УДК 519.6

Середньоквадратична апроксимація дійсної функції двох змінних модулем дискретного перетворення Фур'є. II. Числові алгоритми

Лариса Процах[1], Петро Савенко[2], Мирослава Ткач[3]

[1] Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3*б*, Львів, 79060
[2] д. т. н., с. н. с., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3*б*, Львів, 79060, e-mail: spo@iapmm.lviv.ua
[3] Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3*б*, Львів, 79060

Продовжується дослідження задачі нелінійної середньоквадратичної апроксимації дійсної фінітної невід'ємної функції від двох змінних модулем подвійного дискретного перетворення Фур'є, що залежить від двох параметрів [1]. Побудовано й обґрунтовано числові алгоритми для знаходження ліній галуження та відгалужених розв'язків. Наведено числові приклади.

Ключові слова: нелінійна середньоквадратична апроксимація, дискретне подвійне перетворення Фур'є, нелінійна двопараметрична спектральна задача, неєдиність і галуження розв'язків.

Вступ. Робота є продовження дослідження задачі нелінійної середньоквадратичної апроксимації дійсної фінітної невід'ємної функції від двох змінних модулем подвійного дискретного перетворення Фур'є, що залежить від двох параметрів, яке подане в роботі [1][1]. Суттєвою особливістю задачі нелінійної апроксимації є неєдиність і галуження розв'язків. Задача про знаходження множини точок галуження є, своєю чергою, недостатньо досліджена нелінійна спектральна двопараметрична задача. Найповніше розвинуті методи дослідження та знаходження числових розв'язків однопараметричних спектральних задач за наявності дискретного спектра [2-6]. Особливою відмінністю нелінійних двопараметричних задач є існування зв'язних компонент спектра, які у випадку дійсних параметрів мають вигляд спектральних ліній [7].

У роботі подано теорему існування зв'язних компонент спектра голоморфних матричних функцій, які залежать від двох спектральних параметрів, що обґрунтовує застосування методів неявних функцій до багатопараметричних спектральних задач [7]. Показано застосовність цієї теореми до аналізу спектра двовимірного інтегрального однорідного рівняння, до якого зведено задачу про знаходження ліній можливого галуження розв'язків рівняння Гаммерштейна [1]. Побудовано й

[1] У цій роботі нумерація розділів і формул продовжує нумерацію розділів і формул, використану у роботі [1]

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2010, вип. 11, 150-159

обґрунтовано алгоритми для знаходження оптимальних числових розв'язків задачі апроксимації, наведено числові приклади.

2. Нелінійна двопараметрична спектральна задача

Згідно з [8] точками можливого галуження розв'язків системи нелінійних рівнянь (23), (24) є такі значення параметрів $\left(c_1^{(0)}, c_2^{(0)}\right) \in \mathbb{R}^2$, при яких лінійне однорідне рівняння (25) має відмінні від тотожного нуля розв'язки. Власні функції рівняння (25) використовують при побудові відгалужених розв'язків рівнянь (23) та (24).

Задача про знаходження відмінних від $f_0(Q, c_1, c_2)$ розв'язків рівняння (25) є нелінійна двопараметрична спектральна задача, оскільки спектральні параметри c_1 і c_2 входять у ядро інтегрального оператора нелінійно. Вона полягає в знаходженні таких значень дійсних параметрів $(c_1, c_2) \in \Lambda_c$, при яких рівняння (25) має відмінні від тотожного нуля розв'язки.

В операторній формі нелінійну двопараметричну задачу запишемо у вигляді

$$\mathscr{A}(c_1, c_2)x \equiv \left[E - T(c_1, c_2)\right]x = 0, \tag{26}$$

де E — одиничний, а $T(c_1, c_2)$ — лінійний інтегральний оператори, які діють у банаховому просторі $C(\Omega)$. Необхідно знайти власні значення $\mathbf{c} = \left(c_1^{(0)}, c_2^{(0)}\right) \in \Lambda_c$ і відповідні їм власні вектори $x^{(0)} \in C(\Omega)$ $\left(x^{(0)} \neq 0\right)$ такі, що $\mathscr{A}\left(c_1^{(0)}, c_2^{(0)}\right)x^{(0)} = 0$.

Безпосередньою перевіркою встановлюємо, що для довільних значень параметрів $(c_1, c_2) \in \Lambda_c$ однією з власних функцій є

$$\hat{\varphi}_0(Q, \mathbf{c}) = \iint_G F(Q')K(Q, Q', \mathbf{c})\,dQ'. \tag{27}$$

Запишемо необхідне надалі спряжене з (25) рівняння

$$\psi(Q) = T^*(\mathbf{c})\psi \equiv \frac{F(Q)}{f_0(Q, \mathbf{c})}\iint_G K(Q, Q', \mathbf{c})\psi(Q')\,dQ'. \tag{28}$$

Для довільних $(c_1, c_2) \in \Lambda_c$ однією з власних функцій рівняння (28) є

$$\hat{\psi}_0(Q) = F(Q). \tag{29}$$

Існування відмінних від тотожного нуля розв'язків рівняння (25) для довільних $(c_1, c_2) \in \Lambda_c$ свідчить про існування зв'язної компоненти спектра, яка співпадає з областю Λ_c.

Для знаходження відмінних від $\hat{\varphi}_0(Q, \mathbf{c})$ розв'язків виключимо з ядра інтегрального рівняння (25) власну функцію (27), а саме, розглянемо рівняння

$$\varphi(Q, \mathbf{c}) = \tilde{T}(\mathbf{c})\varphi \equiv \iint_G \mathscr{K}(Q, Q', \mathbf{c})\varphi(Q')\,dQ', \tag{30}$$

де

$$\mathcal{K}(Q,Q',\mathbf{c})=\frac{F(Q')}{f_0(Q',\mathbf{c})}K(Q,Q',\mathbf{c})-\psi_0(Q)\varphi_0(Q',\mathbf{c}),\tag{31}$$

$$\psi_0(Q)=\frac{\hat{\psi}_0(Q)}{\|\hat{\psi}_0\|_{L_2}},\qquad \varphi_0(Q',\mathbf{c})=\frac{\hat{\varphi}_0(Q',\mathbf{c})}{\|\hat{\varphi}_0\|_{L_2}}.\tag{32}$$

Із леми Шмідта [8] випливає, що ні для яких значень $(c_1, c_2)\in\Lambda_c$ $\varphi_0(Q, \mathbf{c})$ не буде власною функцією цього рівняння. Тим самим зі спектра оператора виключена зв'язна компонента, яка співпадає з областю Λ_c і відповідає функції $\varphi_0(Q, \mathbf{c})$.

Використовуючи властивість виродженості ядра $\mathcal{K}(Q,Q',c_1,c_2)$, зведемо рівняння (25) до еквівалентної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, коефіцієнти якої аналітично залежать від параметрів c_1, c_2. Рівняння (25) запишемо у вигляді

$$\varphi(s_1,s_2)=\sum_{n=-N}^{N}\sum_{m=-M}^{M}x_{nm}e^{i[c_1ns_1+c_2ms_2]}-x_0\psi_0(s_1,s_2),\tag{33}$$

де x_{nm}, x_0 — сталі, що визначаються за формулами

$$x_{nm}=\frac{c_1}{2\pi}\frac{c_2}{2\pi}\iint_G\frac{F(s_1',s_2')}{f_0(s_1',s_2',c_1,c_2)}e^{-i[c_1ns_1'+c_2ms_2']}\varphi(s_1',s_2')ds_1'ds_2'\ \left(n=\overline{-N,N};\ m=\overline{-M,M}\right),$$
$$x_0=\iint_G\varphi_0(s_1',s_2',c_1,c_2)\varphi(s_1',s_2')ds_1'ds_2'.$$

Із формули (33) випливає, що функція $\varphi(s_1, s_2)$ буде відомою, якщо знатимемо x_{nm}, x_0.

Помножимо обидві частини рівності (33) на $\dfrac{F(s_1',s')}{f_0(s_1',s_2',c_1,c_2)}e^{-i[c_1ks_1'+c_2ls_2']}$ при $k=\overline{-N,N}$, $l=\overline{-M,M}$ та на $\varphi_0(s_1',s_2')$ і проінтегруємо по Ω. Одержуємо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження x_{nm}, x_0

$$x_{kl}=\sum_{n=-N}^{N}\sum_{m=-M}^{M}a_{nm}^{(kl)}(c_1,c_2)x_{nm}\qquad\left(k=\overline{-N,N};\ l=\overline{-M,M}\right),\tag{34}$$

де

$$a_{nm}^{(kl)}(c_1,c_2)=t_{nm}^{(kl)}(c_1,c_2)-\frac{b^{(kl)}(c_1,c_2)}{1+d_0(c_1,c_2)}d_{nm}(c_1,c_2),$$

$$t_{nm}^{(kl)}(c_1,c_2)=\frac{c_1c_2}{4\pi^2}\iint_G\frac{F(s_1,s_2)}{f_0(s_1,s_2,c_1,c_2)}e^{i[c_1(n-k)s_1+c_2(m-l)s_2]}ds_1ds_2,$$

$$b^{(kl)}(c_1,c_2)=\frac{c_1c_2}{4\pi^2}\iint_G\frac{F(s_1,s_2)}{f_0(s_1,s_2,c_1,c_2)}\psi_0(s_1,s_2)e^{-i[c_1ks_1+c_2ls_2]}ds_1ds_2,$$

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2010, вип. 11, 150-159

$$d_{nm}\left(c_1,c_2\right)=\iint\limits_G \varphi_0\left(s_1,s_2\right)e^{i\left[c_1 n s_1+c_2 m s_2\right]}ds_1 ds_2\ ,$$

$$d_0\left(c_1,c_2\right)=\iint\limits_G \psi_0\left(s_1,s_2\right)\varphi_0\left(s_1,s_2,c_1,c_2\right)ds_1 ds_2\ .$$

Для коефіцієнтів матриці $\mathbf{A}_M\left(c_1,c_1\right)=\left\|a_{nm}^{(kl)}\left(c_1,c_1\right)\right\|_{\substack{k,n=\overline{-N,N}\\ m,l=\overline{-M,M}}}$ справджується рівність $a_{mn}^{(lk)}\left(c_1,c_1\right)=\overline{a_{nm}^{(kl)}\left(c_1,c_1\right)}$, тобто $\mathbf{A}_M$ ермітова або самоспряжена матриця.

Еквівалентну до (26) нелінійну двопараметричну спектральну задачу, що відповідає системі рівнянь (34), запишемо у вигляді

$$\mathscr{A}_M\left(c_1,c_2\right)\mathbf{x}\equiv\left[\mathbf{E}_M-\mathbf{A}_M\left(c_1,c_2\right)\right]\mathbf{x}=0\,, \tag{35}$$

де $\mathbf{E}_M$ — одинична матриця розмірності $N_2\times M_2$.

Система (34) буде мати відмінні від нульового розв'язки, якщо

$$\Psi\left(c_1,c_2\right)=\det\left[\mathbf{E}_M-\mathbf{A}_M\left(c_1,c_2\right)\right]=0\,. \tag{36}$$

Легко переконатися, що $\Psi(c_1, c_2)$ є дійсна функція. Справді, оскільки $\mathbf{T}_M(c_1, c_2)$ ермітова матриця, то, очевидно, що $\mathbf{E}-\mathbf{A}_M(c_1, c_2)$ також ермітова матриця. Як відомо [9], визначник ермітової матриці є дійсне число. Отже, $\Psi(c_1, c_2)$ є дійсна функція від дійсних аргументів c_1, c_2.

Таким чином, задачу про знаходження множини власних значень рівняння (25) або еквівалентної до нього лінійної алгебраїчної системи (34) зведено до знаходження нулів функції $\Psi(c_1, c_2)$.

Розглянемо необхідну надалі допоміжну одновимірну спектральну задачу (як частковий випадок задачі (35)) на промені $c_2=\gamma c_1$, де γ — дійсний коефіцієнт, до того ж $(c_1, c_2)\in\Lambda_c$. Введемо в розгляд матрицю-функцію $\tilde{\mathscr{A}}_M\left(c_1\right)\equiv\mathscr{A}_M\left(c_1,\gamma c_1\right)$, з якою зв'язана одновимірна спектральна задача

$$\tilde{\mathscr{A}}_M\left(c_1,\gamma c_1\right)\mathbf{x}=\left[\mathbf{E}_M-\mathbf{A}_M\left(c_1,\gamma c_1\right)\right]\mathbf{x}=0\,. \tag{37}$$

Легко переконатися, що з властивостей коефіцієнтів матриці $\mathbf{A}_M(c_1, c_2)$ випливає, що матрична функція $\mathscr{A}_M(c_1, c_2)$ є неперервна й диференційовна за своїми змінними в будь-якій відкритій та обмеженій області $\Lambda\subset\Lambda_c\subset\mathbb{R}^2$, тобто $\mathscr{A}_M(c_1, c_2)$ є голоморфна матриця-функція, якщо c_1, c_2 продовжити в область комплексних змінних.

Відповідне до (37) рівняння (36) має вигляд

$$\Psi\left(c_1,\gamma c_1\right)=\det\left[\mathbf{E}_M-\mathbf{A}_M\left(c_1,\gamma c_1\right)\right]=0\,. \tag{38}$$

Спектри задач (35), (37) позначимо відповідно через $s\left(\mathscr{A}\right)$ й $s\left(\tilde{\mathscr{A}}\right)$, а область зміни параметра c_1 через $\Lambda_{c_1}=\left\{c_1:\ 0<c_1\le a\right\}$. Тоді до властивостей спектра задачі (35) можна застосувати *теорему 1* з [10], яку для цієї задачі сформулюємо так.

Теорема 2. Нехай для кожного $\mathbf{c} = (c_1, c_2) \in \Lambda_c$ матриця $\mathscr{A}_M(c_1, c_2) \in \in \mathscr{L}\left(\mathbb{C}^{N_2 \times M_2}, \mathbb{C}^{N_2 \times M_2}\right)$ є фредгольмів оператор із нульовим індексом, матриця-функція $\mathscr{A}(\cdot,\cdot) : \Lambda_c \to \mathscr{L}\left(\mathbb{C}^{N_2 \times M_2}, \mathbb{C}^{N_2 \times M_2}\right)$ голоморфна в області Λ_c, причому $s\left(\tilde{\mathscr{A}}\right) \neq \Lambda_{c_1}$. Нехай окрім цього функція $\Psi(c_1, c_2)$ неперервно диференційовна в Λ_c. Тоді:

1) кожна точка спектра $c_1^{(0)} \in s\left(\tilde{\mathscr{A}}\right)$ ізольована, є власним значенням матриці-функції $\tilde{\mathscr{A}}\left(c_1\right) \equiv \mathscr{A}\left(c_1, \gamma c_1\right)$, їй відповідає скінченновимірний власний підпростір $N\left(\tilde{\mathscr{A}}\left(c_1^{(0)}\right)\right)$ і скінченновимірний кореневий підпростір;

2) кожна точка $\mathbf{c}^{(0)} = \left(c_1^{(0)}, \gamma c_1^{(0)}\right) \in \mathbf{\Lambda}_c$ є точка спектра матриці-функції $\mathscr{A}(\lambda_1, \lambda_2)$;

3) якщо $\Psi'_{c_2}\left(c_1^{(0)}, c_2^{(0)}\right) \neq 0$, то в деякому околі точки $c_1^{(0)}$ існує єдина неперервна диференційовна функція $c_2 = c_2(c_1)$, яка є розв'язком рівняння (36), тобто в деякій бікруговій області $\mathbf{\Lambda}_0 = \left\{\left(c_1, c_2\right) : \left|c_1 - c_1^{(0)}\right| < \varepsilon_1, \left|c_2 - c_2^{(0)}\right| < \varepsilon_2\right\}$ існує зв'язна компонента спектра матриці-функції $\mathscr{A}(c_1, c_2)$, де ε_1, ε_2 — малі дійсні константи.

Доведення цієї теореми стосовно нелінійної двопараметричної спектральної задачі типу (35) для більш загального випадку, коли оператори E і $T(c_1, c_2)$ діють у нескінченновимірному банаховому просторі, подано в [10]. Для виконання умов *теореми 1* з [10] необхідно показати фредгольмовість матриці-функції $\mathscr{A}(c_1, c_2)$ для $(c_1, c_2) \in \Lambda_c$. Ця властивість випливає з відомої рівності [9]

$$\dim\left(\ker \mathscr{A}\right) = \dim\left(\ker \mathscr{A}^*\right).$$

Існування зв'язних компонент спектра матриці-функції $\mathscr{A}(c_1, c_2)$, за умови $\Psi'_{c_2}\left(c_1^{(0)}, c_2^{(0)}\right) \neq 0$, випливає з теореми про існування неявно заданої функції [11, 12].

Нехай $c_1^{(i)}$ — корінь рівняння (38). Тоді $\left(c_1^{(i)}, c_2^{(i)} = \gamma c_1^{(i)}\right) \in \mathbf{\Lambda}_c$ є власне значення задачі (33). Розглядаючи рівняння $\Psi(c_1, c_2) = 0$ як задачу про знаходження неявно заданої функції $c_2 = c_2(c_1)$ в околі точки $c_1^{(i)}$, для якої виконуються умови теореми існування [12], приходимо до задачі Коші

$$\frac{dc_2}{dc_1} = -\frac{\Psi'_{c_1}\left(c_1, c_2\right)}{\Psi'_{c_2}\left(c_1, c_2\right)}, \tag{39}$$

$$c_2^{(i)}\left(c_1^{(i)}\right) = \gamma c_1^{(i)}. \tag{40}$$

Розв'язуючи задачу (39), (40) у деякому околі точки $c_1^{(i)}$, знаходимо i-ту зв'язну компоненту спектра (спектральну лінію) матриці-функції $\mathscr{A}_M(c_1, c_2)$.

За знайденими розв'язками задачі Коші для фіксованих значень $\left(c_1^{(i)}, c_2^{(i)}\right)$ власні функції рівняння (25) визначаємо через власні вектори матриці $\mathbf{A}_M\left(c_1^{(i)}, c_2^{(i)}\right)$,

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2010, вип. 11, 150-159

які знаходимо відомими методами. При цьому чотиривимірну матрицю $\mathbf{A}_M$ зводимо до двовимірної, виконуючи відповідну перенумерацію її елементів.

3. Алгоритм знаходження розв'язків нелінійного рівняння

Наведемо один з ітераційних процесів для знаходження числових розв'язків системи (14), в основу якого закладено метод послідовних наближень [13]

$$u_{n+1}(Q) = B_1(u_n, v_n) \equiv \iint_G K(Q,Q',\mathbf{c}) F(Q') \frac{u_n(Q')}{\sqrt{u_n^2(Q') + v_n^2(Q')}} dQ',$$

$$v_{n+1}(Q) = B_2(u_n, v_n) \equiv$$

$$\equiv \iint_G K(Q,Q',\mathbf{c}) F(Q') \frac{v_n(Q')}{\sqrt{u_n^2(Q') + v_n^2(Q')}} dQ' \qquad (n = 0,1,...). \tag{41}$$

Позначимо через $\{\mathbf{I}_n\}$ послідовність значень функції, яку одержуємо за формулою (12), підставляючи туди функцію $\arg f_n(Q) = \operatorname{arctg}\left[v_n(Q)/u_n(Q)\right]$, отриману на основі послідовних наближень (41). Для послідовності $\{\mathbf{I}_n\}$ справджується теорема 4.2.1 із [14], з якої випливає, що послідовність $\{\mathbf{I}_n\}$ є релаксаційна для функціонала (7), а числова послідовність $\{\sigma(\mathbf{I}_n)\}$ — збіжна.

Для проведення ітераційного процесу (41) у випадку парної за обома аргументами функції $F(s_1, s_2)$ та симетричних областей G й Ω доцільно використовувати властивість інваріантності інтегральних операторів $B_1(u, v)$, $B_2(u, v)$ у системі (14) відносно типу парності функцій $u(s_1, s_2)$, $v(s_1, s_2)$. Функції u, v, які мають певний тип парності за відповідним аргументом, належать до відповідних інваріантних множин U_{ij}, V_{kl} простору $\mathbf{C}(\Omega)$, де індекси i, j, k, l набувають значень 0 або 1. Зокрема, якщо $u(s_1, s_2) \in U_{01}$, то $u(-s_1, s_2) = u(s_1, s_2)$, а $u(s_1, -s_2) = -u(s_1, s_2)$. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що справджуються такі включення

$$B_1(U_{ij} \cup V_{k\ell}) \subset U_{ij}, \qquad B_2(U_{ij} \cup V_{k\ell}) \subset V_{k\ell},$$

$$\mathbf{B}(U_{ij} \cup V_{k\ell}) \subset U_{ij} \cup V_{k\ell}.$$

Із цих співвідношень випливає можливість існування нерухомих точок оператора $\mathbf{B}$, які належать до відповідної інваріантної множини, тобто до розв'язків системи (14) і відповідно — рівняння (10).

4. Числовий приклад

Розглянемо приклад апроксимації функції $F(s_1, s_2) = \cos(\pi s_1/2)\left|\sin(\pi s_2)\right|$ (рис. 1), заданої в області $\bar{G} = \left\{(s_1, s_2):\ |s_1| \le 1,\ |s_2| \le 1\right\} \subset \Omega$, для $N_2 \times M_2 = 11\times 11$ і значень параметрів $c_1 = 1{,}6$; $c_2 = 1{,}2$, що знаходяться на промені $c_2 = 0{,}75c_1$. Лінії можливого галуження розв'язків системи (14) і відповідно рівняння (10), як розв'язків двовимірної спектральної задачі (25), наведено на рис. 2. Тут перші лінії галуження позначено номерами 1 і 2. Розв'язкам, що відгалужуються у точках цих ліній,

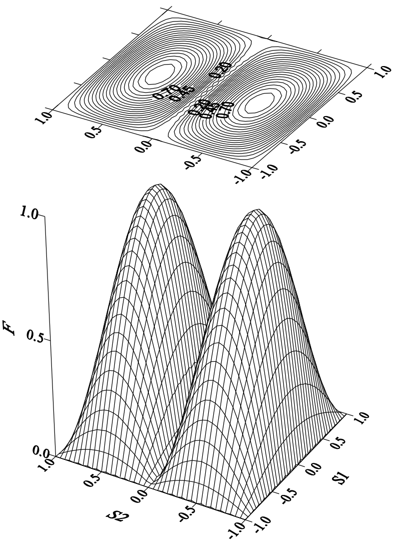


Рис. 1

відповідають непарні за s_2 функції $\arg f(s_1, s_2)$, а коефіцієнти перетворення $I_{n,m}$ $\left(n=\overline{-N,N};\ m=\overline{-M,M}\right)$ є дійсні, але несиметричні відносно площини XOZ.

На рис. 3 у логарифмічному масштабі наведено значення функціонала σ, які він має на розв'язках двох типів для значень параметра $c_2 = 0{,}75c_1$: крива 1 відповідає розв'язку в класі дійсних функцій $f_0(Q)$, крива 2 — відгалуженому розв'язку з непарним за s_2 аргументом $\arg f(s_1, s_2)$. Аналіз рис. 3 показує, що в точці $c_1 \approx 0{,}77$ від дійсного розв'язку відгалужуються ефективніші комплексно-спряжені між собою розв'язки, на яких функціонал σ набуває менші значення, ніж на дійсному розв'язку.

Якщо ввести в розгляд параметр $C_2 = Mc_2$, який характеризує кількість базисних функцій у перетворенні (1), то однакова ефективність апроксимації (однакові значення функціонала σ на дійсному та відгалуженому розв'язках) досягається з використанням відгалуженого розв'язку за зменшенням кількості базисних функцій на величину $\Delta C_2 = 0{,}75\Delta c_1$.

На рис. 4 для $c_1 = 1{,}6$; $c_2 = 1{,}2$ наведено амплітуду (*а*) й аргумент (*б*) апроксимуючої функції. Значення амплітуд коефіцієнтів перетворення Фур'є, що відповідають цьому розв'язку, показано на рис. 5. Як бачимо, значення амплітуд коефіцієнтів є несиметричні відносно площини YOZ, хоча амплітуда апроксимуючої функції (рис. 4*а*) симетрична. Для порівняння апроксимуючих функцій, які відповідають різним розв'язкам рівняння (10), на рис. 6 у перерізі $s_1 \equiv 0$ наведено криві, що відповідають різним типам наведених розв'язків. Крива 1 відповідає

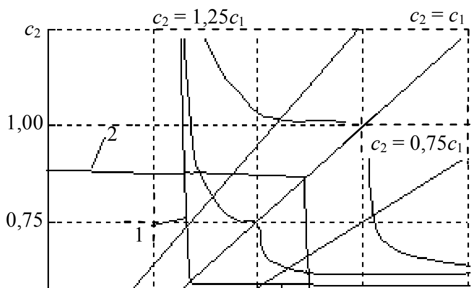


Рис. 2

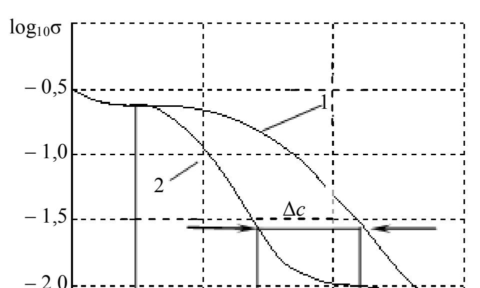
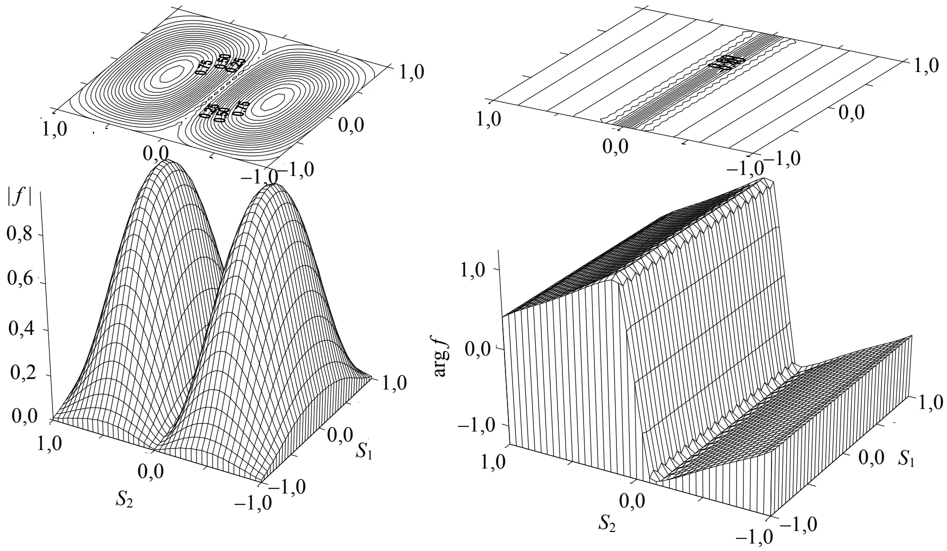


Рис. 3



а *б*

Рис. 4

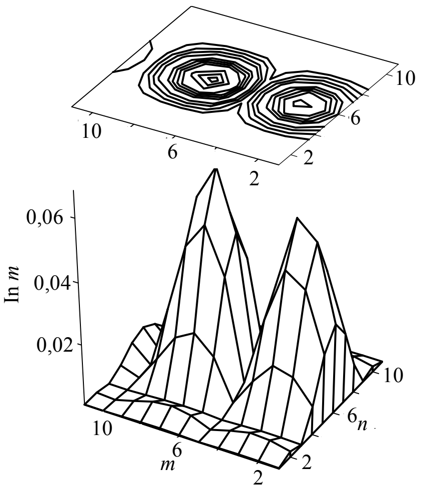


Рис. 5

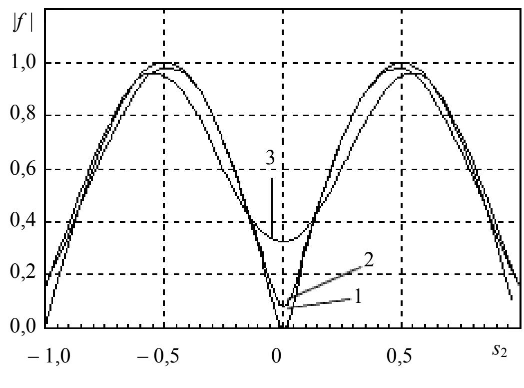


Рис. 6

заданій функції $F(0, s_2)$, крива 2 — відгалуженому розв’язку, крива 3 — дійсному розв’язку $f_0(0, s_2)$. Очевидно, що відгалужений розв’язок краще (у розумінні функціонала σ) наближає за модулем задану функцію.

Висновки. Відзначимо основні особливості та проблеми, що виникають під час досліджень розглянутого в роботі класу задач:

- Основною трудністю при розв’язуванні цього класу задач є дослідження неєдиності та галуження існуючих розв’язків, які залежать від параметрів c_1, c_2, що входять у дискретне перетворення Фур’є. Як випливає з досліджень, наведених, зокрема, в роботах [14, 15] для часткового випадку, коли $F(s_1, s_2) = F_1(s_1) \cdot F_2(s_2)$, кількість існуючих розв'язків із ростом параметрів c_1, c_2 значно зростає. Зазначимо, що в багатьох практичних застосуваннях, зокрема в задачах синтезу випромінюючих систем, важливо отримати найкраще наближення до заданої функції $F(s_1, s_2)$ для порівняно невеликих значень параметрів c_1, c_2, що дозволяє обмежитися дослідженнями декількох перших точок (ліній) галуження.

- Під час знаходження точок (ліній) галуження розв'язків рівняння (8) необхідно, на відміну від [14, 15], розв'язувати недостатньо вивчену багатопараметричну спектральну задачу. Запропоновані в цій роботі підходи дозволяють знаходити розв'язки нелінійної двопараметричної спектральної задачі для однорідних інтегральних рівнянь із виродженими ядрами, що аналітично залежать від двох спектральних параметрів.
- Під час знаходження розв'язків системи рівнянь (14) методом послідовних наближень у випадку парної за обома аргументами (одним аргументом) функції $F(s_1, s_2)$ для отримання розв'язку певного типу необхідно вибирати початкове наближення, яке належить до відповідної інваріантної множини нелінійних операторів B_1, B_2. Наведені на рис. 2-4 результати галуження розв'язків отримано шляхом числових експериментів, що не відкидає можливості існування інших типів розв'язків. Одержання вичерпної відповіді стосовно точної кількості існуючих розв'язків рівняння (10) для певних значень параметрів c_1, c_2 є предмет проведення окремих досліджень.

Література

[1] *Процах, Л.* Середньоквадратична апроксимація дійсної функції двох змінних модулем дискретного перетворення Фур'є. І. Основні співвідношення / *Л. Процах, П. Савенко, М. Ткач* // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. — 2009. — Вип. 10. — С. 84-95.

[2] *Вайникко, Г. М.* Анализ дискретизационных методов / *Г. М. Вайникко.* — Тарту: Тартуск. гос. ун-т., 1976. — 161 с.

[3] *Grigorieff, R. D.* Approximation von Eigevwertproblemen bei nichtlinea rer Parameterabhangikeit / *R. D. Grigorieff, H. Jeggle* // Manuscr. math. — 1973. — Vol. 10, No 3. — P. 245-271.

[4] *Karma, O.* Approximation in eigenvalue problems for holomorphic fredholm operator functions. I / *O. Karma* // Numerical Funct. Anal. and Optimization. — 1996. — Vol. 17, No 3 & 4. — P. 365-387.

[5] *Асланян, М. А.* Модификация одного численного метода решения нелинейной спектральной задачи / *М. А. Асланян, С. В. Картышев* // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. — 1998. — Т. 37, № 5. — С. 713-717.

[6] *Solov'yov, S. I.* Preconditioned iterative methods for a class of nonlinear eigenvalue problems / *S. I. Solov'yov* // Linear Algebra and its Applications. — 2006. — Vol. 41, No 1. — P. 210-229.

[7] *Савенко, П. А.* Метод неявной функции в решении двумерной нелинейной спектральной проблемы / *П. А. Савенко, Л. П. Процах.* — Известия высших учебных заведений. Математика. — 2007. — № 11 (546). — С. 41-44.

[8] *Вайнберг, М. М.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений / *М. М. Вайнберг, В. А. Треногин.* — Москва: Наука, 1969. — 527 с.

[9] *Воеводин, В. В.* Матрицы и вычисления / *В. В. Воеводин, Ю. Я. Кузнецов.* — Москва: Наука, 1984. — 320 с.

[10] *Савенко, П. А.* Метод неявной функции в решении двумерной нелинейной спектральной проблемы / *П. А. Савенко, Л. П. Процах* // Изв. высш. учебн. заведений. Математика. — 2007. — № 11 (546). — С. 41-44.

[11] *Гурса, Э.* Курс математического анализа. Т. 1. Ч. 1 / *Э. Гурса*. — Москва-Ленинград: Гос. техн.-теорет. издат., 1933. — 368 с.
[12] Курс высшей математики. Т. 1 / *В. И. Смирнов*. — Москва: Наука, 1965. — 450 с.
[13] *Савенко, П. А.* Численное решение одного класса нелинейных задач теории синтеза излучающих систем / *П. А. Савенко* // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2000. — Т. 40, № 6. — С. 929-939.
[14] *Савенко, П. О.* Нелінійні задачі синтезу випромінюючих систем (теорія і методи розв'язування) / *П. О. Савенко*. — Львів: ІППММ НАН України, 2002. — 320 с.
[15] *Савенко, П. А.* Синтез линейных антенных решеток по заданной амплитудной диаграмме направленности / *П. А. Савенко* // Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика. — 1979. — Т. 22, № 12. — С. 1498-1504.

Mean-square approximation of real function with respect to two variables by Fourier discrete transformation modulus. II. Numerical algorithms

Larysa Protsakh, Petro Savenko, Myroslava Tkach

Investigation of the problem of nonlinear mean-square approximation of real finite non-negative function of two variables by Fourier discrete transformation modulus, dependent on two parameters is continued. Numerical algorithms for finding the branching lines and branching-off solutions are constructed and justified. Numerical examples are also given.

Среднеквадратическая аппроксимация действительной функции двух переменных модулем дискретного преобразования Фурье. II. Численные алгоритмы

Лариса Процах, Петр Савенко, Мирослава Ткач

Продолжается исследование задачи нелинейной среднеквадратической аппроксимации вещественной финитной неотрицательной функции двух переменных модулем дискретного преобразования Фурье, зависящего от двух параметров. Построены и обоснованы численные алгоритмы для нахождения линий ветвления и ответвляющихся решений. Приведены числовые примеры.

Представлено кандидатом фізико-математичних наук М. Дзюбачиком

Отримано 10.06.09