УДК 531

Математичне моделювання падіння кулі, яка обертається та збільшує масу

Василь Ольшанський[1], Станіслав Ольшанський[2], Костянтин Аврамов[3]

[1] д. ф-м. н., професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, вул. Артема, 44, Харків, 61002

[2] Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», вул. Фрунзе, 21, Харків, 61002, e-mail: stasolsh@mail.ru

[3] д. т. н., професор, п. н. с., Інститут проблем машинобудування ім. А. Н. Підгорного НАН України, вул. Д. Пожарського, 2/10, Харків, 61046, e-mail: kavramov@ipmach.kharkov.ua

Розв'язано задачу про падіння однорідної кулі зростаючого радіуса з вертикальною віссю обертання без урахування опору зовнішнього середовища. За експонентного закону зростання радіуса кулі в часі перші та другі інтеграли рівнянь руху подано через відомі функції та досліджено особливості руху у разі дії сили Магнуса. Для знаходження кутової швидкості обертання кулі використано закон збереження кінетичного моменту. Розглянуто також випадок руху кулі зі сталою кутовою швидкістю.

Ключові слова: куля зростаючого радіуса, швидкість, збільшення маси, сила Магнуса, спеціальні функції.

Вступ. Рух тіл змінної маси, окрім ракетодинаміки, спостерігається в різноманітних технологічних процесах. Це політ згораючих частинок рідкого та твердого палива [1, 2], рух крапель диспергованих вогнегасних рідин, які випаровуються у високотемпературному середовищі [3], а також падіння коагулюючих частинок в атмосфері [4, 5]. Тому вивчення балістичних характеристик тіл, які зменшують або збільшують свої розміри та масу в процесі польоту, є актуальна задача, на що свого часу звертав увагу І. В. Мещерский [6]. Водночас обертання тіл у процесі польоту їх у газовому чи рідинному середовищі супроводжується дією сили Магнуса [7]. Ця сила зумовлює викривлення траєкторії руху. Тому частинка, яка обертається, не може в загальному випадку рухатися прямолінійно навіть під час її падіння в гравітаційному полі. Від дії сили Магнуса залежить швидкість руху. Її вплив на процес польоту досліджено, переважно, для тіл сталих розмірів і маси [8]. Менш вивченим залишається вплив цієї сили на рух тіл змінних розмірів, що є предметом цього дослідження.

Таким чином метою проведеного дослідження є вивчення впливу сили Магнуса на кінематичні характеристики польоту однорідної сферичної частинки, радіус якої змінюється з часом.

1. Постановка та розв'язування задачі Коші

Розв'яжемо задачу в спрощеній постановці, без урахування впливу сил опору зовнішнього середовища. Такий підхід дозволяє побудувати аналітичні розв'язки задачі, що з прийнятною точністю моделює рух сферичних тіл, які на початковому етапі руху швидко обертаються в нерухомому газовому середовищі.

Вважаємо, що вісь обертання сферичного тіла є вертикальна та спрямована в протилежному напрямку до осі Oz координатної системи (див. рис. 1).

За вказаної орієнтації осі обертання проекції сили Магнуса на осі координат можна обчислити за формулами

$$F_{mx} = \frac{8\pi}{3}\delta r^3 \omega \dot{y}\ ; \quad F_{my} = -\frac{8\pi}{3}\delta r^3 \omega \dot{x}; \quad F_{mz} = 0,$$

де δ — густина газового середовища; ω — кутова швидкість обертання кулі радіуса $r = r(t)$; t — час; $\dot{x}, \dot{y}$ — проекції швидкості лінійного руху центру мас кулі на осі Ox і Oy відповідно.

Без урахування опору середовища в однорідному полі гравітації рух тіла маси $m = m(t)$ описується рівняннями

$$m\ddot{x} = F_{mx} - \mu\dot{x}\dot{m}\ ; \quad m\ddot{y} = F_{my} - \mu\dot{y}\dot{m}; \quad m\ddot{z} = F_{mz} - \mu\dot{z}\dot{m}\ . \tag{1}$$

Тут коефіцієнт μ $(0 < \mu < 1)$ корегує величину реактивної сили, яку зумовлено збільшенням маси; g — прискорення вільного падіння; крапка над символом означає похідну за часом t.

Зростання радіуса кулі підпорядковуємо експоненціальній залежності

$$r = r(t) = r_0 \exp(\lambda t), \tag{2}$$

в якій $r_0 = r(0)$; стала $\lambda > 0$ характеризує темп зростання.

Оскільки маса однорідної кулі густини ρ пропорційна r^3

$$m = \frac{4}{3}\pi\rho r^3,$$

то

$$\frac{1}{m}\frac{dm}{dt} = 3\frac{\dot{r}}{r}\ . \tag{3}$$

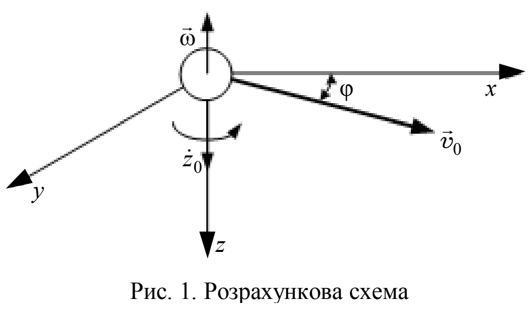

Рис. 1. Розрахункова схема

З урахуванням (3) та проекцій сили Магнуса рівняння руху (1) набувають вигляду

$$\ddot{x} = \frac{2\delta}{\rho}\omega\dot{y} - 3\mu\frac{\dot{r}}{r}\dot{x}\,;$$
$$\ddot{y} = -\frac{2\delta}{\rho}\omega\dot{x} - 3\mu\frac{\dot{r}}{r}\dot{y}\,;$$
$$\ddot{z} = g - 3\mu\frac{\dot{r}}{r}\dot{z}\,. \tag{4}$$

Рівняння (4) розв'язуємо за таких початкових умов

$$\dot{x}(0) = \upsilon_0\cos\varphi\,; \quad \dot{y}(0) = \upsilon_0\sin\varphi\,; \quad \dot{z}(0) = \dot{z}_0\,, \quad x(0) = y(0) = z(0) = 0\,. \tag{5}$$

Тут $\vec{\upsilon}_0$ — проекція стартової лінійної швидкості центра мас на горизонтальну площину xOy, а φ — кут, який утворює ця проекція з віссю Ox.

Для вибраного експоненціального закону зміни радіуса (2)

$$\dot{r}/r = \lambda = const\,.$$

Тоді дослідження руху зводиться до побудови розв'язку рівнянь

$$\ddot{x} = \frac{2\delta}{\rho}\omega\dot{y} - a\dot{x}\,;$$
$$\ddot{y} = -\frac{2\delta}{\rho}\omega\dot{x} - a\dot{y}\,;$$
$$\ddot{z} = g - a\dot{z}\,, \tag{6}$$

де $a = 3\mu\lambda$.

Виразимо $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ через допоміжні функції $\dot{x}_1(t)$, $\dot{y}_1(t)$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_1(t)\exp(-at)\,; \quad \dot{y}(t) = \dot{y}_1(t)\exp(-at)\,. \tag{7}$$

Підставивши вирази (7) у формули (6), одержуємо

$$\ddot{x}_1 = \frac{2\delta}{\rho}\omega\dot{y}_1; \quad \ddot{y}_1 = -\frac{2\delta}{\rho}\omega\dot{x}_1; \quad \ddot{z} = g - a\dot{z}\,.$$

Із перших двох рівнянь, вилучивши $\dot{y}_1$ і $\ddot{y}_1$, отримаємо

$$\ddot{\eta} - \frac{\dot{\omega}}{\omega}\dot{\eta} + \left(\frac{2\delta}{\rho}\right)^2\omega^2\eta = 0\,, \tag{8}$$

де $\eta = \dot{x}_1(t)$.

Щоб встановити величину $\dot{\omega}\omega^{-1}$ скористаємося законом збереження кінетичного моменту у вигляді

$$r\dot{\omega} + 5\nu\dot{r}\omega = 0 \,. \tag{9}$$

Тут ν $(0 < \nu < 1)$ корегує величину реактивного моменту, який зумовлено збільшенням радіуса кулі.

Із співвідношення (9) випливає, що

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = -5\nu\frac{\dot{r}}{r} \,. \tag{10}$$

Рівняння (8) з урахуванням (10) набуває вигляду

$$\ddot{\eta} + 5\nu\frac{\dot{r}}{r}\dot{\eta} + \left(\frac{2\delta}{\rho}\right)^2 \omega^2\eta = 0 \,. \tag{11}$$

Рівняння (10) за початкової умови $\omega(0) = \omega_0$ має розв'язок

$$\omega(t) = \omega_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-5\nu} = \omega_0 \exp(-5\nu\lambda t) \,. \tag{12}$$

Враховуючи формули (2) та (12), замість (11) одержуємо лінійне рівняння, у якому один із коефіцієнтів змінюється за експонентним законом

$$\ddot{\eta} + 5\nu\lambda\dot{\eta} + \left(\frac{2\delta\omega_0}{\rho}\right)^2 \exp(-10\nu\lambda t)\eta = 0 \,. \tag{13}$$

Замінимо змінну t в (13) на ξ за формулою

$$\xi = \exp(-5\nu\lambda t).$$

Тоді

$$\frac{d\eta}{dt} = -5\nu\lambda\xi\frac{d\eta}{d\xi}\,; \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = 25\nu\lambda\xi\left(\frac{d\eta}{d\xi} + \xi\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\right)$$

і рівняння (13) набуває форми рівняння вільних коливань осцилятора

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + b^2\eta = 0, \tag{14}$$

де $b = \dfrac{2}{5}\dfrac{\delta\omega_0}{\nu\lambda\rho}$.

Із точністю до сталих c_1 і c_2 загальний розв'язок рівняння (14) має вигляд

$$\eta(\xi) = \dot{x}_1(t) = c_1\sin(b\xi) + c_2\cos(b\xi) \,. \tag{15}$$

Таким чином, використовуючи (7) і (15), одержуємо

$$\dot{x}(t) = \exp(-at)\left\{c_1\sin\left[b\exp(-5\nu\lambda t)\right] + c_2\cos\left[b\exp(-5\nu\lambda t)\right]\right\} . \tag{16}$$

Відповідно до першого рівняння системи (4) та виразу (16) проекція швидкості центру мас на вісь Oy є така

$$\dot{y}(t)=\exp(-at)\left\{-c_1\cos\left[b\exp(-5\nu\lambda t)\right]+c_2\sin\left[b\exp(-5\nu\lambda t)\right]\right\}. \tag{17}$$

Значення констант c_1, c_2

$$c_1=\upsilon_0\left[\frac{\cos\varphi}{\sin b}-\cos(b-\varphi)\operatorname{ctg}(b)\right];\quad c_2=\upsilon_0\cos(b-\varphi),$$

одержуємо з використанням початкових умов (5).

Розв’язок третього рівняння системи (6) має вигляд

$$\dot{z}(t)=\frac{g}{a}+c_3\exp(-at), \tag{18}$$

де $c_3=\dot{z}_0-g/a$.

Таким чином, перші інтеграли рівнянь руху (6) подаються через елементарні функції.

Проекції центру мас на траєкторії польоту визначимо інтегруванням

$$x(t)=\int_0^t\dot{x}(t)dt,\quad y(t)=\int_0^t\dot{y}(t)dt,\quad z(t)=\int_0^t\dot{z}(t)dt. \tag{19}$$

Третій інтеграл у співвідношеннях (19) виражається через елементарні функції

$$z(t)=a^{-1}\left[gt-c_3\exp(-at)\right]. \tag{20}$$

Водночас для обчислення $x(t)$ і $y(t)$ маємо

$$x(t)=c_1I_1(t)+c_2I_2(t),$$
$$y(t)=-c_1I_2(t)+c_2I_1(t).$$

Тут

$$I_1(t)=-\frac{1}{cb^{\alpha}}\int_b^{b\,e^{-ct}}\theta^{\alpha-1}\sin\theta\,d\theta,$$

$$I_2(t)=-\frac{1}{cb^{\alpha}}\int_b^{b\,e^{-ct}}\theta^{\alpha-1}\cos\theta\,d\theta,\quad \alpha=a/c,\quad c=5\nu\lambda>0.$$

Ці квадратури відомі як узагальнені інтеграли Френеля [9]. Їх можна виразити через гіпергеометричні функції, а саме

$$I_1(t)=\frac{1}{cb^{\alpha}(\alpha+1)}\left\{b^{1+\alpha}\,{}_1F_2\left(\frac{\alpha+1}{2};\frac{3}{2};1+\frac{\alpha+1}{2};-\frac{1}{4}b^2\right)-\right.$$
$$\left.-\left[b\exp(-ct)\right]^{1+\alpha}\,{}_1F_2\left(\frac{\alpha+1}{2};\frac{3}{2};1+\frac{\alpha+1}{2};-\frac{b^2}{4}\exp(-2ct)\right)\right\};$$

$$I_1(t) = \frac{1}{cb^{\alpha}\alpha}\left\{ b^{\alpha}\,{}_1F_2\left(\frac{\alpha}{2};\frac{1}{2};1+\frac{\alpha}{2};-\frac{1}{4}b^2\right) - \right.$$
$$\left. -\left[b\exp\left(-ct\right)\right]^{\alpha}\,{}_1F_2\left(\frac{\alpha}{2};\frac{1}{2};1+\frac{\alpha}{2};-\frac{b^2}{4}\exp\left(-2ct\right)\right)\right\}.$$

Інтеграли $I_1(t)$ й $I_2(t)$ лише в окремих випадках визначаються через елементарні чи протабульовані спеціальні функції. Розглянемо деякі з них. Найпростіший випадок маємо, якщо $\alpha = 1$ або $5\nu = 3\mu$. Тоді

$$I_1(t) = \frac{1}{ab}\left\{\cos\left[b\exp\left(-at\right)\right] - \cos b\right\}, \quad I_2(t) = \frac{1}{ab}\left\{\sin b - \sin\left[b\exp\left(-at\right)\right]\right\}.$$

До елементарних функцій зводиться обчислення $I_1(t)$ й $I_2(t)$ та для інших цілих значень α. Наприклад, якщо $\alpha = 2$, то

$$I_1(t) = \frac{1}{cb^2}\left\{b\exp\left(-ct\right)\cos\left[b\exp\left(-ct\right)\right] - b\cos b + \sin b - \sin\left[b\exp\left(-ct\right)\right]\right\},$$
$$I_2(t) = \frac{1}{cb^2}\left\{b\sin b - b\exp\left(-ct\right)\sin\left[b\exp\left(-ct\right)\right] + \cos b - \cos\left[b\exp\left(-ct\right)\right]\right\}.$$

Для $\alpha = 0$, $\mu = 0$ без урахування дії реактивної сили отримуємо

$$I_1(t) = \frac{1}{c}\left\{\mathrm{Si}\left(b\right) - \mathrm{Si}\left[b\exp\left(-ct\right)\right]\right\},$$
$$I_2(t) = \frac{1}{c}\left\{\mathrm{Ci}\left[b\exp\left(-ct\right)\right] - \mathrm{Ci}\left(b\right)\right\},$$

тобто квадратури визначаються через інтегральний синус $\mathrm{Si}(z)$ та інтегральний косинус $\mathrm{Ci}(z)$. Ці функції протабульовані в [10, 11] та інших довідниках із спеціальних функцій.

Розглянемо також випадок дробових значень α. Якщо $\alpha = 1/2$ або $3\mu = 2{,}5\nu$, то

$$I_1(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{c\sqrt{b}}\left\{S_2(b) - S_2\left[b\exp\left(-ct\right)\right]\right\},$$
$$I_2(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{c\sqrt{b}}\left\{C_2(b) - C_2\left[b\exp\left(-ct\right)\right]\right\},$$

тобто квадратури визначаються через інтеграли Френеля $C_2(\xi)$, $S_2(\xi)$, таблиці яких наведені в [11].

Якщо врахувати співвідношення [10]

$$C_2\left(\xi\right) = C\left(\frac{\sqrt{2\xi}}{\sqrt{\pi}}\right), \quad S_2\left(\xi\right) = S\left(\frac{\sqrt{2\xi}}{\sqrt{\pi}}\right),$$

то для обчислень $C_2(\xi)$ й $S_2(\xi)$ можна використовувати також таблиці $C(\xi)$ й $S(\xi)$, які є в [10].

Якщо $\alpha = 3/2$, то

$$I_1(t) = \frac{1}{cb}\left\{\exp\left(-\frac{ct}{2}\right)\cos\left[b\exp(-ct)\right] - \cos b\right\} +$$
$$+\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}cb^{3/2}}\left\{C_2(b) - C_2\left[b\exp(-ct)\right]\right\},$$
$$I_2(t) = \frac{1}{cb}\left\{\sin b - \exp\left(-\frac{ct}{2}\right)\sin\left[b\exp(-ct)\right]\right\} +$$
$$+\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}cb^{3/2}}\left\{S_2\left[b\exp(-ct)\right] - S_2(b)\right\}.$$

До інтегралів Френеля зводиться обчислення квадратур і для інших дробових α.

Одержані вище розв'язки відповідають $\nu > 0$. Вони вироджуються, якщо $\nu = 0$. У цьому випадку куля обертається зі сталою швидкістю $\omega = \omega_0$ і

$$\dot{x}(t) = \upsilon_0 \exp(-at)\left[\cos\varphi\cos(pt) - \sin\varphi\sin(pt)\right],$$
$$\dot{y}(t) = \upsilon_0 \exp(-at)\left[\sin\varphi\cos(pt) + \cos\varphi\sin(pt)\right],$$
$$x(t) = \frac{\upsilon_0}{a^2 + p^2}\left\{\cos\varphi\left[p\sin(pt) - a\cos(pt)\right]\exp(-at) + a\cos\varphi +\right.$$
$$\left. + \sin\varphi\left[a\sin(pt) + p\cos(pt)\right]\exp(-at) - p\sin\varphi\right\},$$
$$y(t) = \frac{\upsilon_0}{a^2 + p^2}\left\{\sin\varphi\left[p\sin(pt) - a\cos(pt)\right]\exp(-at) + a\sin\varphi +\right.$$
$$\left. + p\cos\varphi - \cos\varphi\left[a\sin(pt) + p\cos(pt)\right]\exp(-at)\right\},$$

де $p = 2\delta\omega_0\rho^{-1}$.

2. Числові розрахунки

Розглянемо, як впливає кутова швидкість на траєкторію польоту частинки. Приймемо такі вихідні дані: $r_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ м; $\lambda = 1{,}5$ с$^{-1}$; $\rho = 1\,000$ кг/м^3; $\delta = 1$ кг/м^3; $\varphi = 45°$; $\upsilon_0 = 5$ м/с; $\dot{z}_0 = 1$ м/с; $\mu = 0{,}1$; $\nu = 0{,}3$.

На рис. 2 цифрами 1, 2, 3 позначено криві, які отримані для значень $\omega_0 = 1\,000, 2\,000, 3\,000$ с$^{-1}$. Зі зростанням початкової кутової швидкості зростають сила Магнуса та відхилення траєкторії від площини, утвореної вектором початкової швидкості та віссю Oz.

Рис. 3 ілюструє вплив коефіцієнта λ на траєкторію руху. Криві 1-3 відповідають значенням $\lambda = 1; 1{,}5; 2$ кг/м^3, $\omega = 2\,000$ с$^{-1}$, а решта параметрів такі, як на рис. 2. Зі зростанням інтенсивності наростання маси вплив сили Магнуса на рух тіла зменшується.

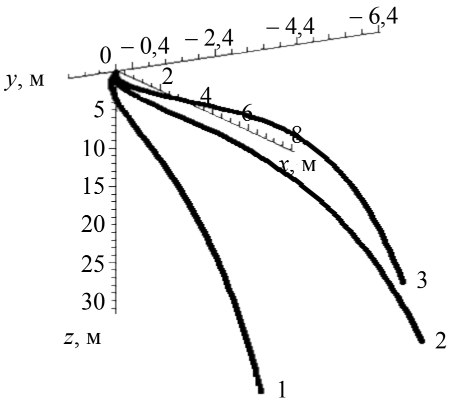

Рис. 2. Траєкторії руху центру мас кулі для різних ω

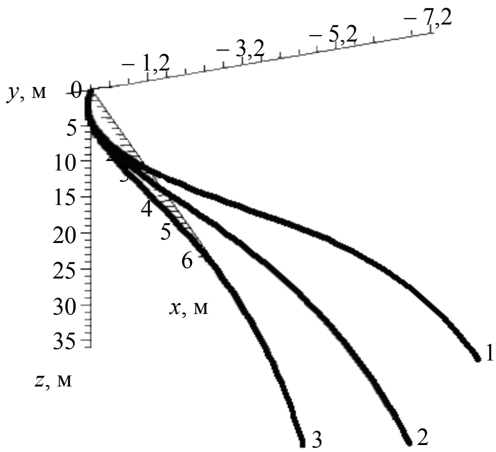

Рис. 3. Траєкторії центру мас кулі для різних λ

Висновок. Показано, що у випадку експоненціального закону збільшення радіуса кулі в часі й обертання її навколо вертикальної осі, без урахування сили опору середовища, перші інтеграли рівняння руху подаються через елементарні функції, а другі зводяться до узагальнених інтегралів Френеля, які визначаються через гіпергеометричні функції. Сила Магнуса змінює траєкторію падіння кулі, яка стає просторовою лінією.

Література

[1] *Воинов, А. Н.* Сгорание в быстроходных поршневых двигателях / *А. Н. Воинов*. — Москва: Машиностроение, 1977. — 277 с.
[2] Современные дизели: повышение топливной экономичности и длительной прочности / *Ф. И. Абрамчук, А. П. Марченко, Н. Ф. Разлейцев* и др. — Киев: Техника, 1992. — 272 с.
[3] Балістика крапель, які випаровуються при польоті / *С. І. Кучеренко, В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський, Л. М. Тіщенко*. — Харків: ХНТУСГ, 2007. — 304 с.
[4] *Матвеев, Л. Т.* Основы общей метеорологии. Физика атмосферы / *Л. Т. Матвеев*. — Ленинград: Гидрометеоиздат, 1965. — 751 с.
[5] *Хргиан, А. Х.* Физика атмосферы / *А. Х. Хргиан*. — Ленинград: Гидрометеоиздат, 1969. — 320 с.
[6] *Мещерский, И. В.* Работы по механике тел переменной массы / *И. В. Мещерский*. — Москва: ГИТТЛ, 1952. — 276 с.
[7] *Прандтль, Л.* Эффект Магнуса и ветряной корабль / *Л. Прандтль* // Успехи физических наук. — 1925. — Т. V, вып. 1-2. — С. 1-27.
[8] *Сагитов, М. Н.* О движении вращающегося шара постоянной и переменной массы: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.01 «Теоретическая механика» / *Сагитов М. Н.* — Алма-Ата, 1965. — 14 с.
[9] *Прудников, А. П.* Интегралы и ряды / *А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев*. — Москва: Наука, 1981. — 800 с.
[10] *Абрамовиц, А.* Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами) / *А. Абрамовиц, И. Стиган*. — Москва: Наука, 1979. — 832 с.
[11] *Янке, Е.* Специальные функции / *Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш*. — Москва: Наука, 1977. — 344 с.

About modeling fall of a sphere, which rotates and increases mass

Vasily Olshanskii, Stanislav Olshanskii, Konstantin Avramov

The equations of fall of a homogeneous sphere of growing radius with a vertical axis of rotation without the account of resistance of external environment are solved. At the exponential law of increase of radius of a sphere in time the first and second integrals of the equation of motion are expressed through known functions. For a presence of angular velocity of rotation of a sphere the law of preservation of the kinetically moment is used. The case of motion of a sphere with constant angular speed is considered.

О моделировании падения шара, который вращается и увеличивает массу

Василий Ольшанский, Станислав Ольшанский, Константин Аврамов

Решена задача падения однородного шара возрастающего радиуса с вертикальной осью вращения без учёта сопротивления внешней среды. При экспоненциальном законе возрастания радиуса шара во времени первые и вторые интегралы уравнений движения выражены через известные функции, а также исследованы особенности движения при действии силы Магнуса. Для нахождения угловой скорости вращения шара использован закон сохранения кинетического момента. Рассмотрен также случай движения шара с постоянной угловой скоростью.

Представлено членом-кореспондентом НАН України Я. Бураком

Отримано 17.09.09