзоелектрику

Федір Чабан

Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, e-mail: cfedir@gmail.com

*Із застосуванням методу скінченних елементів проведено порівняльний аналіз процесів перетворення кінетичної та потенціальної енергій у п'єзоелектрику за дії на нього різних динамічних навантажень. Енергетичні характеристики обчислювалися на основі знайдених розв'язків початково-крайової задачі теорії п'єзоелектриків. Процес відшукання розв'язків включає формулювання, напівдискретизацію відповідної варіаційної задачі, а також побудову однокрокової рекурентної схеми інтегрування в часі.*

**Ключові слова:** початково-крайова задача теорії п'єзоелектриків, метод скінченних елементів, однокрокова рекурентна схема, баланс енергії, динамічні навантаження.

**Вступ.** У сучасній обчислювальній математиці для розв'язування змішаних початково-крайових задач теорії п'єзоелектриків часто застосовують метод розділення змінних. Це дозволяє, зокрема, без втрати точності обчислень застосувати метод скінченних елементів (МСЕ) для напівдискретизації за просторовою змінною, а далі для знаходження невідомих розв'язків за часовою змінною застосувати, для прикладу, метод скінченних різниць і побудувати відповідну однокрокову рекурентну схему [1-3]. Із точки зору математичного моделювання важливо з'ясувати чи побудована модель і знайдені відповідні їй числові розв'язки відповідають очікуваній фізичній поведінці процесу, що моделюється. Вхідними параметрами, які безпосередньо впливають на фізику процесу є, зокрема, властивості досліджуваного матеріалу п'єзоелектрика, характеристики зовнішньої та внутрішньої дії. Тому, у цій роботі було досліджено вплив характеру навантаження на стійкість числових розв'язків і з'ясовано яким чином енергетичні характеристики залежать від типу навантаження та тривалості його дії в недисипативному середовищі. Основні співвідношення теорії п'єзоелектриків наведені у монографіях [4-7].

Отож, для знаходження розв'язків початково-крайової задачі теорії п'єзоелектриків у пунктах 1-3 побудуємо однокрокову рекурентну схему інтегрування в часі. Обчислення енергетичних характеристик (пункт 4) здійснюватимемо, використовуючи структурні елементи сформульованої варіаційної задачі (пункт 1). Об'єктом дослідження буде кварцовий стрижень. Стаття опирається на результати, отримані в працях [8-10].

## 1. Формулювання початково-крайової задачі

Нехай анізотропне п'єзоелектричне тіло займає обмежену зв'язну область  $\Omega$ , що складається з точок  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$  евклідового простору  $R^d$  з неперервною за Ліпшицем границею  $\Gamma$  й одиничним вектором зовнішньої нормалі до неї  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$ , де  $n_i = \cos(n, x_i)$ . Нехай  $t$  — час,  $t \in [0, T]$ ,  $0 < T < +\infty$ . Необхідно знайти вектор пружних переміщень  $\mathbf{u} = \{u_i(x, t)\}_{i=1}^d$  та електричний потенціал  $p = p(x, t)$  за умови, що тіло піддається дії зовнішнього навантаження механічної чи електромагнітної природи. Тіло закріплено та заземлено на певних частинах його поверхні, що можна записати такими рівняннями (тут і далі у межах одного доданку проведено підсумовування за індексами, які повторюються) [2]

$$\begin{aligned} \rho(\ddot{u}_i - f_i) - \sigma_{ij,j} &= 0, \quad \dot{D}_{k,k} + J_{k,k} = 0, \\ \sigma_{ij} &= c_{ijkm} \varepsilon_{km}(\mathbf{u}) + a_{ijkm} \varepsilon_{km}(\dot{\mathbf{u}}) - e_{kij} E_k(p), \\ D_k &= g_{km} E_m(p) + e_{kij} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}), \\ \varepsilon_{ij} &= (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \quad J_k = z_{km} E_m(p), \quad E_k(p) = -p_{,k} \quad \text{в } \Omega \times (0, T], \end{aligned} \quad (1)$$

відповідними крайовими

$$\begin{aligned} u_i &= 0 \quad \text{на } \Gamma_u, \quad \Gamma_u \subset \Gamma, \quad \text{mes}(\Gamma_u) > 0, \\ \sigma_{ij} n_j &= \hat{\sigma}_i \quad \text{на } \Gamma_\sigma, \quad \Gamma_\sigma = \Gamma \setminus \Gamma_u, \\ p &= 0 \quad \text{на } \Gamma_p, \quad \Gamma_p \subset \Gamma, \quad \text{mes}(\Gamma_p) > 0, \\ (\dot{D}_k + J_k) n_k &= 0 \quad \text{на } \Gamma_d \times [0, T], \quad \Gamma_d \subset \Gamma, \quad \Gamma_d \cap \Gamma_p = \emptyset, \\ \int_{\Gamma_e} (\dot{D}_k + J_k) n_k d\gamma &= I \quad \text{на } \Gamma_e \times [0, T], \quad \Gamma_e = \Gamma \setminus (\Gamma_d \cap \Gamma_p), \\ E_k(p) - n_k E_m(p) n_m &= 0 \quad \text{на } \Gamma_e \times [0, T] \end{aligned} \quad (2)$$

та початковими умовами

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}|_{t=0} = \mathbf{v}_0, \quad p|_{t=0} = p_0 \quad \text{в } \Omega. \quad (4)$$

Тут  $\rho$  — густина маси п'єзоелектрика,  $\mathbf{f} = \{f_i(x)\}$  — вектор об'ємних сил,  $\sigma_{ij}(x, t)$ ,  $\varepsilon_{ij}(x, t)$  — компоненти симетричних тензорів напружень і деформацій відповідно,  $D_k(x, t)$ ,  $E_k(x, t)$ ,  $J_k(x, t)$  — компоненти векторів індукції, напруженості електричного поля та струму зміщення відповідно,  $a_{ijkm}$ ,  $c_{ijkm}$  — компоненти тензорів в'язкості та пружних модулів п'єзоелектрика,  $e_{kij}$ ,  $z_{km}$  і  $g_{ij}$  визначають компоненти тензорів п'єзоелектричних коефіцієнтів, електричної провідності та діелектричної проникності відповідно,  $\hat{\sigma}_i = \{\hat{\sigma}_i(x, t)\}$  та  $I = I(t)$  — задані вектори поверхневих зусиль і струму на електроді  $\dot{\mathbf{u}} = \partial \mathbf{u} / \partial t$ ,  $\ddot{\mathbf{u}} = \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2$ .

Введемо простори допустимих пружних переміщень і електричних потенціалів

$$V = \left\{ \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d : \mathbf{v} = 0 \text{ на } \Gamma_u \right\},$$

$$Q = \left\{ q \in H^1(\Omega) : q = 0 \text{ на } \Gamma_p, q = \text{const на } \Gamma_e \right\}$$

відповідно. Нехай  $\Phi := V \times Q$ , а спряжений до нього простір  $\Phi' := V' \times Q'$ . Дамо відповідне варіаційне формулювання початково-крайової задачі:

$$\text{задано } \psi_0 = (\mathbf{u}_0, p_0) \in \Phi, \mathbf{v}_0 \in H \text{ та } (l, r) \in L^2(0, T; \Phi');$$

$$\text{знайти пару } \psi = (\mathbf{u}, p) \in L^2(0, T; \Phi) \text{ таку, що}$$

$$m(\ddot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v}) + a(\dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - e(p(t), \mathbf{v}) = \langle l(t), \mathbf{v} \rangle,$$

$$g(\dot{p}(t), q) + e(q, \dot{\mathbf{u}}(t)) + z(p(t), q) = \langle r(t), q \rangle \quad \forall t \in (0, T],$$

$$m(\dot{\mathbf{u}}(0) - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}) = 0, \quad c(\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

$$g(p(0) - p_0, q) = 0 \quad \forall q \in Q, \tag{5}$$

де білінійні та лінійні форми визначені такими виразами

$$m(u, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \rho u_i v_i dx, \quad c(u, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} c_{ijkm} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{km}(\mathbf{v}) dx,$$

$$a(u, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} a_{ijkm} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{km}(\mathbf{v}) dx, \quad e(q, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} e_{kij} E_k(q) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) dx \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

$$g(p, q) = \int_{\Omega} g_{km} E_k(p) E_m(q) dx, \quad z(p, q) = \int_{\Omega} z_{km} E_k(p) E_m(q) dx \quad \forall q \in Q,$$

$$\langle l, \mathbf{v} \rangle = \int_{\Omega} \rho f_i v_i dx + \int_{\Gamma_\sigma} \bar{\sigma}_i v_i d\gamma \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad \langle r, q \rangle = -Iq|_{\Gamma_e} \quad \forall q \in Q.$$

## 2. Напівдискретизація варіаційної задачі

Виділимо в просторі допустимих функцій  $\Phi$  послідовність скінченновимірних підпросторів апроксимацій  $\Phi_h = V_h \times Q_h$  ( $\dim \Phi_h \rightarrow \infty$ , якщо  $h \rightarrow 0$ ). Для кожного фіксованого  $h > 0$  розв'язок  $\psi_h = (\mathbf{u}_h, p_h)$  задачі:

$$\text{задано } h = \text{const} > 0, \quad \psi_0 = (\mathbf{u}_0, p_0) \in \Phi, \quad \mathbf{v}_0 \in H, \quad \ell = (l, r) \in L^2(0, T; \Phi');$$

$$\text{знайти вектор } \psi_h = (\mathbf{u}_h, p_h) \in L^2(0, T; \Phi_h) \text{ такий, що}$$

$$m(\ddot{\mathbf{u}}_h(t), \mathbf{v}) + a(\dot{\mathbf{u}}_h(t), \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}_h(t), \mathbf{v}) - e(p_h(t), \mathbf{v}) = \langle l(t), \mathbf{v} \rangle,$$

$$g(\dot{p}_h(t), q) + e(q, \dot{\mathbf{u}}_h(t)) + z(p_h(t), q) = \langle r(t), q \rangle,$$

$$m(\dot{\mathbf{u}}_h(0) - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}) = 0, \quad c(\mathbf{u}_h(0) - \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) = 0,$$

$$g(p_h(0) - p_0, q) = 0 \quad \forall \phi = (\mathbf{v}, q) \in \Phi_h \tag{6}$$

будемо називати напівдискретизованою апроксимацією Гальоркіна для розв'язку  $\Psi = (\mathbf{u}, p)$ . Якщо зафіксувати деякі базиси  $\{v_i\}, \{q_i\}$  у просторах апроксимацій  $V_h, Q_h$  відповідно, то можна отримати таку задачу Коші для визначення коефіцієнтів  $U(t) = \{U_i(t)\}, P(t) = \{P_i(t)\}$  розвинення компонент напівдискретизованої апроксимації  $\mathbf{u}_h, p_h$  за цими базисами

$$\left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} + \begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ \mathbf{E} & \mathbf{G} \end{pmatrix} \frac{d}{dt} + \begin{pmatrix} \mathbf{C} & -\mathbf{E}^T \\ 0 & \mathbf{Z} \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \mathbf{U}(t) \\ P(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}(t) \\ R(t) \end{pmatrix} \quad \forall t \in (0, T],$$

$$\mathbf{M}\mathbf{U}'(0) = \mathbf{V}^0, \quad \mathbf{C}\mathbf{U}(0) = \mathbf{U}^0, \quad \mathbf{G}P(0) = \mathbf{P}^0, \quad (7)$$

де  $\mathbf{M} = \{m(v_i, v_j)\}$ ,  $\mathbf{A} = \{a(v_i, v_j)\}$ ,  $\mathbf{C} = \{c(v_i, v_j)\}$ ,  $\mathbf{G} = \{g(q_i, q_j)\}$ ,  $\mathbf{Z} = \{z(q_i, q_j)\}$ ,  
 $\mathbf{E} = \{e(q_i, v_j)\}$ ,  $\mathbf{L} = \{\langle l_i, v_i \rangle\}$ ,  $\mathbf{R} = \{\langle r_i, q_i \rangle\}$ .

### 3. Однокрокова рекурентна схема інтегрування за часом

Щоб побудувати однокрокову рекурентну схему інтегрування за часом, скористаємося [2].

Для фіксованого натурального  $N$  розглянемо рівномірний поділ відрізка часу  $[0, T]$  вузлами  $t_j = j\Delta t$ ,  $j = \overline{0, N+1}$ ,  $T = (N+1)\Delta t$ . На кожному відрізку  $[t_j, t_{j+1}]$  для апроксимації розв'язку  $\Psi_h(t) = (\mathbf{u}_h(t), p_h(t))$  напівдискретизованої задачі будемо використовувати такі наближення

$$\mathbf{u}_h(t) \cong [1 - \omega^2(t)]u^j + \Delta t \omega(t)[1 - \omega(t)]v^j + \omega^2(t)u^{j+1}, \quad \omega(t) = \frac{t - t_j}{\Delta t},$$

$$p_h(t) \cong [1 - \omega(t)]p^j + \omega(t)p^{j+1} \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}], \quad (8)$$

тобто на кожному кроці інтегрування в часі для апроксимації зміщення ми використовуємо квадратичні апроксимації, а для електричного потенціалу — лінійні.

На основі співвідношень (8) побудуємо однокрокову рекурентну схему інтегрування задачі (7) по часу

$$\text{задано } \Delta t > 0, \quad \alpha \in [0, 1], \quad y^j = (v^j, \Psi^j) \in V_h \times \Phi_h, \quad \ell_j = (l_j, r_j) \in \Phi';$$

$$\text{знайти } y^{j+1} = (v^{j+1}, \Psi^{j+1}) \in V_h \times \Phi_h \text{ таке, що}$$

$$m(\dot{v}^{j+1/2}, \mathbf{v}) + a(v^{j+\alpha}, \mathbf{v}) + c(u^{j+\alpha}, \mathbf{v}) - e(p^{j+1/2}, \mathbf{v}) = \langle l_j, \mathbf{v} \rangle,$$

$$g(\dot{p}^{j+1/2}, q) + e(q, v^{j+1/2}) + z(p^{j+\alpha}, q) = \langle r_j, q \rangle,$$

$$\forall \phi = (\mathbf{v}, q) \in \Phi_h, \quad v^{j+1/2} = \dot{u}^{j+1/2}, \quad j = \overline{0, N}. \quad (9)$$

Тут використано позначення

$$\begin{aligned}
w^{j+1/2} &= \frac{1}{2}(w^{j+1} - w^j), & \dot{w}^{j+1/2} &= \frac{1}{\Delta t}(w^{j+1} - w^j), \\
w^{j+\alpha} &= w^{j+1/2} + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\Delta t \dot{w}^{j+1/2}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Підстановкою співвідношень (8) у початкові умови задачі (6) отримаємо рівняння

$$m(\mathbf{v}^0 - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}) = 0, \quad c(\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) = 0, \quad g(p^0 - p_0, q) = 0 \quad \forall \phi = (\mathbf{v}, q) \in \Phi_h \tag{11}$$

для визначення вектора  $y^0 = (\mathbf{v}^0, \psi^0)$ .

Застосування схем МСЕ дозволяє отримати систему лінійних алгебраїчних рівнянь для однокрокової рекурентної схеми (9)

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \mathbf{M} + \alpha\Delta t \left[ \mathbf{A} + \frac{1}{2}\Delta t \mathbf{C} \right] & -\frac{1}{2}\Delta t \mathbf{E}^T \\ \frac{1}{2}\Delta t \mathbf{E} & \mathbf{G} + \alpha\Delta t \mathbf{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}^{j+1/2} \\ \mathbf{P}^{j+1/2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\Delta t \begin{pmatrix} \mathbf{L}_j \\ \mathbf{R}_j \end{pmatrix} + \\
&+ \begin{pmatrix} \mathbf{M} + \Delta t \tilde{\mathbf{A}} & -\frac{1}{2}\Delta t \mathbf{C} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{G} + \Delta t \tilde{\mathbf{Z}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}^j \\ \mathbf{U}^j \\ \mathbf{P}^j \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{12}$$

де  $\Delta \tilde{t} = (\alpha - 1/2)\Delta t$ ,  $\mathbf{V}^{j+1/2} = 2\mathbf{V}^{j+1/2} - \mathbf{V}^j$ ,  $\mathbf{U}^{j+1} = \mathbf{U}^j + \Delta t \mathbf{V}^{j+1/2}$ ,  $\mathbf{P}^{j+1} = 2\mathbf{P}^{j+1/2} - \mathbf{P}^j$ ,  $j = \overline{0, N}$ .

#### 4. Визначення енергетичних характеристик

Введені в задачі (5) білінійні форми дозволяють запровадити еквівалентні енергетичні норми в просторах  $V$  та  $Q$

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}\|_V &= \sqrt{c(\mathbf{u}, \mathbf{u})}, & |\mathbf{u}|_V &= \sqrt{a(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \quad \forall \mathbf{u} \in V, \\
\|p\|_Q &= \sqrt{g(p, p)}, & |p|_Q &= \sqrt{z(p, p)} \quad \forall p \in Q,
\end{aligned} \tag{13}$$

які застосовуються для обчислень енергетичних характеристик, зокрема

$$\Pi(t) = \left[ \|\mathbf{u}(t)\|_V^2 + \|p(t)\|_Q^2 \right] / 2 \quad \text{— потенціальна енергія,}$$

$$D(t) = |\dot{\mathbf{u}}(t)|_V^2 + |p(t)|_Q^2 \quad \text{— енергія дисипації,}$$

$$K(t) = m(\dot{\mathbf{u}}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) / 2 \quad \text{— кінетична енергія,}$$

$$E(t) = \Pi(t) + K(t) \quad \text{— повна енергія.}$$

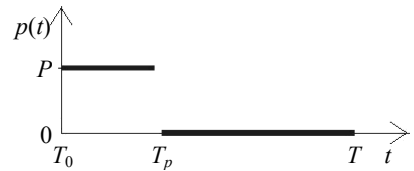
Слід зазначити, що складник  $\|\mathbf{u}(t)\|_V^2/2$  визначає механічну потенціальну енергію, а  $\|p(t)\|_Q^2/2$  — потенціальну енергію електричного поля. Відповідно вирази  $|\dot{\mathbf{u}}(t)|_V^2$  та  $|p(t)|_Q^2$  визначають енергію дисипації механічного й електричного полів. Також зауважимо, що функція  $k = k(t) = e(p(t), \dot{\mathbf{u}}(t))$  детермінує динамічний коефіцієнт електромеханічного зв'язку (КЕМЗ) полів у п'єзоелектрику, що визначає відносну кількість енергії, яка в поточний момент може перетворитися з механічної в електричну та навпаки.

### 5. Числові експерименти

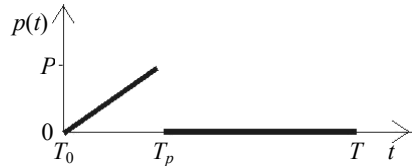
Розглянемо кварцовий стрижень завдовжки  $L = 0,005$  м з густиною маси  $\rho = 2651$  кг/м<sup>3</sup>, модулем пружності  $c_{1111} = 8,67 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>, п'єзоелектричним коефіцієнтом  $e_{1111} = -0,195$  К/м і діелектричною проникливістю  $g_{11} = 4,41$  Ф/м. Стрижень у початковий момент часу  $t = 0$  вільний від навантаження  $\mathbf{u}_0 = 0$ ,  $\mathbf{v}_0 = 0$ ,  $p_0 = 0 \forall x \in [0, L]$ . Нехай лівий кінець стрижня ( $x = 0$ ) закріплено та заземлено  $\mathbf{u}(0, t) = 0$ ,  $p(0, t) = 0 \forall t \in [0, T]$ . Незакріплений кінець стрижня ( $x = L$ ) контактує з діелектричним ізолятором  $D_1(L, t) = 0 \forall t \in [0, T]$  та піддається короткочасній дії тиском  $\sigma_{11}(L, t) = p(t) \forall t \in [0, T]$ . В обчислювальному експерименті було прийнято, що час спостереження  $T = 5 \cdot 10^{-6}$  с, крок інтегрування в часі  $\Delta t = 10^{-9}$  с, кількість кроків інтегрування  $N = 5000$ , параметр рекурентної схеми  $\alpha = 1/2$ , кількість скінченних елементів 300.

Будемо досліджувати реакцію п'єзоелектрика (зокрема його енергетичних характеристик) під дією короткочасного динамічного навантаження (тиску) одного з трьох типів, зображених на рис. 1.

$$(1) p(t) = \begin{cases} P, & 0 < t \leq T_p, \\ 0, & t > T_p, \end{cases}$$



$$(2) p(t) = \begin{cases} tP/T_p, & 0 < t \leq T_p, \\ 0, & t > T_p, \end{cases}$$



$$(3) p(t) = \begin{cases} tP/T_p, & 0 < t \leq T_p/2, \\ (1-tP)/T_p, & T_p/2 < t \leq T_p, \\ 0, & t > T_p, \end{cases}$$

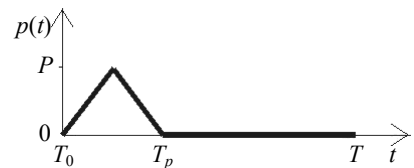


Рис. 1. Види навантаження

Ми приймали  $P = 5 \cdot 10^6$  Н і додатково накладали ще дві умови:

(а) величина  $T_p = 3 \cdot 10^{-7}$  с є менша, ніж час, необхідний хвилі переміщення для проходження віддалі  $L$ ;

(б) величина  $T_p = 2,5 \cdot 10^{-6}$  с — час, необхідний хвилі переміщення для проходження віддалі  $2L$ .

Аналізуючи стійкість отриманих числових результатів, приходимо до висновку, що розриви в навантаженнях типу (1) та (2) спричиняють збурення, які видно на графіках енергій і КЕМЗ (див. рис. 2-3). Відзначимо, що для лінійно зростаючого навантаження (2) ці збурення є на порядок менші, ніж для кусково-постійного типу (1).

Другою відмінністю розв'язків, отриманих за дії навантаження типу (2) та тривалості  $T_p = 3 \cdot 10^{-7}$  с, є інший характер перетворення енергій у разі досягнення хвилею переміщення закріпленого або навантаженого кінця. Кінетична енергія не повністю перетворюється в потенціальну та навпаки. Це пояснюється різницею між значеннями тиску на початку та в кінці дії навантаження.

Якщо тривалість навантаження  $T_p = 2,5 \cdot 10^{-6}$  с, то, незважаючи на відсутність як природної, так і штучної в'язкості, для кусково-постійного та неперервного

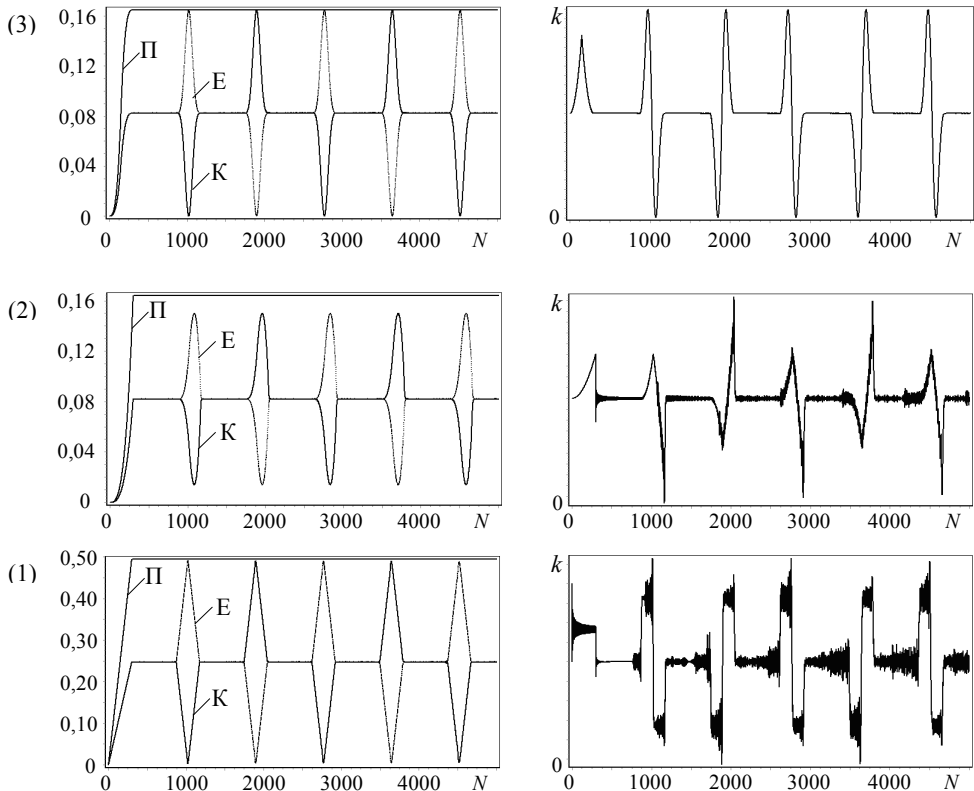


Рис. 2. Значення енергій ( $\Pi$  — повна енергія,  $E$  — потенціальна,  $K$  — кінетична і  $k$  — КЕМЗ) для  $T_p = 3 \cdot 10^{-7}$  с, випадок (а)

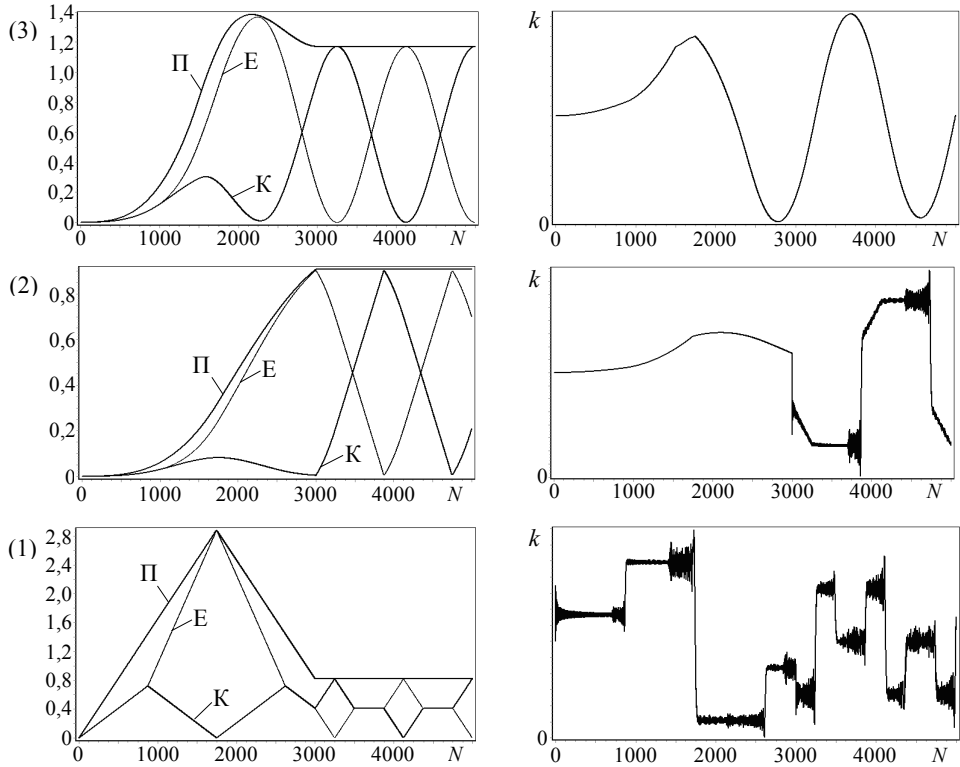


Рис. 3. Значення енергій (Π — повна енергія, E — потенціальна, K — кінетична і k — КЕМЗ) для  $T_p = 2,5 \cdot 10^{-6}$  с, випадок (б)

навантажень ми отримуємо зменшення значення повної енергії. Це пояснюється тим, що хвиля переміщення, спричинена навантаженням, поглинається хвилею з пропорційною енергією, що рухається їй назустріч. Тобто, діючи на кінець стрижня розтягуючим навантаженням, ми, в результаті, отримуємо фізично необгрунтований результат — скорочення стрижня. Щодо лінійно зростаючого навантаження, зважаючи на різницю між початковим та кінцевим тиском, зменшення енергій відсутнє.

Відносно значень КЕМЗ, то для навантажень типу (2), (3) помітне сповільнення процесів перетворення між електричною та механічною енергіями.

**Висновки.** У статті розглянуто застосування МСЕ для розв'язування одновимірних нестационарних задач теорії п'єзоелектрики. Для цих задач зроблено варіаційне формулювання, виконано напівдискретизацію Гальоркіна та побудовано однокрокову рекурентну схему інтегрування за часом. Отримані схеми реалізовано у вигляді програмного забезпечення.

Аналіз впливу характеру та тривалості навантажень за відсутності дисипативних процесів на поведінку енергетичних характеристик дозволяє зробити висновок, що оптимальним способом задання тиску є задання його у вигляді лінійно зростаючої функції.



## Література

- [1] Данько, О. І. Чисельне дослідження одновимірних задач п'єзоелектрики / О. І. Данько, Г. А. Шинкаренко // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 1997. — № 46. — С. 17-25.
- [2] Шинкаренко, Г. А. Проекційно-сеточні апроксимації для варіаційних задач п'єзоелектричності. II. Дискретизація і розрешимість нестационарних задач / Г. А. Шинкаренко // Дифференц. уравнения. — 1994. — Т. 30, № 2. — С. 317-325.
- [3] Rahman, S. A finite element method for modelling electromechanical wave propagation in anisotropic piezoelectric media / S. Rahman, H. P. Langtangen, C. H. W. Barnes // Communication in computational physics. — 2008. — Vol. 2, No 2. — P. 271-292.
- [4] Жарий, О. Ю. Введение в механику нестационарных колебаний и волн / О. Ю. Жарий, А. Ф. Улитко. — Київ: Вища школа, 1989. — 184 с.
- [5] Новацкий, В. Электромагнитные эффекты в твердых телах / В. Новацкий. — Москва: Мир, 1986. — 159 с.
- [6] Партон, В. З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В. З. Партон, Б. А. Кудрявцев. — Москва: Наука, 1988. — 472 с.
- [7] Шульга, Н. А. Колебания пьезоэлектрических тел / Н. А. Шульга, А. М. Болжисев. — Київ: Наук. думка, 1989. — 228 с.
- [8] Чабан, Ф. Розрахунок енергетичних характеристик п'єзоелектричних перетворювачів методом скінченних елементів з оцінювачем похибок / Ф. Чабан, Г. Шинкаренко // Актуальні задачі механіки неоднорідних структур. — Львів, 2007. — С. 210-213.
- [9] Chaban, F. Finite element method approximations for the boundary value problems of piezoelectricity / F. Chaban, H. Shynkarenko // Modern Analysis and Application. Book of abstracts. — Odessa, 2007. — P. 32-33.
- [10] Шинкаренко, Г. А. Проекційно-сеточні апроксимації для варіаційних задач п'єзоелектричності. I. Постановка задач і аналіз установившихся вимушених коливань / Г. А. Шинкаренко // Дифференц. уравнения. — 1993. — Т. 29, № 7. — С. 1252-1260.

## Numeric analysis of mechanical and electrical fields interaction in a piezoelectric

Fedir Chaban

*With application of finite element method the comparative analysis of the processes of potential and kinetic energies transformation in a piezoelectric under different dynamic loadings has been performed. Energetic characteristics have been calculated using solutions of piezoelectric initial-boundary problem. The process of solutions finding includes the formulation, half-discretization of variational problem and also the construction of one-step recurrence scheme for integration in time.*

## Численное исследование взаимодействия механического и электрического полей в пьезоэлектрике

Федор Чабан

*С применением метода конечных элементов был выполнен сравнительный анализ преобразования потенциальной и кинетической энергии в пьезоэлектрике, который находится под воздействием различных динамических нагрузок. Энергетические характеристики были вычислены, используя решения начальной краевой задачи теории пьезоэлектричества. Процесс построения решений включает формулировку, полудискретизацию вариационной задачи, а также построение одношаговой рекуррентной схемы интегрирования по времени.*

Представлено професором Т. Нагірним

Отримано 20.09.08