

## Неперервна апроксимація характеристики термодіодного сенсора та його чутливості сумою полінома й степеневого виразу

Василь Андруник<sup>1</sup>, Петро Малачівський<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, Львів, e-mail: aprox@complex.lviv.ua  
<sup>2</sup> д. т. н., с. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: psmal@cmm.lviv.ua

*Розглянуто задачу побудови неперервного та гладкого мінімаксного сплайн-наближення функцій сумою полінома та степеневого виразу. Кожна ланка такого сплайна визначається як чебишовське наближення з відтворенням значення функції та її похідної в крайніх точках відрізка. Запропоновано алгоритм побудови такого сплайн-наближення із заданою похибкою. Подано неперервну апроксимацію температурної характеристики та чутливості термодіодного сенсора і проаналізовано точність відтворення чутливості сенсора.*

**Ключові слова:** мінімаксне сплайн-наближення, чебишовське наближення з ермітовим інтерполюванням, наближення нелінійним виразом.

**Вступ.** Розглянемо задачу побудови неперервного та гладкого мінімаксного сплайн-наближення функцій сумою полінома та степеневого виразу

$$C_n(a; x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i + Ax^p, \quad x \geq 0, \quad A \neq 0, \quad p \neq k \quad (k = \overline{0, n}) \quad (1)$$

з невідомими параметрами  $a_i (i = \overline{0, n})$ ,  $A$  і  $p$ . Сплайн-наближення таким виразом застосовують для апроксимації залежностей деяких фізичних величин [1] і спеціальних функцій [2]. Степеневі вирази використовують також для опису статичної характеристики сенсорів, зокрема, термодіодних [3]. Задача опису температурної характеристики сенсора з відтворенням його чутливості полягає в побудові неперервного та гладкого сплайн-наближення, яке забезпечує апроксимацію функції із заздалегідь заданою похибкою за найменшої кількості ланок. Оптимальний розв'язок цієї задачі можливий із застосуванням чебишовського наближення [1], оскільки чебишовське наближення забезпечує досягнення найменшої з можливих похибок апроксимації для заданої кількості параметрів. Особливості побудови неперервного мінімаксного сплайн-наближення температурної характеристики сенсора та його чутливості поліномом описані в праці [4], а сумою полінома й експоненти — в [5]. Побудова неперервного та гладкого мінімаксного сплайн-наближення сумою полінома та степеня ґрунтується на застосуванні чебишовського наближення згаданим виразом з ермітовим інтерполюванням у крайніх точках відрізка [6].

## 1. Формулювання задачі

Нехай неперервно диференційовну функцію  $f(x)$  ( $f(x) \in C^1[\alpha, \beta]$ ) задано на множині точок

$$X = \{x \in X : \alpha \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq \beta\} \quad (2)$$

відрізка  $[\alpha, \beta]$ . Під неперервним і гладким мінімаксним сплайн-наближенням функції  $f(x)$  на відрізку  $[\alpha, \beta]$  виразом (1) розумітимемо сплайн

$$S(x) = C_n(a^{(j)}; x), \quad t_j \leq x \leq t_{j+1}, \quad j = \overline{1, q}, \quad (3)$$

в якому  $q$  — кількість ланок сплайн-наближення, точки  $t_j$  ( $j = \overline{1, q+1}$ ) — межі ланок,  $t_1 = \alpha$ , а  $t_{q+1} = \beta$ . У цьому сплайні кожний із виразів  $C_n(a^{(j)}; x)$ ,  $j = \overline{1, q}$ , є чебишовське наближення функції  $f(x)$  із найменшою абсолютною похибкою на відповідному відрізку  $[t_j, t_{j+1}]$ , яке в точках дотику ланок  $t_j$  ( $j = \overline{2, q}$ ) відтворює значення функції  $f(x)$  та її похідної

$$C_n(a^{(j-1)}; t_j) = C_n(a^{(j)}; t_j) = f(t_j), \quad j = \overline{2, q}; \quad (4)$$

$$C'_n(a^{(j-1)}; t_j) = C'_n(a^{(j)}; t_j) = f'(t_j), \quad j = \overline{2, q}. \quad (5)$$

Оскільки значення виразів  $C_n(a^{(j)}; x)$ ,  $j = \overline{1, q}$ , і їхніх похідних у точках дотику суміжних ланок  $t_j$  ( $j = \overline{2, q}$ ) співпадають, то сплайн-наближення (3) з такими ланками буде неперервним і гладким. Похибка наближення функції  $f(x)$  сплайном (3) буде

$$G = \max_{1 \leq j \leq q} G_j,$$

де  $G_j$  — значення абсолютної похибки наближення функції  $f(x)$  виразом  $C_n(a^{(j)}; x)$  на  $j$ -ій ланці сплайна

$$G_j = \max_{t_j \leq x \leq t_{j+1}} |f(x) - C_n(a^{(j)}; x)|.$$

Сплайн-наближення (3) називатимемо сплайн-наближенням із заданою похибкою  $G_0$ , якщо  $G < G_0$ , а кількість його ланок є найменша з можливих.

## 2. Алгоритм побудови неперервного і гладкого мінімаксного сплайн-наближення сумою полінома та степеневого виразу з заданою похибкою

Побудову неперервного та гладкого мінімаксного сплайн-наближення (3) з ланками (1) можна реалізувати за алгоритмом побудови мінімаксного сплайн-наближення, який описано в працях [4, 5].

Для забезпечення неперервності та гладкості сплайн-наближення (3) параметри виразів  $C_n(a^{(j)}; x)$ ,  $j = \overline{1, q}$ , на кожній із його ланок визначаються відповідно до критерію чебишовського наближення з відтворенням значення функції та її похідної в крайніх точках відрізка [6]. Відповідно до характеристичної теореми, доведеної у праці [6], достатньою умовою існування чебишовського наближення функції  $f(x)$  сумою полінома та степеневого виразу (1) із найменшою абсолютною похибкою на відрізку  $[\alpha, \beta]$  і відтворенням значення функції та похідної в обох крайніх точках відрізка  $\alpha$  та  $\beta$  є справдження нерівностей

$$W^{(n)} > 0, \quad W^{(n)} \neq \tilde{W}_r^{(n)}, \quad r = \overline{0, n}, \quad (6)$$

де

$$W^{(n)} = \frac{D_{n+1}(f; z_2, z_3, \dots, z_{n+4})}{D_{n+1}(f; z_1, z_2, \dots, z_{n+3})}, \quad (7)$$

$$\tilde{W}_r^{(n)} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } z_1 = 0, \\ \frac{D_{n+1}(l_r; z_2, z_3, \dots, z_{n+4})}{D_{n+1}(l_r; z_1, z_2, \dots, z_{n+3})}, & \text{якщо } z_1 > 0, \end{cases} \quad (8)$$

$$D_k(U; z_r, z_{r+1}, \dots, z_{r+k+1}) = \frac{D_{k-1}(U; z_{r+1}, z_{r+2}, \dots, z_{r+k+1})}{D_{k-1}(s_{k-1}; z_{r+1}, z_{r+2}, \dots, z_{r+k+1})} - \frac{D_{k-1}(U; z_r, z_{r+1}, \dots, z_{r+k})}{D_{k-1}(s_{k-1}; z_r, z_{r+1}, \dots, z_{r+k})}, \quad k = \overline{3, n+1}, \quad r = \overline{1, n-k+3}, \quad (9)$$

$$D_2(U; z_r, \dots, z_{r+3}) = \begin{cases} \frac{D_1(U; z_2, z_4)}{D_1(s_1; z_2, z_4)} - U'(z_1), & \text{якщо } r = 1; \\ \frac{D_1(U; z_{r+1}, z_{r+3})}{D_1(s_1; z_{r+1}, z_{r+3})} - \frac{D_1(U; z_r, z_{r+2})}{D_1(s_1; z_r, z_{r+2})}, & \text{якщо } 1 < r < n+1; \\ U'(z_{n+4}) - \frac{D_1(U; z_{n+1}, z_{n+3})}{D_1(s_1; z_{n+1}, z_{n+3})}, & \text{якщо } r = n+1, \end{cases} \quad (10)$$

$$D_1(U; z_r, z_{r+2}) = \begin{cases} U'(z_1), & \text{якщо } r = 1; \\ U(z_4) + U(z_3) - 2U(z_2), & \text{якщо } r = 2; \\ U(z_{r+2}) - U(z_r), & \text{якщо } 2 < r \leq n; \\ 2U(z_{n+3}) - U(z_{n+2}) - U(z_{n+1}), & \text{якщо } r = n+1; \\ U'(z_{n+4}), & \text{якщо } r = n+2, \end{cases} \quad (11)$$

$$s_k(x) = x^k, \quad l_k(x) = x^k \ln(x),$$

$U'(x)$  — похідна функції  $U(x)$ ,  $z_i (i = \overline{3, n+2})$  — будь-які, впорядковані за зростанням  $z_r < z_{r+1} (r = \overline{3, n+1})$  числа з інтервалу  $(\alpha, \beta)$ ,  $z_1 = z_2 = \alpha$ , а  $z_{n+3} = z_{n+4} = \beta$ .

У випадку чебишовського наближення з відтворенням значення функції та її похідної в точці  $\alpha$  достатньою умовою існування такого наближення функції  $f(x)$  сумою полінома та степеневого виразу (1) із найменшою абсолютною похибкою є справдження нерівностей (6), у яких

$$D_2(U; z_r, \dots, z_{r+3}) = \begin{cases} \frac{D_1(U; z_2, z_4)}{D_1(s_1; z_2, z_4)} - U'(z_1), & \text{якщо } r = 1; \\ \frac{D_1(U; z_{r+1}, z_{r+3})}{D_1(s_1; z_{r+1}, z_{r+3})} - \frac{D_1(U; z_r, z_{r+2})}{D_1(s_1; z_r, z_{r+2})}, & \text{якщо } 1 < r \leq n+1; \end{cases} \quad (12)$$

$$D_1(U; z_r, z_{r+2}) = \begin{cases} U'(z_1), & \text{якщо } r = 1; \\ U(z_4) + U(z_3) - 2U(z_2), & \text{якщо } r = 2; \\ U(z_{r+2}) - U(z_r), & \text{якщо } 2 < r \leq n+2; \end{cases} \quad (13)$$

де  $U'(x)$  — похідна функції  $U(x)$ ,  $z_i (i = \overline{3, n+4})$  — будь-які, впорядковані за зростанням  $z_r < z_{r+1} (r = \overline{3, n+3})$  числа з  $(\alpha, \beta]$ , а  $z_1 = z_2 = \alpha$ .

У випадку чебишовського наближення з відтворенням значення функції та її похідної в точці  $\beta$  достатньою умовою існування такого наближення функції  $f(x)$  виразом (1) із найменшою абсолютною похибкою є справдження нерівностей (6), у яких

$$D_2(U; z_j, \dots, z_{j+3}) = \begin{cases} \frac{D_1(U; z_{j+1}, z_{j+3})}{D_1(s_1; z_{j+1}, z_{j+3})} - \frac{D_1(U; z_j, z_{j+2})}{D_1(s_1; z_j, z_{j+2})}, & \text{якщо } 1 \leq j < n+1; \\ U'(z_{n+4}) - \frac{D_1(U; z_{n+1}, z_{n+3})}{D_1(s_1; z_{n+1}, z_{n+3})}, & \text{якщо } j = n+1, \end{cases} \quad (14)$$

$$D_1(U; z_j, z_{j+2}) = \begin{cases} U(z_{j+2}) - U(z_j), & \text{якщо } 1 \leq j \leq n; \\ 2U(z_{n+3}) - U(z_{n+2}) - U(z_{n+1}), & \text{якщо } j = n+1; \\ U'(z_{n+4}), & \text{якщо } j = n+2, \end{cases} \quad (15)$$

де  $U'(x)$  — похідна функції  $U(x)$ ,  $z_i (i = \overline{1, n+2})$  — довільні, впорядковані за зростанням  $z_j < z_{j+1} (j = \overline{1, n+1})$  числа з  $[\alpha, \beta)$ , а  $z_{n+3} = z_{n+4} = \beta$ .

Умові (6) задовольняють, зокрема, функції  $f(x)$  неперервно диференційовані на відрізку  $[\alpha, \beta]$  до  $n$ -го порядку,  $n$ -а похідна яких строго монотонна, за винятком функцій, що мають вигляд

$$b_0 + Bx^r \ln(x), \quad x > 0, \quad r = \overline{0, n}, \quad (16)$$

де  $b_0$  і  $B$  — будь-які дійсні числа [6].

Якщо умови (6) на відповідних відрізках  $[t_j, t_{j+1}]$ ,  $j = \overline{1, q}$  виконуються, то параметри чебишовського наближення функції  $f(x)$  сумою полінома та степеня (1) можна обчислити за схемою Ремеза [1]. При цьому параметри  $a_i^{(j)}$  ( $i = \overline{0, n}$ ) і  $A^{(j)}$  виразів  $C_n(a^{(j)}; x)$  на ланках  $j = \overline{1, q}$  сплайна визначаються за формулами [6]

$$A^{(j)} = D_{n+1}(f; z_1, z_2, \dots, z_{n+3}) / D_{n+1}(\varphi; z_1, z_2, \dots, z_{n+3}); \quad (17)$$

$$a_k^{(j)} = \frac{D_k(f; z_1, \dots, z_{k+2}) - \sum_{i=k+1}^n a_i^{(j)} D_k(s_i; z_1, \dots, z_{k+2}) - A^{(j)} D_k(\varphi; z_1, \dots, z_{k+2})}{D_k(s_k; z_1, \dots, z_{k+2})}; \quad k = \overline{1, n}; \quad (18)$$

$$a_0^{(j)} = \frac{1}{2} \left[ f(z_3) + f(z_4) - \sum_{i=1}^n a_i^{(j)} (z_2^i + z_3^i) - A^{(j)} (z_2^{p^{(j)}} + z_3^{p^{(j)}}) \right], \quad (19)$$

де  $\varphi(p; x) = x^p$ , вирази  $D_k(U; z_i, z_{i+1}, \dots, z_{i+k+1})$  визначаються за формулою (9), а  $D_2(U; z_r, \dots, z_{r+3})$  і  $D_1(U; z_r, z_{r+2})$  залежно від точок інтерполювання — за відповідними формулами (10) та (11), (12) і (13) або (14) і (15). Тут і далі через  $z_r$  ( $r = \overline{1, n+4}$ ) позначатимемо точки альтернансу й інтерполювання на відповідних відрізках  $[t_j, t_{j+1}]$ ,  $j = \overline{1, q}$ .

Значення параметра  $p^{(j)}$  є розв'язок рівняння

$$\omega_n(p) = W^{(n)}, \quad (20)$$

де  $\omega_n(p) = \frac{D_{n+1}(\varphi; z_2, z_3, \dots, z_{n+4})}{D_{n+1}(\varphi; z_1, z_2, \dots, z_{n+3})}$ , а вираз  $W^{(n)}$  визначається за формулою (7).

Розв'язок цього рівняння обчислюємо з урахуванням того [6], що у випадку виконання нерівностей

$$\tilde{W}_0^{(n)} < W^{(n)} < \tilde{W}_n^{(n)} \quad (21)$$

його значення знаходиться в одному з інтервалів  $(k, k+1)$ , де  $k = \overline{0, n-1}$ . Тому спочатку необхідно перевірити чи належить корінь рівняння (20) одному із цих інтервалів. Якщо значення параметра  $p^{(j)}$  належить одному з цих інтервалів, то його можна визначити за методом хорд або ділення навпіл.

Якщо величина  $W^{(n)}$  не задовольняє нерівностям (21), то значення параметра  $p^{(j)}$  належить одному з інтервалів  $(-\infty, 0)$  або  $(n, \infty)$ . У цьому випадку значення параметра  $p^{(j)}$  обчислюємо за ітераційним методом Ньютона [6]

$$p_{i+1}^{(j)} = p_i^{(j)} - \frac{g_n(p_i^{(j)}) - V^{(n)}}{g_n'(p_i^{(j)})}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (22)$$

де

$$g_n(p) = \ln \left( \frac{D_{n+1}(\Phi; z_2, z_3, \dots, z_{n+4})}{D_{n+1}(\Phi; z_1, z_2, \dots, z_{n+3})} \right), \quad V^{(n)} = \ln(W^{(n)}),$$

$$g_n'(p) = \frac{D_{n+1}(\bar{\Phi}; z_2, z_3, \dots, z_{n+4})}{D_{n+1}(\Phi; z_2, z_3, \dots, z_{n+4})} - \frac{D_{n+1}(\bar{\Phi}; z_1, z_2, \dots, z_{n+3})}{D_{n+1}(\Phi; z_1, z_2, \dots, z_{n+3})},$$

$$\bar{\Phi}(p, x) = x^p \ln(x); \quad \Phi(p, z) = z^p,$$

$$p_0 = \begin{cases} -p^*, & \text{якщо } W^{(n)} < \tilde{W}_0^{(n)}; \\ n+1+p^*, & \text{якщо } W^{(n)} > \tilde{W}_n^{(n)}; \end{cases} \quad p^* = \frac{|\ln W^{(n)}|}{\ln(z_{n+4} + z_2) - \ln(z_{n+3} + z_1)},$$

а вирази  $W^{(n)}$ ,  $\tilde{W}_0^{(n)}$ ,  $\tilde{W}_n^{(n)}$  і  $D_{n+1}(U; z_i, z_{i+1}, \dots, z_{i+n+2})$ ,  $i = \overline{1, 2}$  залежно від точок інтерполювання визначаємо за формулами (7)-(15).

Для забезпечення неперервності та гладкості сплайна (3) відповідно до умов (4) та (5) значення виразів  $D_2(U; z_r, z_{r+1}, z_{r+2}, z_{r+3})$  і  $D_1(U; z_r, z_{r+2})$ , а також початкове наближення до точок альтернансу визначаємо залежно від порядкового номера ланки. Першу ланку сплайна  $C_n(a^{(1)}; x)$  визначаємо як чебишовське наближення функції  $f(x)$  із найменшою абсолютною похибкою на  $[t_1, t_2]$  з ермітовим інтерполюванням у точці  $t_2$ . У цьому випадку значення  $D_2(U; z_r, z_{r+1}, z_{r+2}, z_{r+3})$  визначаємо за формулою (14),  $D_1(U; z_r, z_{r+2})$  — за формулою (15), в яких  $z_r$  ( $r = \overline{1, n+2}$ ) — впорядковані за зростанням точки альтернансу з  $[t_1, t_2)$ ,  $t_1 = \alpha$ , а  $z_{n+3} = z_{n+4} = t_2$ . Похибку апроксимації на першій ланці можна визначити за формулою

$$G_1 = \left| f(z_2) - \sum_{i=0}^n a_i^{(1)} z_2^i - A^{(1)} z_2^{p^{(1)}} \right|. \quad (23)$$

Параметри виразів  $C_n(a^{(j)}; x)$ ,  $j = \overline{2, q-1}$ , сплайн-наближення (3) функції  $f(x)$  на внутрішніх ланках, починаючи з другої до передостанньої, визначаємо як чебишовське наближення з умовою відтворення значення функції та її похідної в обох крайніх точках кожної з цих ланок, тобто в крайніх точках відрізків  $[t_j, t_{j+1}]$ ,  $j = \overline{2, q-1}$ .

Під час обчислення параметрів сплайна на цих ланках значення  $D_2(U; z_r, \dots, z_{r+3})$  визначаємо за формулою (10),  $D_1(U; z_r, z_{r+2})$  — за формулою (11), в яких  $z_i$  ( $i = \overline{3, n+2}$ ) — впорядковані за зростанням точки альтернансу з інтервалу  $(t_j, t_{j+1})$   $z_1 = z_2 = t_j$ , а  $z_{n+3} = z_{n+4} = t_{j+1}$ . Похибку апроксимації на цих ланках можна визначити подібно до обчислення похибки апроксимації на першій ланці.

Наближення виразом  $C_n(a^{(q)}; x)$  на останній ланці визначаємо як чебишовське наближення з відтворенням значення функції та похідної в крайній лівій точці ланки —  $t_q$ . Під час обчислення параметрів сплайна на цій ланці значення  $D_2(U; z_r, \dots, z_{r+3})$  визначаємо за формулою (12),  $D_1(U; z_r, z_{r+2})$  — за формулою (13), в яких  $z_i$  ( $i = \overline{3, n+4}$ ) — впорядковані за зростанням точки альтернансу з  $(t_q, t_{q+1}]$ ,  $z_1 = z_2 = t_q$ , а  $t_{q+1} = \beta$ . Похибку апроксимації на цій ланці також можна визначити подібно до обчислення похибки апроксимації на першій ланці.

Задача побудови неперервного та гладкого мінімаксного сплайн-наближення сумою полінома та степеневого виразу (1) із заданою похибкою в разі наближення таблично заданих функцій не завжди має розв'язок. Вона не має розв'язку, якщо на одному з підінтервалів мінімально допустимої довжини ланки ( $n+3$  точки для першої й останньої ланки та  $n+2$  точки для решти ланок) отримується похибка  $G$ , більша від заздалегідь заданої  $G_0$  ( $G > G_0$ ). Якщо під час побудови неперервного та гладкого мінімаксного сплайн-наближення із заданою похибкою отримувалася похибка, більша від заздалегідь заданої, то на підінтервалах, на яких чебишовське наближення з необхідною похибкою не вдалося знайти, можна застосувати інтерполяцію цим самим виразом або поліномом із точним відтворенням значення похідної функції у відповідних крайніх точках.

### 3. Неperервна апроксимація температурної характеристики та чутливості термодіодного сенсора

Апроксимуємо температурну характеристику термодіодного сенсора типу DT-471 фірми Lake Shore [7] (Curve 10). Температурну характеристику цього сенсора задано сто двадцятьма значеннями в діапазоні від 1,4 до 475 К. Графік цієї температурної характеристики зображено на рис. 1, а графік чутливості сенсора — на рис. 2.

Апроксимація цієї температурної характеристики неперервним і гладким мінімаксним сплайном (3) для  $n=2$  з абсолютною похибкою 0,2 мВ складається з дев'яти ланок. Результати цього сплайн-наближення подані в табл. 1. Для порівняння в цій таблиці подано також результати апроксимації температурної характеристики термодіодного сенсора типу DT-471 неперервним і гладким мінімаксним сплайном з такою ж абсолютною похибкою та кількістю параметрів поліномом і сумою полінома й експоненти. У колонках  $\Delta U$  і  $\Delta UT$  задані відповідно похибки відтворення характеристики сенсора та його чутливості відповідним виразом.

Із поданих у цій таблиці даних слідує, що побудований неперервний і гладкий мінімаксний сплайн відтворює температурну характеристику сенсора з абсолютною

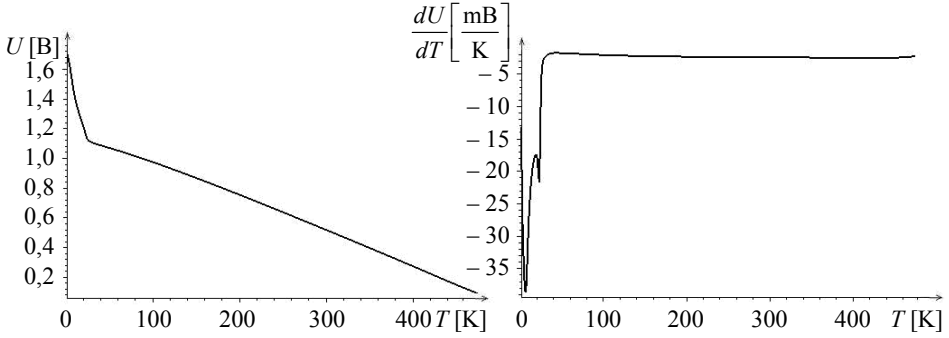


Рис. 1. Температурна характеристика сенсора

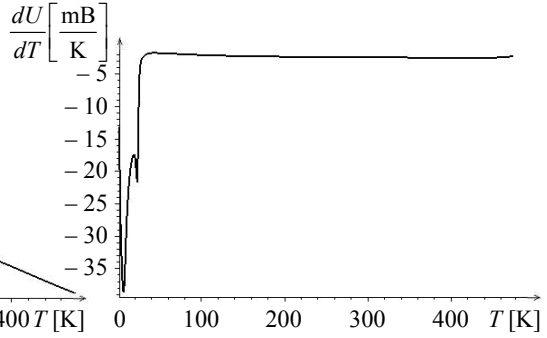


Рис. 2. Залежність чутливості сенсора від температури

похибкою 0,18 mB, а його чутливість — з абсолютною похибкою 0,28 mB/K. Сплайн-наближення з поліноміальними ланками четвертого степеня та тією ж абсолютною похибкою складається з десяти ланок і забезпечує відтворення чутливості сенсора з похибкою 0,36 mB/K, а сплайн-наближення сумою полінома й експоненти з тією самою кількістю параметрів складається з дев'яти ланок і забезпечує відтворення чутливості сенсора з похибкою 0,356 mB/K.

Судячи з результатів, поданих у табл. 1, оптимальним щодо точності відтворення чутливості сенсора є неоднорідний неперервний і гладкий мінімаксний сплайн, у якому на перших трьох ланках застосовується наближення сумою полінома та степеневого виразу, а на останніх шести — сумою полінома й експоненти. Значення параметрів такого сплайн-наближення подані в табл. 2.

Таблиця 1

Результати апроксимації температурної характеристики й чутливості сенсора DT-471

Номер ланки	$a_0 + a_1x + \dots + a_4x^4$			$a_0 + a_1x + a_2x^2 + Ae^{px}$			$a_0 + a_1x + a_2x^2 + Ax^p$		
	Межі ланки	$\Delta U$ [mB]	$\Delta UT$ [mB/K]	Межі ланки	$\Delta U$ [mB]	$\Delta UT$ [mB/K]	Межі ланки	$\Delta U$ [mB]	$\Delta UT$ [mB/K]
1	1,4; 5	0,16	1,20	1,4; 3,8	0,190	1,800	1,4; 5,5	0,18	1,300
2	5; 9,5	0,18	0,36	3,8; 9	0,180	0,356	5,5; 9,5	0,15	0,280
3	9,5; 19,5	0,11	0,11	9; 20	0,190	0,140	9,5; 20	0,15	0,140
4	19,5; 23	0,14	0,26	20; 22	0	0,030	20; 22	0	0,035
5	23; 25	0	0,04	22; 24	0	0,060	22; 24	0	0,060
6	25; 29	0,12	0,21	24; 36	0,150	0,220	24; 36	0,17	0,250
7	29; 56	0,19	$5,6 \cdot 10^{-2}$	36; 100	0,068	0,023	36; 100	$6,9 \cdot 10^{-2}$	$2,4 \cdot 10^{-2}$
8	56; 320	0,17	$9,6 \cdot 10^{-3}$	100; 350	0,130	$7,5 \cdot 10^{-3}$	100; 350	0,17	$8,1 \cdot 10^{-3}$
9	320; 450	0,15	$7,8 \cdot 10^{-3}$	350; 475	0,011	0,013	350; 475	$1,1 \cdot 10^{-2}$	$5,4 \cdot 10^{-3}$
10	450; 475	0	$4,3 \cdot 10^{-3}$	—	—	—	—	—	—



Таблиця 2

Результати апроксимації температурної характеристики та чутливості сенсора неоднорідним сплайном

	Номер ланки	Межі ланки	Значення коефіцієнтів $a_0, a_1, a_2, A$ та $p$	$\Delta U$ [mB]	$\frac{\Delta U}{T}$ [mB/K]
$a_0 + a_1x + a_2x^2 + Ax^p$	1	1,4; 5,5	1,7005257; 0,02692403; 0,0046880155; – 0,029120293; 1,55301485	0,180	1,300
	2	5,5; 9,5	2,0341738; –0,085178975; 0,0026444117; –0,903791896; –1,53152164	0,150	0,280
	3	9,5; 20	2,03358643; –0,16039789; –0,004295141; 0,041705999; 1,5320999	0,150	0,140
$a_0 + a_1x + a_2x^2 + Ae^{px}$	4	20; 22	1,74999188; –0,038675678; 6,129291708·10 <sup>-4</sup> ; –5,46028048·10 <sup>-7</sup> ; 0,47469173	0	0,035
	5	22; 24	0,25462216; 0,10770629; –2,99861585·10 <sup>-3</sup> ; 2,5063214910 <sup>-11</sup> ; 0,86097967	0	0,063
	6	24; 36	1,20548358; –0,0043137184; –2,9155759·10 <sup>-7</sup> ; 79829516,7529; –0,9355469	0,150	0,220
	7	36; 100	1,15154023; –0,0014808049; –2,7959753·10 <sup>-6</sup> ; 23703,84975; –0,505860386	0,068	0,023
	8	100; 350	1,2228567; –2,2660402·10 <sup>-3</sup> ; –2,57242917·10 <sup>-7</sup> ; 0,08365128278; –0,015263219	0,130	7,5·10 <sup>-3</sup>
	9	350; 475	1,18640398; –2,065938·10 <sup>-3</sup> ; –5,3469007·10 <sup>-7</sup> ; 3,56324675·10 <sup>-15</sup> ; 0,059332167	0,011	0,013

**Висновок.** Побудова неперервного та гладкого мінімаксного сплайн-наближення функції  $f(x)$  сумою полінома та степеневого виразу (1) ґрунтується на характеристичній властивості чебишовського наближення функції цим виразом із найменшою абсолютною похибкою й ермітовим інтерполюванням у крайніх точках відрізка. Значення параметрів такого чебишовського наближення визначається за формулами (17)-(19), а для обчислення показника степеня запропоновано комбінований спосіб уточнення його значення з використанням ітераційної схеми (22). Достатній умові існування чебишовського наближення сумою полінома та степеневого виразу задовольняють, зокрема, функції  $f(x)$  неперервно диференційовні на відрізку  $[\alpha, \beta]$  до  $n$ -го порядку,  $n$ -а похідна яких строго монотонна, за винятком функцій, що мають вигляд (16). Апроксимація температурної характеристики сенсора неперервним і гладким мінімаксним сплайном сумою полінома та степеневого виразу з похибкою 0,18 mB забезпечує відтворення його чутливості з похибкою 0,28 mB/K.

### Література

- [1] Понов, Б. А. Равномерное приближение сплайнами / Б. А. Понов. — Киев: Наук. думка, 1989. — 272 с.
- [2] Kobayashi, Y. Fractional power approximations of elliptic integrals and Bessel functions / Y. Kobayashi, M. Ohkita, M. Inoue // Math. Comput. Simulation. — 1978. — Vol. 20, No 4. — P. 285-290.

- [3] *Шефтель, Й. Т.* Аппроксимация температурной зависимости сопротивления терморезисторов типа СТ-4-16А / *Й. Т. Шефтель, Я. В. Павловский, В. А. Стогова* // Приборы и системы управления. — 1985. — № 11. — С. 24-25.
- [4] *Малачівський, П.* Неперервне й гладке рівномірне сплайн-наближення температурної характеристики сенсора та його чутливості / *П. Малачівський, Я. Пізюр, В. Андруник* // Вимірювальна техніка та метрологія. — 2007. — № 58. — С. 24-30.
- [5] *Малачівський, П.* Неперервна аппроксимация характеристики термодиодного сенсора і його чутливості сумою многочлена й експоненти з нелінійним параметром / *П. Малачівський* // Вимірювальна техніка та метрологія. — 2008. — № 69. — С. 84-89.
- [6] *Скопецький, В. В.* Чебишовське наближення сумою многочлена й нелінійного виразу з ермітовим інтерполюванням у крайніх точках відрізка / *В. В. Скопецький, П. С. Малачівський* // Доповіді НАН України. — 2010. — № 4. — С. 42-47.
- [7] [www.lakeshore.com/.../Curve 10](http://www.lakeshore.com/.../Curve 10)

## **Continuous approximation of characteristics of thermodiode sensor and its sensitivity by the sum of polynomial and power**

Vasyl Andrunyk, Petro Malachivskyj

*The problem of construction of the continuous and smoothed minimal spline-approximation by the sum of polynomial and power is considered. The algorithm for construction of such approximation with a priori given error, when all spline links are determined as Chebyshev approximation, is described. An example of this approximation application for the transfer-function of diode temperature sensor for cryogenic temperature range is given. The comparison of the values of sensor sensitivity and derivative values of the obtained spline function is done.*

## **Непрерывная аппроксимация характеристики термодиодного сенсора и его чувствительности суммой полинома и степенного выражения**

Василь Андруник, Петро Малачивский

*Рассмотрена задача построения непрерывного и гладкого минимаксного сплайн-приближения функций суммой многочлена и степенного выражения. Каждое звено такого сплайна определяется как чебышевское приближение с восстановлением значения функции и её производной в крайних точках отрезка. Предложен алгоритм построения такого сплайн-приближения с заданной погрешностью. Получена непрерывная аппроксимация температурной характеристики и чувствительности термодиодного сенсора и проанализирована точность восстановления чувствительности сенсора.*

Отримано 2.07.10