

## Скінченно-елементне моделювання процесів геометрично нелінійного деформування стрижневих систем

Богдан Дробенко

Д. ф.-м. н., с. н. с. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79053, e-mail: drobenko@ukr.net

*Розглянуто орієнтовану на використання методу скінченних елементів методику розв'язування геометрично нелінійних задач механіки твердого деформівного тіла на основі принципу віртуальних переміщень. Наведені базові співвідношення для тривимірному випадку повного й адаптованого лагранжових формулювань з урахуванням кінематичних ефектів, що виникають за великих переміщень, поворотів і деформацій. Як приклад, співвідношення повного лагранжового формулювання конкретизовані для стрижневих систем і використані для знаходження розв'язку задачі стійкості «ферми Мізеса». Досліджено збіжність одержаних розв'язків. Проведено порівняльний аналіз числових результатів із відомими аналітичними розв'язками тієї ж задачі.*

**Ключові слова:** геометрична нелінійність, метод скінченних елементів, принцип віртуальних переміщень, стрижневі системи.

**Вступ.** Під час дослідження напружено-деформованого стану твердих тіл переміщення та деформації, зазвичай, приймають малими. На практиці такі припущення іноді призводять до неправильних результатів, навіть за деформацій, за яких напруження не перевищують межу пружності матеріалу [1]. Необхідність враховувати геометричну нелінійність часто виникає у процесі конструювання авіаційної та космічної техніки, радіотелескопів, у будівництві тощо.

Про використання скінченно-елементного (СЕ) підходу для розв'язування геометрично нелінійних задач механіки йшлося у працях [1-4] та ін. На сьогоднішній день не достатньо розроблено аспекти практичної реалізації СЕ-алгоритмів стосовно окремих класів задач, зокрема, щодо аналізу стрижневих і балочних конструкцій. Мета цієї праці конкретизувати орієнтований на використання методу скінченних елементів (МСЕ) варіант методики розв'язування геометрично нелінійних задач механіки твердого тіла на основі принципу віртуальних переміщень і застосувати його до задач статички стрижневих систем.

### 1. Базові співвідношення

Розглянемо тверде тіло, що займає область  $V \in E^3$  з неперервною за Ліпшицем поверхнею  $S$ . За дії об'ємних  $f_i^B$  та поверхневих (заданих на частині  $S_f$  поверхні  $S$ )  $f_i^S$  сил, а також заданих на частині  $S_u$  поверхні  $S$  переміщень  $u_i^S$  тіло деформується.

Оскільки переміщення та деформації можуть бути великі, процес деформування тіла розглядають покровоко [1-4]. За такого підходу отримують наближений розв'язок рівнянь, що описують рівновагу й умови сумісності тіла, для дискретних моментів часу  $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$ . При цьому процес побудови розв'язку для кожного моменту часу є типовий (повторюється на всіх кроках навантаження). Так, рухаючись крок за кроком від початкової до остаточної конфігурації тіла, одержують історію зміни параметрів стану в тілі.

Розглянемо черговий крок навантаження  $[t, t + \Delta t]$  (розв'язки для всіх попередніх моментів часу відомі). Застосуємо лагранжевий (матеріальний) підхід, розглядаючи рух тіла в стаціонарній декартовій системі координат.

Відповідно до принципу віртуальних переміщень тіло перебуває в стані рівноваги в момент часу  $t + \Delta t$ , якщо [2]

$$\int_{t+\Delta t V} {}^{t+\Delta t} \tau_{ij} \delta_{t+\Delta t} e_{ij} d {}^{t+\Delta t} V = {}^{t+\Delta t} R, \quad (1)$$

де  ${}^{t+\Delta t} \tau_{ij}$  — компоненти тензора напружень Коші (сили віднесені до одиниці площі деформованої поверхні тіла);  $\delta_{t+\Delta t} e_{ij}$  — тензор деформацій, що відповідає накладеним на конфігурацію тіла в момент часу  $t = t + \Delta t$  віртуальним переміщенням  $\delta u_i$ , які є функціями декартових координат  ${}^{t+\Delta t} x_j$  матеріальної точки в момент часу  $t = t + \Delta t$ ;  ${}^{t+\Delta t} V$  — об'єм, який займає тіло в момент часу  $t = t + \Delta t$ ;

$${}^{t+\Delta t} R = \int_{t+\Delta t V} {}^{t+\Delta t} f_i^B \delta u_i d {}^{t+\Delta t} V + \int_{t+\Delta t S_f} {}^{t+\Delta t} f_i^S \delta u_i^S d {}^{t+\Delta t} S.$$

Трудність загального застосування співвідношення (1) полягає у тому, що конфігурація тіла в момент часу  $t = t + \Delta t$  невідома. Її усувають шляхом введення віднесених до початкової (завжди відомої) конфігурації тіла специфічних мір деформацій і напружень — відповідно тензорів деформації Гріна-Лагранжа та напружень Піола-Кірхгофа 2-роду, компоненти яких визначають таким чином

$${}^t \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial {}^t u_i}{\partial {}^0 x_j} + \frac{\partial {}^t u_j}{\partial {}^0 x_i} + \frac{\partial {}^t u_k}{\partial {}^0 x_i} \frac{\partial {}^t u_k}{\partial {}^0 x_j} \right), \quad {}^t \sigma_{ij} = \frac{{}^0 \rho}{{}^t \rho} \frac{\partial {}^0 x_i}{\partial {}^t x_m} \frac{\partial {}^0 x_j}{\partial {}^t x_n} \cdot {}^t \tau_{nm}, \quad (2)$$

де  ${}^0 x_i, {}^t x_i$  — координати, пов'язані з довільною точкою тіла, а  ${}^0 \rho, {}^t \rho$  — густина тіла в момент часу  $t = 0$  та в актуальний момент часу  $t$  ( ${}^t x_i = {}^0 x_i + {}^t u_i$ ) відповідно.

Переміщення, деформації та напруження у момент часу  $t = t + \Delta t$  можемо подати через відомі значення  ${}^t u_i, {}^t \epsilon_{ij}, {}^t \sigma_{ij}$  на початку розглядуваного кроку та відповідні прирости  ${}_0 u_i, {}_0 \epsilon_{ij}, {}_0 \sigma_{ij}$ . З урахуванням співвідношень між деформаціями та переміщеннями (2) прирости деформацій  ${}_0 \epsilon_{ij}$  при цьому можна розкласти на лінійну  ${}_0 e_{ij}$  і нелінійну  ${}_0 \eta_{ij}$  частини.

Використовуючи апроксимації  ${}_0\sigma_{ij} = {}_0C_{ijrs} {}_0e_{rs}$  і  $\delta_0 e_{ij} = \delta_0 e_{ij}$ , базове рівняння принципу віртуальних переміщень набуває вигляду [2]

$$\int_{{}_0V} {}_0C_{ijrs} {}_0e_{rs} \delta_0 e_{ij} d^0V + \int_{{}_0V} {}_0^t\sigma_{ij} \delta_0 \eta_{ij} d^0V = {}^{t+\Delta t}R - \int_{{}_0V} {}_0^t\sigma_{ij} \delta_0 e_{ij} d^0V, \quad (3)$$

де  ${}_0C_{ijrs} = \partial_0^t\sigma_{ij} / \partial_0^t e_{rs}$  — значення компонент тензора, який визначає залежність напружень від деформацій у момент часу  $t$  (питання їх визначення за неізотермічного пружно-пластичного деформування розглянуто, зокрема, у праці [5]).

Аналогічно можна отримати рівняння [2]

$$\int_{{}_tV} {}_tC_{ijrs} {}_te_{rs} \delta_t e_{ij} d^0V + \int_{{}_tV} {}_t\tau_{ij} \delta_t \eta_{ij} d^tV = {}^{t+\Delta t}R - \int_{{}_tV} {}_t\tau_{ij} \delta_t e_{ij} d^tV, \quad (4)$$

в якому всі змінні віднесено до конфігурації тіла в момент часу  $t$ .

Вибір базового формулювання (3) чи (4) залежить від специфіки конкретної задачі, типу SE-процедури та залежностей між напруженнями і деформаціями.

Для числової реалізації МСЕ і побудови «матриць жорсткості» та «векторів навантажень» зручним є матрично-векторне подання базових співвідношень. Зокрема, ключове рівняння (3) на визначення приростів вектора переміщень

${}_0\mathbf{u} = ({}_0u_1, {}_0u_2, {}_0u_3)^T$  на розглядуваному кроці навантаження набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \int_{{}_0V} (\delta_0\mathbf{u})^T [{}_0^t\mathbf{B}_L]^T [{}_0\mathbf{C}] [{}_0^t\mathbf{B}_L] {}_0\mathbf{u} d^0V + \int_{{}_0V} (\delta_0\mathbf{u})^T [{}_0^t\mathbf{B}_{NL}]^T [{}_0^t\mathbf{S}] [{}_0^t\mathbf{B}_{NL}] {}_0\mathbf{u} d^0V = \\ & = \int_{{}_0V} (\delta_0\mathbf{u})^T \mathbf{f}^B d^0V + \int_{{}_0S} (\delta_0\mathbf{u})^T \mathbf{f}^S d^0V - \int_{{}_0V} (\delta_0\mathbf{u})^T [{}_0^t\mathbf{B}_L]^T [{}_0^t\hat{\mathbf{S}}] d^0V, \end{aligned} \quad (5)$$

де індекс  $T$  означає операцію транспонування;  $\mathbf{f}^B$ ,  $\mathbf{f}^S$  — вектори об'ємних і поверхневих сил (для  $t = t + \Delta t$ ). Процедура побудови матриць  $[\mathbf{B}_L]$ ,  $[\mathbf{B}_{NL}]$ ,  $[{}_0\mathbf{C}]$ ,  $[{}_0^t\mathbf{S}]$ ,  $[{}_0^t\hat{\mathbf{S}}]$  така ж, як у випадку лінійної задачі теорії пружності [1].

Внаслідок довільності віртуальних переміщень після застосування МСЕ з урахуванням концепції ізопараметричності [1] приходимо до системи рівнянь

$$[\mathbf{K}]\mathbf{q} = \mathbf{R} - \mathbf{F}$$

для визначення вектора  $\mathbf{q}$  приростів переміщень вузлів SE-поділу тіла на кроці  $[t, t + \Delta t]$ . Тут матрицю жорсткості  $[\mathbf{K}]$ , вектори  $\mathbf{R}$  діючого в момент часу  $t + \Delta t$  навантаження та  $\mathbf{F}$  отримано шляхом підсумовування відповідних матрично-векторних характеристик окремих SE вигляду

$$[\mathbf{K}]^{(e)} = \int_{{}_0V} [{}_0^t\tilde{\mathbf{B}}_L]^T [{}_0\mathbf{C}] [{}_0^t\tilde{\mathbf{B}}_L] d^0V + \int_{{}_0V} [{}_0^t\tilde{\mathbf{B}}_{NL}]^T [{}_0^t\mathbf{S}] [{}_0^t\tilde{\mathbf{B}}_{NL}] d^0V, \quad (6)$$

$$\mathbf{F}^{(e)} = {}_0^t\mathbf{F} = \int_{{}_0V} [{}_0^t\tilde{\mathbf{B}}_L]^T [{}_0^t\hat{\mathbf{S}}] d^0V, \quad \mathbf{R}^{(e)} = \int_{{}_0V} [\mathbf{N}]^T \mathbf{f}^B d^0V + \int_{{}_0S} [\mathbf{N}]^T \mathbf{f}^S d^0S^f \quad (7)$$

(у співвідношеннях (6), (7) матриці  $[\tilde{\mathbf{B}}_L]$ ,  $[\tilde{\mathbf{B}}_{NL}]$  сформовано шляхом дії відповідних матриць  $[\mathbf{B}_L]$ ,  $[\mathbf{B}_{NL}]$  на матрицю функцій форми  $[\mathbf{N}]$  [1]).

## 2. Стрижневі системи

Адаптуємо запропонований варіант методики до розв'язування геометрично нелінійних задач статки стрижневих систем.

Розглянемо віднесену до загальної прямокутної декартової системи координат  $X_i$  навантажену стрижневу систему. Відповідно до концепції МСЕ подамо її у вигляді об'єднання ізопараметричних СЕ [2]. Матричні характеристики СЕ побудуємо у локальній системі координат  $x_i$ , природно пов'язаній із відповідним стрижнем (див. рис. 1), а перед сумуванням трансформуємо їх (оскільки невідомими є присто переміщень вузлів у системі координат  $X_i$ ) за формулами

$$[\mathbf{K}]^X = [\Gamma]^T [\mathbf{K}]^x [\Gamma]; \quad \mathbf{F}^X = [\Gamma]^T \mathbf{F}^x \quad \left( [\Gamma] = \begin{bmatrix} \cos(x_1, X_1) & \cos(x_1, X_2) & \dots \\ \cos(x_2, X_1) & \cos(x_2, X_2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \right).$$

Базове рівняння (3) для стрижня можемо записати так

$${}^0A \int_0^L E e_{11} \delta_0 e_{11} d^0l + {}^0A \int_0^L {}^t\sigma_{11} \delta_0 \eta_{11} d^0l = {}^{t+\Delta t}R - {}^0A \int_0^L {}^t\sigma_{11} \delta_0 e_{11} d^0l,$$

де  ${}^0A$  та  ${}^0L$  — початкові площа поперечного перерізу та довжина стрижня;  $E = d_0^t\sigma_{11}/d_0^t\epsilon_{11}$ ;  ${}^{t+\Delta t}R$  — віртуальна робота зовнішніх сил;

$${}^0e_{11} = \frac{d_0u_1}{d^0x_1} + \frac{d_0^t u_1}{d^0x_1} \frac{d_0u_1}{d^0x_1} + \frac{d_0^t u_2}{d^0x_1} \frac{d_0u_2}{d^0x_1}; \quad {}^0\eta_{11} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{d_0u_1}{d^0x_1} \right)^2 + \left( \frac{d_0u_2}{d^0x_1} \right)^2 \right].$$

Матриці та вектори у ключовому рівнянні (5) при цьому набувають вигляду

$$[{}^t_0\mathbf{B}_L] = \left[ \left( 1 + \frac{d_0^t u_1}{d^0x_1} \right) \frac{d}{d^0x_1} \quad \frac{d_0^t u_2}{d^0x_1} \frac{d}{d^0x_1} \right]; \quad [{}^t_0\mathbf{B}_{NL}] = \begin{bmatrix} d/d^0x_1 & 0 \\ 0 & d/d^0x_1 \end{bmatrix};$$

$$[\mathbf{C}] = [E]; \quad [{}^t_0\mathbf{S}] = [{}^t_0\hat{\mathbf{S}}] = [{}^t_0\sigma_{11}]; \quad {}^0\mathbf{u} = ({}^0u_1, {}^0u_2)^T.$$

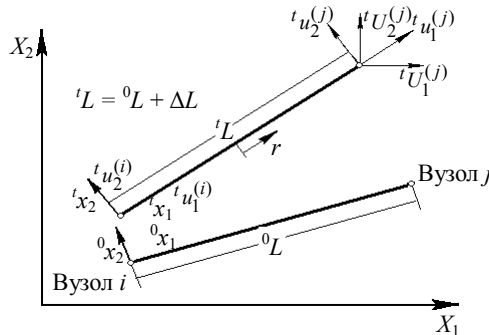


Рис. 1. Деформування лінійного ізопараметричного СЕ у декартовій системі координат

Тоді, відповідно до концепції ізопараметричності [1] для лінійного СЕ з двома вузлами  $i$  та  $j$  (див. рис. 1) маємо [2]

$${}^0\mathbf{u} = [\mathbf{N}] \mathbf{q}^{(e)}, \quad {}^0\mathbf{x} = [\mathbf{N}] \mathbf{x}^{(e)},$$

де  $[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 \end{bmatrix}$ ,  $h_1 = 0,5(1+r)$ ,  $h_2 = 0,5(1-r)$ ,  $r \in [-1, 1]$  — осьова координата

стрижня;  $\mathbf{q}^{(e)} = ({}^0u_1^{(i)} \ {}^0u_2^{(i)} \ {}^0u_1^{(j)} \ {}^0u_2^{(j)})^T$ ,  $\mathbf{x}^{(e)} = ({}^0x_1^{(i)} \ {}^0x_2^{(i)} \ {}^0x_1^{(j)} \ {}^0x_2^{(j)})^T$  — вектори переміщень і координат вузлів СЕ;  $\mathbf{x} = ({}^0x_1 \ {}^0x_2)^T$ . Відповідно

$$[{}^t_0\tilde{\mathbf{B}}_L] = \left[ \left( 1 + \frac{d^t u_1}{d^0 x_1} \right) \frac{dh_1}{d^0 x_1} \quad \frac{d^t u_2}{d^0 x_1} \frac{dh_1}{d^0 x_1} \quad \left( 1 + \frac{d^t u_1}{d^0 x_1} \right) \frac{dh_2}{d^0 x_1} \quad \frac{d^t u_2}{d^0 x_1} \frac{dh_2}{d^0 x_1} \right],$$

$$[{}^t_0\mathbf{K}_L] = {}^0A \int_{-1}^1 [{}^t_0\tilde{\mathbf{B}}_L]^T E [{}^t_0\tilde{\mathbf{B}}_L] {}^0J dr = \frac{E \cdot {}^0A}{[{}^0L]^3} \begin{pmatrix} a^2 & ab & -a^2 - ab \\ ab & b^2 & -ab - b^2 \\ -a^2 - ab & a^2 & ab \\ -ab & -b^2 & ab & b^2 \end{pmatrix},$$

$$[{}^t_0\mathbf{K}_{NL}] = {}^0A \int_{-1}^1 [{}^t_0\tilde{\mathbf{B}}_{NL}]^T {}^t_0\sigma_{11} [{}^t_0\tilde{\mathbf{B}}_{NL}] {}^0J dr = \frac{{}^t_0\sigma_{11} \cdot {}^0A}{{}^0L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ & 1 & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

де якобіан переходу  ${}^0J = d^0 x_1 / dr = {}^0L/2$ ;  $a = {}^t u_1^{(i)} - {}^t u_1^{(j)} - {}^0L$ ;  $b = {}^t u_2^{(i)} - {}^t u_2^{(j)}$ .

Як приклад розглянуто «ферму Мізеса» (див. рис. 2) за  ${}^0L = 1$  м,  ${}^0A = 0,01$  м. На рис. 3 суцільною лінією подано залежність діючої сили від переміщення точки її прикладання (відомий аналітичний розв'язок цієї задачі [2] наведено штриховою лінією).

Дослідження збіжності показали, що для отримання відносно точних розв'язків достатньо навіть одного СЕ для стрижня (результати з одним, двома та трьома СЕ для стрижня співпадають із точністю до 1 %).

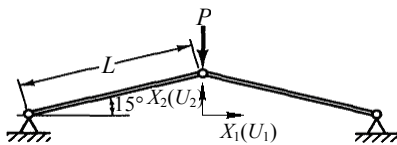


Рис. 2. «Ферма Мізеса»

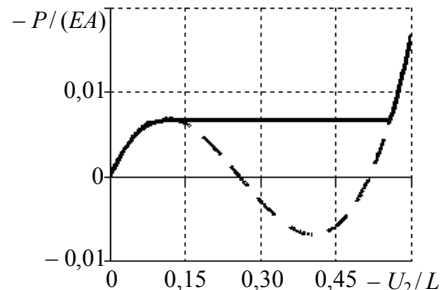


Рис. 3. Залежність «сила-переміщення»

**Висновки.** Загальну методику моделювання процесів геометрично-нелінійного деформування адаптовано до стрижневих систем. Запропоновану методику застосовано до розв'язування задачі стійкості «ферми Мізеса». Показано узгодженість отриманих скінченно-елементних розв'язків із відомими в літературі аналітичними розв'язками. Запропонований підхід можна поширити на балочні конструкції за дії комплексного (силового та температурного) навантаження, що буде подальшим етапом досліджень.

### Література

- [1] *Zienkiewicz, O. C. Finite Element Method; V. 1. The Basis / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor.* — London: Butterworth Heinemann, 2000. — 689 с.
- [2] *Bathe, K. J. Finite Element Procedures Analysis / K. J. Bathe.* — Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1995. — 1037 p.
- [3] *Ibrahimbegovic, A. Nonlinear Solid Mechanics: Theoretical Formulations and Finite Element Solution Methods / A. Ibrahimbegovic.* — Springer, 2009. — 574 p.
- [4] *Gosz, M. Finite Element Method: Applications in Solids, Structures, and Heat Transfer / M. Gosz.* — CRC Press, 2005. — 400 p.
- [5] *Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл; під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра. Т. 4. Термомеханіка намагнечуваних електропровідних термочутливих тіл / О. Р. Гачкевич, Б. Д. Дробенко.* — Львів: СПОЛЮМ, 2010. — 256 с.

## Finite element simulation of geometrically nonlinear deformation of trusses

Bohdan Drobenko

*A finite element method for solving mechanical geometrically nonlinear problems based on virtual displacements approach is considered. The three-dimensional basic Total Lagrangian and Updated Lagrangian formulations are given with account of kinematic nonlinear effects due to large displacements, rotations, and strains. As example Total Lagrangian formulation equations are written for trusses and used to solve the problem of «Mises' truss» stability. Investigations of solutions convergence and comparison of numerical and analytical solutions of the problem have done.*

## Конечно-элементное моделирование процессов геометрически нелинейного деформирования стержневых конструкций

Богдан Дробенко

*Рассмотрена ориентированная на использование метода конечных элементов методика решения геометрически нелинейных задач механики твердого деформируемого тела на основании принципа виртуальных перемещений. Приведены базовые соотношения в трехмерном случае полной и адаптированной лагранжевых формулировок с учетом кинематических эффектов, возникающих при больших перемещениях, вращениях и деформациях. В качестве примера соотношения полной лагранжевой формулировки конкретизированы для стержневых систем и использованы для определения решения задачи об устойчивости «фермы Мизеса». Исследована сходимость полученных решений. Проведен сравнительный анализ численных результатов с известными аналитическими решениями той же задачи.*

Представлено доктором технічних наук П. Малахівським

Отримано 22.07.10