

## Конвективно-променевий нагрів термочутливого безмежного тіла з циліндричною порожниною

Галина Гарматій

К. ф.-м. н., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060

*Досліджено температурне поле безмежного тіла з циліндричною порожниною, через поверхню якої відбувається конвективно-променевий теплообмін із середовищем постійної температури. При цьому враховано залежність теплофізичних характеристик матеріалу від температури. Нелінійну нестационарну задачу теплопровідності розв'язано чисельно методом прямих. Проведено порівняння отриманого розв'язку задачі з розв'язком такої ж задачі за сталих характеристик матеріалу.*

**Ключові слова:** термочутливе тіло, конвективно-променевий теплообмін, метод прямих.

**Вступ.** Дослідження термопружного стану елементів конструкцій, які у процесі виготовлення й експлуатації зазнають теплових і силових навантажень, пов'язано з розв'язуванням незв'язаних квазістатичних задач термомеханіки. Проблема отримання розв'язків таких задач термопружності на основі моделей, що враховують залежність теплофізичних і механічних характеристик матеріалу тіла від температури за складних умов теплообміну з оточуючим середовищем [1-3], досі є актуальна. У випадку граничної умови конвективно-променевого теплообміну (такими умовами моделюють процеси під час відливу масивних тіл, у термодіємних перетворювачах енергії, в космосі і т. д.) крайові задачі теплопровідності містять, окрім нелінійності, пов'язаної з урахуванням залежних від температури властивостей матеріалів, також нелінійність, яка зосереджена у граничній умові, що описує наявний теплообмін, зокрема за законом Стефана-Больцмана. При цьому відповідна задача термопружності, у якій за вихідні вибрано рівняння в переміщеннях, є крайова задача зі змінними коефіцієнтами, що ускладнює використання відомих класичних методів. У праці [4] визначено температурне поле та спричинений ним і силовим навантаженням термопружний стан термочутливого (характеристики матеріалу залежать від температури) простору зі сферичною порожниною за умови конвективно-променевого теплообміну. Тут запропоновано розв'язок нелінійної нестационарної задачі теплопровідності, як перший етап розв'язку квазістатичної задачі термопружності для безмежного термочутливого тіла з циліндричною порожниною. Через цю поверхню відбувається конвективно-променевий теплообмін із середовищем постійної температури.

## 1. Постановка задачі

Розглянемо задачу про визначення нестационарного температурного поля однорідного, ізотропного безмежного тіла з циліндричною порожниною кругового  $r = r_0$  перетину, теплофізичні характеристики матеріалу якого (коефіцієнт теплопровідності  $\lambda_t$ , об'ємна теплоємність  $c_v$  та коефіцієнт температуропровідності  $a$ ) є функціями температури. Таке термочутливе тіло має початкову сталу температуру  $t_p$ . Починаючи з часу  $\tau = 0$ , через поверхню  $r = r_0$  шляхом конвективно-променевого теплообміну тіло обмінюється теплом із середовищем сталої температури  $t_c$ . Таким чином моделюємо наявне в порожнині джерело нагрівання.

## 2. Розв'язування задачі

Вибравши за відлікову температуру  $t_0$  температуру гріючого середовища  $t_c$ , а за характерний розмір — радіус циліндричної порожнини  $r_0$ , введемо безрозмірні величини та комплекси: координату  $\rho = r/r_0$ , температуру  $T = t/t_0$ , число Фур'є  $Fo = a_0\tau/r_0^2$ , критерії Біо  $Bi = \alpha r_0/\lambda_{t0}$  і Старка  $Sk = \sigma\epsilon t_0^3 r_0/\lambda_{t0}$ . Тут опорні значення коефіцієнтів температуропровідності  $a_0$ , теплопровідності  $\lambda_{t0}$  та об'ємної теплоємності  $c_{v0}$  взято за початкової температури  $T_p$ .

Подамо коефіцієнт теплопровідності й об'ємну теплоємність у вигляді

$$\lambda_t(t) = \lambda_{t0}\lambda_t^*(\bar{T}), \quad c_v(t) = c_{v0}c_v^*(\bar{T}), \quad (1)$$

де  $\lambda_{t0} = \lambda_t(T_p)$ ,  $\lambda_t^*(T_p) = 1$ ;  $c_{v0} = c_v(T_p)$ ,  $c_v^*(T_p) = 1$ ;  $\bar{T} = T - T_p$ ,  $T_p = t_p/t_c$ .

У введених безрозмірних величинах крайова задача на визначення приросту температури має вигляд

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \lambda_t^*(\bar{T}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \rho} \right) = c_v^*(\bar{T}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial Fo}, \quad (2)$$

$$\left\{ \lambda_t^*(\bar{T}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \rho} - Bi(\bar{T} - \bar{T}_c) - Sk \left[ (\bar{T} + T_p)^4 - T_c^4 \right] \right\}_{|\rho=1} = 0, \quad \bar{T}_{|\rho \rightarrow \infty} = 0, \quad (3)$$

$$\bar{T}_{|Fo=0} = 0, \quad (4)$$

де  $\bar{T}_c = T_c - T_p$ ,  $T_c = t_c/t_c = 1$ .

Застосувавши до задачі (2)-(4) перетворення Кірхгофа

$$\theta = \int_0^{\bar{T}} \lambda_t^*(\xi) d\xi, \quad (5)$$

отримаємо нелінійну крайову задачу для знаходження змінної  $\theta$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right) = \frac{1}{a^*(\theta)} \frac{\partial \theta}{\partial Fo}, \quad (6)$$

$$\left\{ \frac{\partial \theta}{\partial \rho} - \text{Bi} [\bar{T}(\theta) - \bar{T}_c] - \text{Sk} \left[ (\bar{T}(\theta) + T_p)^4 - T_c^4 \right] \right\}_{|\rho=1} = 0, \quad (7)$$

$$\theta_{|\rho \rightarrow \infty} = 0, \quad \theta_{|\text{Fo}=0} = 0, \quad (8)$$

де  $a^*(\theta) = \lambda_t^*/c_v^*(\bar{T}(\theta))$ ,  $\bar{T}(\theta)$  — нелінійний вираз, вигляд якого визначаємо з (5), знаючи залежність коефіцієнта теплопровідності від температури.

Бачимо, що введення змінної Кірхгофа не лінеаризувало вихідне рівняння та граничну умову конвективно-променевого теплообміну, але змінило вигляд нелінійного рівняння та граничної умови, що дозволяє для розв'язування задачі використати відомі методи. Для цього зведемо отриману нелінійну задачу (6)-(8) у часткових похідних для змінної Кірхгофа до розв'язування системи звичайних диференціальних рівнянь. Далі застосуємо метод прямих, який передбачає дві операції: дискретизацію за координатою  $\rho$  й інтегрування за  $\text{Fo}$ . Під час дискретизації за  $\rho$  рівняння з частинними похідними внаслідок безпосередньої заміни похідних різницевиими співвідношеннями перетворюється у систему звичайних диференціальних рівнянь, тоді як часова змінна залишається неперервною. Отриману таким чином систему звичайних диференціальних рівнянь називають напівдискретною задачею. Додавши початкові умови, отримаємо задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь, розв'язок якої знаходимо чисельно з допомогою формул диференціювання назад (метод Гіра зі стрічковою структурою матриці Якобі).

Відповідно до сформульованої вище схеми введемо для змінної  $\rho$  на відрізьку  $[1, \rho_n]$  рівномірну сітку  $w_h = \{\rho_i = 1 + ih, i = \overline{0, n}; h = (\rho_n - 1)/n\}$ . Шукані функції  $\theta_i = \theta(\rho_i, \text{Fo})$  є розв'язки рівняння (6). Після заміни частинними похідними за змінною  $\rho$  різницевиими похідними з другим порядком апроксимації за  $h$  наближаємо їх різницевиими функціями  $y_i(\text{Fo})$ . Вони задовольняють систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_i}{d\text{Fo}} = a^*(y_i) \left[ \frac{1}{1+ih} \left( \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \right) + \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \right]. \quad (9)$$

Для отримання розв'язку задачі (6)-(8) необхідно апроксимувати не тільки основне диференціальне рівняння (6), а й граничні умови. Оскільки розв'язок задачі (6)-(8) не можна продовжити за межі інтервалу  $[1, \rho_n]$  ще на один крок  $h$  зліва від границі, то доцільно для апроксимації диференціального оператора у граничній умові (7) замість центральної різницевої похідної застосувати праву різницеву похідну  $y_{\rho,0} = (y_1 - y_0)/h$ . При цьому отримаємо похибку апроксимації відносно  $h$  першого порядку. Далі застосуємо схему підвищення порядку апроксимації без збільшення шаблону. Апроксимація граничної умови (7) із першим порядком апроксимації за  $h$  має вигляд

$$y_{\rho,0} = \text{Bi} (\bar{T}(y_0) - \bar{T}_c) + \text{Sk} \left[ (\bar{T}(y_0) + T_p)^4 - T_c^4 \right]. \quad (10)$$

Так як  $z_i = y_i - \theta_i$  — похибка наближеного розв'язку  $y_i$ , то, подавши нелінійні вирази  $\bar{T}(\theta_0 + z_0)$  і  $\bar{T}^4(\theta_0 + z_0)$  згідно теореми Лагранжа про скінченні прирости у вигляді  $\bar{T}(\theta_0 + z_0) = \bar{T}(\theta_0) + \bar{T}'(\theta_0)z_0$ ;  $\bar{T}^4(\theta_0 + z_0) = \bar{T}^4(\theta_0) + 4\bar{T}^3(\theta_0)\bar{T}'(\theta_0)z_0$  і підставивши  $y_0 = z_0 + \theta_0$  в (10), отримаємо

$$z_{p,0} = \text{Bi}\bar{T}'(\theta_0)z_0 + 4\text{Sk}\bar{T}^3(\theta_0)\bar{T}'(\theta_0)z_0 - \Psi_0,$$

де  $\Psi_0 = \theta_{p,0} - \text{Bi}(\bar{T}(\theta_0) - \bar{T}_c) - \text{Sk}\left[\left(\bar{T}(\theta_0) + T_p\right)^4 - T_c^4\right]$  — похибка апроксимації граничної умови (10). Подамо праву різницеву похідну  $\theta_{p,0}$  у точці  $\rho_0$  за формулою Тейлора у вигляді

$$\theta_{p,0} = \frac{\partial\theta(\rho_0, \text{Fo})}{\partial\rho} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2\theta(\rho_0, \text{Fo})}{\partial\rho^2} + O(h^2). \quad (11)$$

Оскільки  $\theta(\rho, \text{Fo})$  — розв'язок диференціального рівняння щодо змінної Кірхгофа, то  $\theta(\rho_0, \text{Fo})$  — розв'язок рівняння (6) у точці  $\rho_0$ . Тоді справджується співвідношення

$$\frac{\partial^2\theta(\rho_0, \text{Fo})}{\partial\rho^2} = \frac{1}{a^*(\bar{T}(\theta_0))} \frac{\partial\theta(\rho_0, \text{Fo})}{\partial\text{Fo}} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial\theta(\rho_0, \text{Fo})}{\partial\rho}. \quad (12)$$

Враховуючи формулу (12), з (11) отримуємо

$$\theta_{p,0} - \frac{h}{2} \left[ \frac{1}{a^*(\bar{T}(\theta_0))} \frac{\partial\theta(\rho_0, \text{Fo})}{\partial\text{Fo}} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial\theta(\rho_0, \text{Fo})}{\partial\rho} \right] = \frac{\partial\theta(\rho_0, \text{Fo})}{\partial\rho} + O(h^2). \quad (13)$$

Вираз у лівій частині (13) апроксимує похідну в точці  $\rho = \rho_0$  із другим порядком точності за  $h$ . Це дозволяє отримати різницевий аналог граничної умови (7) із порядком апроксимації  $O(h^2)$

$$y_{p,0} - \frac{h}{2} \left\langle \frac{1}{a^*(\bar{T}(y_0))} \frac{dy_0}{d\text{Fo}} - \frac{1}{\rho_0} \left\{ \text{Bi}(\bar{T}(y_0) - \bar{T}_c) + \right. \right. \\ \left. \left. + \text{Sk}\left[\left(\bar{T}(y_0) + T_p\right)^4 - T_c^4\right]\right\rangle \right\rangle = \text{Bi}(\bar{T}(y_0) - \bar{T}_c) + \text{Sk}\left[\left(\bar{T}(y_0) + T_p\right)^4 - T_c^4\right]. \quad (14)$$

Перепишемо співвідношення (14) у вигляді

$$\frac{dy_0}{d\text{Fo}} = a^*(T(y_0)) \left\langle \frac{2}{h^2} (y_1 - y_0) + \left(1 - \frac{2}{h}\right) \times \right. \\ \left. \times \left\{ \text{Bi}(\bar{T}(y_0) - \bar{T}_c) + \text{Sk}\left[\left(\bar{T}(y_0) + T_p\right)^4 - T_c^4\right]\right\} \right\rangle.$$

Різнцевим аналогом із порядком апроксимації  $O(h^2)$  граничної умови (8) буде рівняння (9) при  $i = n$ . При цьому, виходячи з умови обмеженості розв'язку

$$\left. \frac{d\theta}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_n} = 0, \text{ приймаємо, що } y_{n+1} = y_{n-1}.$$

Таким чином нелінійну крайову задачу (6)-(8) на змінну Кірхгофа зведено до такої задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dy_0}{dFo} &= a^*(y_0) \left\langle \frac{2}{h^2} (y_1 - y_0) + \left(1 - \frac{2}{h}\right) \left\{ \text{Bi}(\bar{T}(y_0) - \bar{T}_c) + \text{Sk} \left[ (\bar{T}(y_0) + T_p)^4 - T_c^4 \right] \right\} \right\rangle, \\ \frac{dy_i}{dFo} &= a^*(y_i) \left[ \frac{1}{1+ih} \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \right] \quad (i = \overline{1, n-1}), \\ \frac{dy_n}{dFo} &= \frac{2a^*(y_n)}{h^2} (y_{n-1} - y_n), \quad y_i(0) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Розв'язок отриманої задачі Коші (15) знаходимо з допомогою стандартних програмних засобів, використовуючи формули диференціювання назад (методи Гіра зі стрічковою структурою матриці Якобі). Знаючи конкретну залежність коефіцієнта теплопровідності від температури, з формули (5) знаходимо приріст температури у тілі. У випадку лінійної залежності  $\lambda_i^*(\bar{T})$  від температури розв'язуємо квадратне рівняння, а у випадку квадратичної — кубічне.

Якщо у співвідношеннях (15) прийняти, що  $a^*(T(y_i)) = 1$  і  $\bar{T}(y_0) = y_0$ , то одержимо формули для визначення приросту температури у нетермочутливому тілі з циліндричною порожниною ( $\lambda = \lambda_{i0}$  і  $c_v = c_{v0}$ ).

### 3. Числові результати та їх аналіз

Як приклад розглянуто безмежне термочутливе тіло з циліндричною порожниною, через поверхню якої відбувається конвективно-променевий теплообмін із середовищем сталої температури  $t_c = 873$  К. Цю температуру вибираємо за відлікову  $t_0$ . Початкова температура тіла  $t_p = 373$  К. Тіло виготовлено зі сталі У12. Значення теплофізичних і механічних характеристик [5] апроксимуємо з використанням методу найменших квадратів поліномами різних степенів [6] і подаємо у вигляді

$$\begin{aligned} \lambda_t(t) &= 45,04 \left[ 1 - 0,51(T - T_p) \right] \text{ [Вт/(м} \cdot \text{К)],} \\ a(t) &= 11,42 \cdot 10^{-6} \left[ 1 - 0,86(T - T_p) \right] \text{ [м}^2\text{/с].} \end{aligned} \quad (16)$$

Результати числових досліджень наведені у вигляді графіків на рис. 1 і 2 для  $\text{Bi} = 1$ ,  $\text{Sk} = 1$ . Суцільні лінії відповідають врахуванню залежності характеристик від температури, штрихові побудовані для сталих характеристик, які взяті за початкової температури. На рис. 1 подані графіки розподілу приросту температури вздовж радіальної координати у вибрані моменти часу для термочутливого та нетермочутливого тіл із циліндричними порожнинами. Із наведених на рис. 1 графіків видно, що з віддаленням від порожнини вздовж радіуса приріст температури в тілі прямує до нуля.

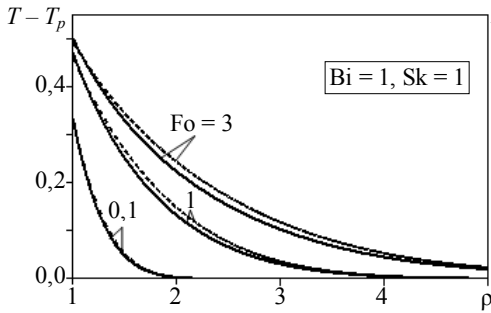


Рис. 1. Розподіл приросту температури  $\bar{T}$  вздовж безрозмірного радіуса  $\rho$

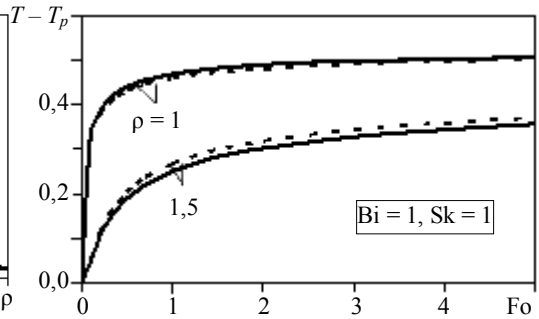


Рис. 2. Розподіл приросту температури  $\bar{T}$  залежно від безрозмірного часу Fo

На рис. 2 подані графіки розподілу приросту температури залежно від Fo на поверхні циліндричної порожнини і для  $\rho = 1,5$  за врахування та нехтування температурною залежністю характеристик матеріалу.

Максимальна розбіжність між значеннями приросту температури в термочутливому та нетермочутливому тілах для вибраного матеріалу становить 15 %.

**Висновки.** У статті визначено та досліджено температурне поле безмежного термочутливого тіла з циліндричною порожниною, через поверхню якої відбувається конвективно-променевий теплообмін із середовищем постійної температури. Встановлено, що максимальна розбіжність між значеннями приросту температури в термочутливому та нетермочутливому тілах для вибраного матеріалу становить 15 %. Це свідчить про важливість врахування залежностей від температури теплофізичних характеристик матеріалу тіла під час визначення його термопружного стану.

*Дослідження проведені за часткової фінансової підтримки ДФФД України (проект №Ф29.2/009)*

## Література

- [1] Duda, P. Stabilization of solution of an inverse heat conduction problem / P. Duda, J. Taler // Proc. 6<sup>th</sup> Int. Congr. Therm. Stresses (26-29 May 2005, Vienna, Austria) / Eds. F. Ziegler, R. Heuer, C. Adam. — Vienna: Vienna University of Technology, 2005. — Vol. 2. — P. 485-488.
- [2] Skrzypek, J. Numerical analysis of a plane-stress tbc-fgm-substrate system under thermal loading / J. Skrzypek, H. Egner, M. Kula // Proc. 7<sup>th</sup> Int. Congr. Therm. Stresses (4-7 June 2007, Taipei, Taiwan) / Eds. C. K. Chao and C. Y. Lin. — Taiwan: National Taiwan University of Science and Technology, 2007. — Vol. 1. — P. 93-100.
- [3] Thermal stresses around a circular hole in a functionally graded plate / X. Z. Zhang, S. Kitipornchai, K. M. Liew ed. all // J. Thermal Stresses. — 2003. — Vol. 26, Issue 4. — P. 379-390.
- [4] Попович, В. С. Термопружний стан термочутливого простору зі сферичною порожниною за умов конвективно-променевого теплообміну / В. С. Попович, Г. Ю. Гарматій, О. М. Вовк // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2006. — Т. 49, № 3. — С. 168-176.
- [5] Марочник сталей і сплавов; под ред. В. Г. Сорокина. — Москва: Машиностроение, 1989. — 640 с.
- [6] Попович, В. С. Термопружний стан термочутливої порожнистої кулі за умов конвективно-променевого теплообміну з довкіллям / В. С. Попович, Г. Ю. Гарматій, О. М. Вовк // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2006. — № 6. — С. 39-48.

Галина Гарматій

Конвективно-променевий нагрів термочутливого безмежного тіла з циліндричною порожниною

## **Convective-radial heating a thermosensitive infinite body with cylindrical cavity**

Halyna Harmatii

*A temperature field of an infinite body with cylindrical cavity is studied. Through the surface of the cavity the convective-radial heat exchange with the constant temperature environment is realized. The dependence the material thermophysical characteristics on the temperature is considered. A nonlinear nonstationary heat conduction problem is solved numerically by the method of lines. The obtained results of solutions to the problem are compared with the solutions of the same problem for constant characteristics of material.*

## **Конвективно-лучевой нагрев термочувствительного бесконечного тела с цилиндрической полостью**

Галина Гарматій

*Исследовано температурное поле бесконечного тела с цилиндрической полостью, через поверхность которой осуществляется конвективно-лучевой теплообмен со средой с постоянной температурой. При этом учитывается зависимость теплофизических характеристик материала от температуры. Нелинейная нестационарная задача теплопроводности решена численно методом прямых. Проведено сравнение полученного решения задачи с решением такой же задачи при постоянных характеристиках материала.*

Представлено професором О. Гачкевичем

Отримано 01.07.09