УДК 519.6

Середньоквадратична апроксимація дійсної функції двох змінних модулем дискретного перетворення Фур'є. I. Основні співвідношення

Лариса Процах[1], Петро Савенко[2], Мирослава Ткач[3]

[1] Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3*б*, Львів, 79060
[2] д. т. н., с. н. с., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3*б*, Львів, 79060, e-mail: spo@iapmm.lviv.ua
[3] Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3*б*, Львів, 79060

Досліджується нелінійна задача середньоквадратичної апроксимації дійсної фінітної невід'ємної функції від двох змінних модулем подвійного дискретного перетворення Фур'є, що залежить від двох параметрів. Знаходження розв'язків цієї задачі зведено до дослідження та розв'язування нелінійного двовимірного інтегрального рівняння типу Гаммерштейна, яке має неєдиний розв'язок. Одержано лінійне інтегральне рівняння на знаходження множини точок галуження розв'язків із нелінійним входженням двох спектральних параметрів. Знаходження множини точок галуження розв'язків і числові приклади розглядаються в другій частині (продовженні) цієї статті.

Ключові слова: нелінійна середньоквадратична апроксимація, дискретне подвійне перетворення Фур'є, двовимірне нелінійне інтегральне рівняння типу Гаммерштейна, неєдиність і галуження розв'язків.

Вступ. Середньоквадратична апроксимація дійсної фінітної невід'ємної функції від двох змінних модулем подвійного дискретного перетворення Фур'є, що залежить від фізичних параметрів, широко застосовується при моделюванні та розв'язуванні задач синтезу різних типів антенних решіток, обробки сигналів та ін. [1-3]. У задачах цього класу залишаються недослідженими питання неєдиності та галуження розв'язків. Знаходження множини точок галуження є, своєю чергою, недостатньо досліджена нелінійна спектральна двопараметрична задача. Найповніше розвинуті методи дослідження та чисельного знаходження розв'язків однопараметричних спектральних задач за наявності дискретного спектра [4-8].

У роботі варіаційну задачу про найкраще середньоквадратичне наближення дійсної фінітної невід'ємної функції модулем подвійного дискретного перетворення Фур'є зведено до знаходження розв'язків нелінійного двовимірного інтегрального рівняння типу Гаммерштейна. З використанням принципу Шаудера доведено існування розв'язків. Одержано лінійне інтегральне рівняння на знаходження множини точок галуження розв'язків із нелінійним входженням двох спектральних параметрів.

1. Формулювання задачі, основні рівняння та співвідношення

Розглянемо подвійне дискретне перетворення Фур'є

$$f(s_1,s_2) = A\mathbf{I} \equiv \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-M}^{M} I_{nm} e^{i\left(c_1 n s_1 + c_2 m s_2\right)}, \tag{1}$$

як лінійний оператор, що діє з комплексного скінченновимірного простору $H_I = \mathbb{C}^{N_2 \times M_2}$, де $N_2 = 2N + 1$, $M_2 = 2M + 1$, у простір комплекснозначних неперервних функцій від двох дійсних змінних, визначених в області

$$\Omega = \left\{ \left(s_1,s_2\right) :\ \left|s_1\right| \le \pi/c_1,\ \left|s_2\right| \le \pi/c_2 \right\};$$

c_1, c_2 — деякі дійсні безрозмірні числові параметри, що належать

$$\Lambda_c = \left\{ \left(c_1,c_2\right) :\ 0 < c_1 \le a,\ 0 < c_2 \le b \right\}.$$

Функція $f(s_1,s_2)$ є $2\pi/c_1$ -періодичною за аргументом s_1 і $2\pi/c_2$ -періодичною за s_2.

У просторах, що розглядаються, введемо скалярні добутки та породжувані ними норми

$$\left(\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2\right)_{H_I} = \frac{4\pi^2}{c_1 c_2} \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-M}^{M} I_{nm} \overline{I_{nm}}, \qquad \|\mathbf{I}\| = \left(\mathbf{I}, \mathbf{I}\right)_{H_I}^{1/2}, \tag{2}$$

$$\left(f_1, f_2\right)_{C_{(\Omega)}^{(2)}} = \iint_{\Omega} f_1\left(s_1,s_2\right) \overline{f_2\left(s_1,s_2\right)} ds_1 ds_2, \qquad \|f\| = \left(f, f\right)_{C_{(\Omega)}^{(2)}}^{1/2}. \tag{3}$$

Надалі поповнений простір неперервних функцій із введеними у ньому скалярним добутком і нормою (3) позначатимемо через $\mathbf{C}_{(\Omega)}^{(2)}$ та відзначимо, що його поповнення співпадає з гільбертовим простором $L_2(\Omega)$ [9].

Безпосередньою перевіркою переконуємось у справедливості рівності

$$\|A\mathbf{I}\|^2 = \iint_{\Omega} \left| f\left(s_1,s_2\right) \right|^2 ds_1 ds_2 = \sum_{n,m} \left| I_{nm} \right|^2 = \|\mathbf{I}\|^2, \tag{4}$$

звідки випливає, що A — ізометричний оператор у розумінні (4).

Використовуючи введені скалярні добутки (2), (3), на підставі співвідношення $\left(A\mathbf{I}, f\right) = \left(\mathbf{I}, A^* f\right)$ знаходимо необхідний надалі спряжений оператор

$$A^* f = \frac{c_1 c_2}{4\pi^2} \iint_{\Omega} f\left(s_1,s_2\right) e^{-i\left(c_1 n s_1 + c_2 m s_2\right)} ds_1 ds_2 \qquad \left(n = \overline{-N,N};\ m = \overline{-M,M}\right). \tag{5}$$

Нехай задано

$$\tilde{F}\left(s_1,s_2\right) = \begin{cases} F\left(s_1,s_2\right), & \left(s_1,s_2\right) \in G \subseteq \Omega, \\ 0, & \left(s_1,s_2\right) \in \Omega \setminus G, \end{cases} \tag{6}$$

де $F(s_1, s_2)$ — дійсна неперервна та невід'ємна у замкненій області G функція.

Розглянемо задачу про найкраще середньоквадратичне наближення функції $\tilde{F}(s_1,s_2)$ в області Ω модулем подвійного дискретного перетворення Фур'є (1) за рахунок вибору коефіцієнтів вектора **I**. Сформулюємо її як задачу мінімізації функціонала

$$\sigma(\mathbf{I}) = \left\| \tilde{F} - |A\mathbf{I}| \right\|^2_{\mathbf{C}^{(2)}_{(\Omega)}} \equiv \left\| \tilde{F} - |f| \right\|^2_{\mathbf{C}^{(2)}_{(\Omega)}} \tag{7}$$

у просторі $H_I = \mathbb{C}^{N_2 \times M_2}$. Враховуючи рівності (4), (5), функціонал $\sigma(\mathbf{I})$ запишемо у спрощеному вигляді

$$\sigma(\mathbf{I}) = \|F\|^2_{\mathbf{C}^{(2)}_{(G)}} - 2\left(F, |A\mathbf{I}|\right)^2_{\mathbf{C}^{(2)}_{(G)}} + \|\mathbf{I}\|^2_{H_I}. \tag{8}$$

Із використанням необхідної умови мінімуму функціонала одержуємо нелінійну систему рівнянь відносно компонент вектора **I** в просторі H_I, яку запишемо у векторній і розгорнутій формах, відповідно

$$\mathbf{I} = A^*\left(Fe^{i \arg A\mathbf{I}}\right), \tag{9}$$

$$I_{nm} = \frac{c_1 c_2}{4\pi^2} \iint\limits_G F(s_1,s_2) \exp\left\{ i \arg\left(\sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-M}^{M} I_{nm} e^{i(c_1 n s_1 + c_2 m s_2)} \right) - \right.$$
$$\left. - i(c_1 n s_1 + c_2 m s_2) \right\} ds_1 ds_2 \quad \left(n = \overline{-N,N},\ m = \overline{-M,M} \right). \tag{9′}$$

Зауважимо, що система (9), (9′) описує стаціонарні точки функціонала $\sigma(\mathbf{I})$.

Подіявши на обидві сторони рівняння (9) оператором A, одержуємо еквівалентне до (9) нелінійне інтегральне рівняння типу Гаммерштейна відносно функції f

$$f(Q) = \mathbf{B}f \equiv \iint\limits_G K(Q,Q',\mathbf{c}) F(Q') e^{i \arg f(Q')} dQ', \tag{10}$$

де

$$Q = (s_1,s_2), \quad dQ = ds_1 ds_2, \quad Q' = (s_1',s_2'), \quad dQ' = ds_1' ds_2', \quad \mathbf{c} = (c_1, c_2);$$
$$K(Q,Q',\mathbf{c}) = K_1(s_1,s_1',c_1) \cdot K_2(s_2,s_2',c_2), \tag{11}$$
$$K_1(s_1,s_1',c_1) = \frac{c_1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} e^{ic_1 n(s_1 - s_1')} \equiv \frac{c_1}{\pi} \frac{\sin\left[0{,}5 N_2 c_1 (s_1 - s_1')\right]}{c_1(s_1 - s_1')},$$
$$K_2(s_2,s_2',c_2) = \frac{c_2}{2\pi} \sum_{m=-M}^{M} e^{ic_2 m(s_2 - s_2')} \equiv \frac{c_2}{\pi} \frac{\sin\left[0{,}5 M_2 c_2 (s_2 - s_2')\right]}{c_2(s_2 - s_2')}.$$

Зазначимо, що ядро (11) рівняння (10) є вироджене та дійсне.

Розглянемо одну з властивостей функції $\exp\left[i \arg f(Q')\right]$, що входить у рівняння (10), при $f(Q') \to 0$. Очевидно, що

$$\exp\left[i\arg f\left(Q'\right)\right]=\frac{f\left(Q'\right)}{\left|f\left(Q'\right)\right|}\equiv\frac{u\left(Q'\right)+iv\left(Q'\right)}{\left[u^2\left(Q'\right)+v^2\left(Q'\right)\right]^{1/2}}$$

є неперервна функція, якщо $u(Q')=\mathrm{Re}f(Q')$ і $v(Q')=\mathrm{Im}f(Q')$ неперервні функції, причому $\left|\exp\left[i\arg f\left(Q'\right)\right]\right|=1$ для будь-якої $f\left(Q'\right)$. Якщо $u\left(Q'\right)\to 0$ і $v\left(Q'\right)\to 0$ одночасно, то $f\left(Q'\right)\equiv 0$ — комплексний нуль, аргумент у якого невизначений за означенням [10, с. 20]. На цій підставі $\exp\left[i\arg f\left(Q'\right)\right]$ для $u\left(Q'\right)\to 0$ і $v\left(Q'\right)\to 0$ довизначимо як функцію, модуль якої дорівнює одиниці, а аргумент невизначений.

Еквівалентність рівнянь (9) і (10) випливає з наступної леми.

Лема 1. Між розв'язками рівнянь (9), (10) існує взаємно однозначна відповідність, тобто, якщо $\mathbf{I}_*$ — розв'язок рівняння (9), то $f_*=A\mathbf{I}_*$ — розв'язок (10); навпаки, якщо f_* — розв'язок рівняння (10), то

$$\mathbf{I}_*=A^*\left\{F\exp\left[i\arg\left(f_*\right)\right]\right\} \tag{12}$$

— розв'язок рівняння (9).

Доведення. Нехай $\mathbf{I}_*$ — розв'язок рівняння (9). Тоді $\mathbf{I}_*-A^*\left(Fe^{i\arg A\mathbf{I}_*}\right)\equiv 0$. Подіявши на цю тотожність лінійним оператором A, одержуємо $A\mathbf{I}_*-AA^*\times$ $\times\left(Fe^{i\arg A\mathbf{I}_*}\right)\equiv 0$. Оскільки оператор A діє з простору $H_I=\mathbb{C}^{N_2\times M_2}$ у простір $\mathbf{C}^{(2)}_{(\Omega)}$ та відповідно у простір $\tilde{H}_f=L_2(\Omega)$, а множина його нулів складається лише з нульового елемента, то з останньої тотожності випливає, що $A\mathbf{I}_*=f_*\in\tilde{H}_f$ є розв'язок рівняння (10).

Навпаки, нехай $f_*\in\tilde{H}_f$ — розв'язок рівняння (10). Оскільки оператор A^* діє з простору $\tilde{H}^*_f=L^*_2(\Omega)$ у простір $H_I=\mathbb{C}^{N_2\times M_2}$ [9], а гільбертів простір L^*_2 співпадає з простором L_2 (див. [9]), то звідси випливає, що A^* діє з простору $\tilde{H}_f=$ $=L_2(\Omega)$ у простір $H_I=\mathbb{C}^{N_2\times M_2}$. Беручи до уваги, що F — фінітна функція, визначена за формулою (6), а f_* — неперервна, то функція $F\exp\left[i\arg\left(f_*\right)\right]$ є інтегровна з квадратом в області Ω, тобто $F\exp\left[i\arg\left(f_*\right)\right]\in H_f$. Отже, $A^*\left\{F\exp\left[i\arg\left(f_*\right)\right]\right\}=$ $=\mathbf{I}_*\in H_I$, а права частина в рівнянні (10) є результат дії оператора A на елемент $\mathbf{I}_*$, тобто $A\mathbf{I}_*=AA^*\left\{F\exp\left[i\arg\left(f_*\right)\right]\right\}=f_*$. Записуючи цю рівність, як $A\left\langle\mathbf{I}_*-A^*\times\right.$ $\left.\times\left\{\left[F\exp\left(i\arg\left(A\mathbf{I}_*\right)\right)\right]\right\}\right\rangle=0$, і враховуючи, що множина нулів оператора A складається лише з нульового елемента, одержуємо, що $\mathbf{I}_*=A^*\left\{F\exp\left[i\arg\left(A\mathbf{I}_*\right)\right]\right\}$. Отже, $\mathbf{I}_*=A^*\left\{F\exp\left[i\arg\left(f_*\right)\right]\right\}$ є розв'язок рівняння (9).

Лему доведено.

Таким чином, завдяки еквівалентності рівнянь (9) і (10) будемо розглядати простіше з них, а саме, рівняння (10), оскільки рівняння (9) є складніше у тому розумінні, що в його правій частині оператор A входить у показник степеня експоненти. Окрім того, враховуючи, що множина значень оператора A є множина неперервних функцій в області Ω, які належать до простору $L_2(\Omega)$, і ця множина є щільна у просторі $L_2(\Omega)$ [11], то розв'язки рівняння (10) будемо досліджувати в просторі $\mathbf{C}(\Omega)$.

Сформулюємо важливі властивості рівняння (10), які перевіряються безпосередньо.

1°. Якщо функція $f(Q)$ — розв'язок рівняння (10), то комплексно-спряжена функція $\overline{f(Q)}$ — також розв'язок (10).

2°. Якщо функція $f(Q)$ — розв'язок рівняння (10), то $e^{i\beta} f(Q)$ — також розв'язок (10), де β — довільна дійсна стала.

3°. Для парних функцій $F(s_1, s_2)$ за двома аргументами (або за одним аргументом) нелінійний оператор **B**, що знаходиться у правій частині рівняння (10), є інваріантний відносно типу парності функції $\arg f(s_1, s_2)$ за двома аргументами (або за тим аргументом, за яким парна функція $F(s_1, s_2)$).

Надалі, враховуючи властивість 2°, для однозначності розв'язків покладатимемо, що параметр $\beta = 0$.

Розглянемо оператор

$$Df \equiv \iint_{\Omega} K(Q, Q', \mathbf{c}) f(Q') dQ' \tag{13}$$

і відповідну йому квадратичну форму

$$\begin{aligned}(Df, f) &= \iint_{\Omega}\iint_{\Omega} K(Q, Q', \mathbf{c}) f(Q') dQ' \overline{f(Q)} dQ = \\ &= \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-M}^{M} \iint_{\Omega} e^{i(c_1 n s_1 + c_2 m s_2)} \overline{f(s_1, s_2)} ds_1 ds_2 \iint_{\Omega} e^{-i(c_1 n s_1' + c_2 m s_2')} f(s_1', s_2') ds_1' ds_2' = \\ &= \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-M}^{M} \left| \iint_{\Omega} e^{i(c_1 n s_1 + c_2 m s_2)} \overline{f(s_1, s_2)} ds_1 ds_2 \right|^2 = \left(\frac{2\pi}{c_1}\right)\left(\frac{2\pi}{c_2}\right) \|\mathbf{I}\|^2 \ge 0 .\end{aligned}$$

Очевидно, що ця нерівність перетворюється у рівність лише, якщо $\mathbf{I} = 0$. Звідси випливає, що ядро $K(Q, Q', \mathbf{c})$ є додатно визначене [12]. Відповідно оператор D є додатний на конусі невід'ємних функцій K простору $C(\Omega)$ [13]. Згідно з цим, D залишає інваріантним конус K, тобто $D\mathrm{K} \subset \mathrm{K}$.

Декомплексифікований комплексний простір $\mathbf{C}(\Omega)$ [9] розглядатимемо як пряму суму двох дійсних просторів неперервних в області Ω функцій $\mathbf{C}(\Omega) = C(\Omega) \oplus C(\Omega)$, елементи якого подаються у вигляді: $f = (u, v)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{C}(\Omega)$, $u \in C(\Omega)$, $v \in C(\Omega)$. Норми в цих просторах введемо так

$$\|u\|_{C(\Omega)} = \max_{Q\in\Omega}|u(Q)|, \quad \|v\|_{C(\Omega)} = \max_{Q\in\Omega}|v(Q)|, \quad \|f\|_{\mathbf{C}(\Omega)} = \max\left(\|u\|_{C(\Omega)}, \|v\|_{C(\Omega)}\right).$$

Рівняння (10) у декомплексифікованому просторі $\mathbf{C}(\Omega)$ зведемо до еквівалентної йому системи нелінійних рівнянь

$$u(Q) = B_1(u,v) \equiv \iint_G K(Q,Q',\mathbf{c}) F(Q') \frac{u(Q')}{\sqrt{u^2(Q') + v^2(Q')}} dQ',$$
$$v(Q) = B_2(u,v) \equiv \iint_G K(Q,Q',\mathbf{c}) F(Q') \frac{v(Q')}{\sqrt{u^2(Q') + v^2(Q')}} dQ'. \tag{14}$$

Позначимо через $S_R \subset \mathbf{C}(\Omega)$ замкнену опуклу множину неперервних функцій, покладаючи

$$S_R = S_{R_u} \oplus S_{R_v}, \quad S_{R_u} = \left\{u : \|u\|_{C(\Omega)} \le R\right\}, \quad S_{R_v} = \left\{v : \|v\|_{C(\Omega)} \le R\right\},$$
$$R = \max_{Q\in G} \iint_G |K(Q,Q',\mathbf{c})| F(Q') dQ'.$$

Теорема 1. Оператор $\mathbf{B} = (B_1, B_2)^{\mathrm{T}}$, визначений за формулами (14), відображає замкнену опуклу множину S_R банахового простору $\mathbf{C}(\Omega)$ саму в себе та є цілком неперервний.

Доведення. Спочатку покажемо, що $\mathbf{B} : \mathbf{C}(\Omega) \to \mathbf{C}(\Omega)$. Нехай $f = (u,v)^{\mathrm{T}}$ — довільна функція, яка належить до $\mathbf{C}(\Omega)$. Оскільки для $c_1, c_2 \in \Lambda_c$ ядро $K(Q,Q',\mathbf{c})$ є неперервна функція своїх аргументів у замкненій області $\Omega \times \Omega$, то згідно з теоремою Кантора [14] $K(Q,Q',\mathbf{c})$ — рівномірно неперервна у $\Omega \times \Omega$ функція. Звідси випливає: для будь-яких точок $(Q_1,Q_1'),(Q_2,Q_2')$ таких, що як тільки $|(Q_1,Q_1') - (Q_2,Q_2')| < \delta$, то $K|(Q_1,Q_1',\mathbf{c}) - K(Q_2,Q_2',\mathbf{c})| < \varepsilon/a$, де $a = \iint_G F(Q') dQ'$. На цій підставі одержуємо

$$|u(Q_1) - u(Q_2)| = \left| \iint_G F(Q') \left[K(Q_1,Q',\mathbf{c}) - K(Q_2,Q',\mathbf{c}) \right] \times \right.$$
$$\left. \times \frac{u(Q')}{\sqrt{u^2(Q') + v^2(Q')}} dQ' \right| \le \frac{\varepsilon}{a} \iint_G F(Q') dQ' = \varepsilon, \tag{15}$$

оскільки $\max_{Q'\in\Omega} \left| \frac{u(Q')}{\sqrt{u^2(Q') + v^2(Q')}} \right| \le 1$. Аналогічно маємо, що $|v(Q_1) - v(Q_2)| \le \varepsilon$, як тільки $|(Q_1,Q_1') - (Q_2,Q_2')| < \delta$, тобто $(u,v)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{C}(\Omega)$ та $\mathbf{B} : \mathbf{C}(\Omega) \to \mathbf{C}(\Omega)$.

Щоб довести властивість повної неперервності оператора $\mathbf{B} = (B_1, B_2)^{\mathrm{T}}$, необхідно довести його компактність і неперервність [11]. Покажемо неперервність $\mathbf{B} = (B_1, B_2)^{\mathrm{T}}$. Нехай $f_1 = (u_1, v_1)^{\mathrm{T}} \in S_R$ — довільна фіксована функція й $f_2 = (u_2, v_2)^{\mathrm{T}}$ — довільна функція з S_R. Необхідно показати, що $\|\mathbf{B}f_1 - \mathbf{B}f_2\|_{\mathbf{C}(\Omega)} \to 0$, якщо $\|f_1 - f_2\|_{\mathbf{C}(\Omega)} \to 0$. Покладаємо $u_2 = u_1 + \Delta u$, $v_2 = v_1 + \Delta v$. Враховуючи ці рівності, отримуємо

$$\frac{u_2}{\sqrt{u_2^2 + v_2^2}} = \frac{u_1 + \Delta u}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}\sqrt{1 + \dfrac{2u_1\Delta u + 2v_1\Delta v + \Delta u^2 + \Delta v^2}{u_1^2 + v_1^2}}}.$$

Для $\|\Delta u\|_{C(\Omega)} \to 0$, $\|\Delta v\|_{C(\Omega)} \to 0$ маємо

$$\lim_{\substack{\|\Delta u\|\to 0,\\ \|\Delta v\|\to 0}} \left\| \frac{u_1(Q)}{\sqrt{u_1^2(Q) + v_1^2(Q)}} - \frac{u_2(Q)}{\sqrt{u_2^2(Q) + v_2^2(Q)}} \right\|_{\mathbf{C}(\Omega)} \le$$

$$\le \lim_{\substack{\|\Delta u\|\to 0,\\ \|\Delta v\|\to 0}} \max_{Q\in\Omega} \left\{ \left| \frac{u_1(Q)}{\sqrt{u_1^2(Q) + v_1^2(Q)}} \left(1 - \frac{1}{P\big(u_1(Q), v_1(Q), \Delta u(Q), \Delta v(Q)\big)} \right) \right| + \right.$$

$$\left. + \left| \frac{1}{\sqrt{u_1^2(Q) + v_1^2(Q)}} \frac{\Delta u(Q)}{P\big(u_1(Q), v_1(Q), \Delta u(Q), \Delta v(Q)\big)} \right| \right\} = 0, \qquad (16)$$

оскільки

$$\lim_{\substack{\|\Delta u\|\to 0,\\ \|\Delta v\|\to 0}} \max_{Q\in\Omega} \left| P\big(u_1(Q), v_1(Q), \Delta u(Q), \Delta v(Q)\big)(Q) \right| = 1.$$

Тут

$$P\big(u_1(Q), v_1(Q), \Delta u(Q), \Delta v(Q)\big) =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{2u_1(Q)\Delta u(Q) + 2v_1(Q)\Delta v(Q) + \Delta u^2(Q) + \Delta v^2(Q)}{u_1^2(Q) + v_1^2(Q)}}.$$

Аналогічно одержуємо

$$\lim_{\substack{\|\Delta u\|\to 0,\\ \|\Delta v\|\to 0}} \max_{Q\in\Omega} \left| \frac{v_1(Q)}{\sqrt{u_1^2(Q) + v_1^2(Q)}} - \frac{v_2(Q)}{\sqrt{u_2^2(Q) + v_2^2(Q)}} \right| = 0. \qquad (17)$$

Таким чином, із рівностей (16), (17) випливає

$$\lim_{\substack{\|\Delta u\|\to 0,\\ \|\Delta v\|\to 0}} \left\| B_1(u_1,v_1) - B_1(u_2,v_2) \right\|_{\mathbf{C}(\Omega)} =$$

$$= \lim_{\substack{\|\Delta u\|\to 0,\\ \|\Delta v\|\to 0}} \max_{Q\in G} \left| \iint_G F(Q')K(Q,Q',\mathbf{c}) \left[\frac{u_1(Q')}{\sqrt{u_1^2(Q')+v_1^2(Q')}} - \frac{u_2(Q')}{\sqrt{u_2^2(Q')+v_2^2(Q')}} \right] dQ' \right| = 0 .$$

Аналогічно маємо

$$\lim_{\substack{\|\Delta u\|_{C(\Omega)}\to 0,\\ \|\Delta v\|_{C(\Omega)}\to 0}} \left\| B_2(u_1,v_1) - B_2(u_2,v_2) \right\|_{\mathbf{C}(\Omega)} = 0 .$$

Отже, $\mathbf{B} = (B_1, B_2)^{\mathrm{T}}$ — неперервний оператор із $\mathbf{C}(\Omega)$ в $\mathbf{C}(\Omega)$.

Покажемо, що множина функцій $S_g = \mathbf{B}S_R$ задовольняє умови теореми Арцела [11], тобто покажемо, що функції множини S_g є рівномірно обмежені й одностайно неперервні. Нехай $g = (w, \omega)^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}f \equiv (B_1(u,v), B_2(u,v))^{\mathrm{T}}$, де $f = (u,v)^T$ — довільна функція множини S_R. Тоді при $\left|(Q_1,Q') - (Q_2,Q')\right| < \delta$ аналогічно до (15) маємо

$$\begin{pmatrix} \left|w(Q_1) - w(Q_2)\right| \\ \left|\omega(Q_1) - \omega(Q_2)\right| \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} \dfrac{\varepsilon}{a} \displaystyle\iint_G F(Q')dQ' \\ \dfrac{\varepsilon}{a} \displaystyle\iint_G F(Q')dQ' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Таким чином, функції множини $S_g = \mathbf{B}S_R$ є одностайно неперервні.

Рівномірна обмеженість множини $S_g = \mathbf{B}S_R$ випливає з нерівності

$$\|g\|_{\mathbf{C}(\Omega)} = \max\left\{ \max_{Q\in\Omega} \left| \iint_G F(Q')K(Q,Q',\mathbf{c}) \frac{u(Q')}{\sqrt{u^2(Q')+v^2(Q')}} dQ' \right| \le \right.$$

$$\left. \le \max_{Q\in\Omega} \left| \iint_G F(Q')K(Q,Q',\mathbf{c}) \frac{v(Q')}{\sqrt{u^2(Q')+v^2(Q')}} dQ' \right| \right\} \le R ,$$

де $f = (u,v)^{\mathrm{T}}$ — довільна функція множини S_R, $g = \mathbf{B}f \equiv (B_1(u,v), B_2(u,v))^{\mathrm{T}}$.

З останньої нерівності також маємо, що $\mathbf{B}S_R \subset S_R$. Отже, оператор $\mathbf{B}$ = $(B_1, B_2)^{\mathrm{T}}$ є цілком неперервний і відображає замкнену опуклу множину $S_R \subset \mathbf{C}(\Omega)$ саму в себе.

Теорему доведено.

Як *наслідок* із теореми 1 випливає виконання умов принципу Шаудера [15], згідно з яким оператор $\mathbf{B} = (B_1, B_2)^{\mathrm{T}}$ має нерухому точку $f_* = (u_*, v_*)^{\mathrm{T}}$, яка належить множині S_R. Ця точка є розв'язок системи рівнянь (14) і, відповідно, рівняння (10).

Підставляючи $f_* = (u_*, v_*)^{\mathrm{T}}$ у рівність (12), одержуємо розв'язок рівняння (9), який є стаціонарною точкою функціонала (7).

Розв'язки подібної до (14) системи рівнянь у випадку одновимірних областей Ω стосовно задачі синтезу лінійної антенної решітки досліджувалися, зокрема, в [16]. Одержані там результати показують, що для рівнянь типу (10), (14) характерними є неєдиність і галуження розв'язків, які залежать від величини фізичного параметра. Безпосередньо результати, отримані раніше у праці [16], не можна перенести на двовимірну двопараметричну задачу (8), (14). Тут, на відміну від точок галуження [16], існують лінії галуження розв'язків, а задача про знаходження ліній галуження є нелінійна двопараметрична спектральна задача.

Легко упевнитися, що одним із розв'язків рівняння (10) у класі дійсних функцій є

$$f_0(Q,\mathbf{c}) = \iint_G F(Q') K(Q,Q',\mathbf{c})\, dQ' . \tag{18}$$

Оскільки, як було показано вище, оператор D, визначений рівністю (13), є додатний на конусі невід'ємних функцій $\mathrm{K} \in \mathrm{C}(\Omega)$ та $D\mathrm{K} \subset \mathrm{K}$, а $F \subset \mathrm{K}$, то $f_0 = DF$ є також невід'ємна функція в області Ω.

Для знаходження ліній галуження та комплексних розв'язків рівняння (10), що відгалужуються від дійсного розв'язку $f_0(Q,\mathbf{c})$, розглянемо задачу про знаходження такої множини значень параметрів $\mathbf{c}^{(0)} = \left(c_1^{(0)}, c_2^{(0)}\right)$ і всіх відмінних від $f_0(Q,\mathbf{c})$ розв'язків системи (14), які при $\left|\mathbf{c} - \mathbf{c}^{(0)}\right| \to 0$ (причому $c_1 \ge c_1^{(0)}$, $c_2 \ge c_2^{(0)}$) задовольняють умови

$$\max_{Q\in G}\left|u(Q,\mathbf{c}) - f\left(Q,\mathbf{c}^{(0)}\right)\right| \to 0 , \qquad \max_{Q\in G}\left|v(Q,\mathbf{c})\right| \to 0 . \tag{19}$$

Ці умови означають, що необхідно знайти такі малі неперервні в G розв'язки

$$w(Q,\mathbf{c}) = u(Q,\mathbf{c}) - f_0\left(Q,\mathbf{c}^{(0)}\right), \qquad \omega(Q,\mathbf{c}) = v(Q,\mathbf{c}),$$

які рівномірно збігаються до нуля, якщо $\mathbf{c} \to \mathbf{c}^{(0)}$.

Нехай

$$c_1 = c_1^{(0)} + \mu , \qquad c_2 = c_2^{(0)} + \nu , \tag{20}$$

а шукані розв'язки знаходимо у вигляді

$$u(Q,\mathbf{c}) = f_0\left(Q,\mathbf{c}^{(0)}\right) + w(Q,\mu,\nu) , \qquad v(Q,\mathbf{c}) = \omega(Q,\mu,\nu) . \tag{21}$$

Надалі, для скорочення записів, залежність функцій $w(Q,\mu,\nu), \omega(Q,\mu,\nu)$ від параметрів μ, ν будемо опускати.

Відзначимо, що підінтегральні функції в системі (14) є неперервні функції своїх аргументів. Після підстановки виразів (20), (21) у (14) підінтегральні функції розкладаємо в околі точки $\left(\mathbf{c}^{(0)}, f_0\left(Q,\mathbf{c}^{(0)}\right),0\right)$ у рівномірно збіжні степеневі ряди за функціональними аргументами w, ω та числовими параметрами μ, ν

$$F(Q')K(Q,Q',\mathbf{c})\frac{u(Q')}{\sqrt{u^2(Q')+v^2(Q')}}=$$

$$=\sum_{m+n+p+q\ge 0} A_{mnpq}\left(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)}\right)w^m(Q')\omega^n(Q')\mu^p\nu^q,$$

$$F(Q')K(Q,Q',\mathbf{c})\frac{v(Q')}{\sqrt{u^2(Q')+v^2(Q')}}=$$

$$=\sum_{m+n+p+q\ge 1} B_{mnpq}\left(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)}\right)w^m(Q')\omega^n(Q')\mu^p\nu^q, \tag{22}$$

де $A_{mnpq}\left(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)}\right), B_{mnpq}\left(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)}\right)$ — коефіцієнти розкладу, які є неперервними функціями своїх аргументів. Підставляючи (20), (22) в (14) і враховуючи, що $f_0\left(Q',\mathbf{c}^{(0)}\right)$ є розв'язок системи (14), одержуємо систему нелінійних рівнянь відносно малих розв'язків w, ω

$$u(Q)=a_{10}\left(Q,\mathbf{c}^{(0)}\right)\mu+a_{01}\left(Q,\mathbf{c}^{(0)}\right)\nu+$$

$$+\sum_{m+n+p+q\ge 2}\mu^p\nu^q\iint_G A_{mnpq}\left(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)}\right)w^m(Q')\omega^n(Q')dQ', \tag{23}$$

$$\omega(Q)-\iint_G F(Q)K\left(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)}\right)\frac{\omega(Q')}{f_0\left(Q',\mathbf{c}^{(0)}\right)}dQ'=$$

$$=\sum_{m+n+p+q\ge 2}\mu^p\nu^q\iint_G B_{mnpq}\left(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)}\right)w^m(Q')\omega^n(Q')dQ', \tag{24}$$

де

$$a_{10}\left(Q,\mathbf{c}^{(0)}\right)=\iint_G A_{0010}\left(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)}\right)dQ', \qquad a_{01}\left(Q,\mathbf{c}^{(0)}\right)=\iint_G A_{0001}\left(Q,Q',\mathbf{c}^{(0)}\right)dQ'.$$

Для подальшого застосування методів теорії галуження розв'язків нелінійних рівнянь [17] до системи (23), (24) необхідно знайти відмінні від тривіального розв'язки лінійного однорідного інтегрального рівняння, яке одержуємо, прирівнюючи до нуля ліву частину рівняння (24)

$$\varphi(Q)=T(c_1,c_2)\varphi\equiv\iint_G\frac{F(Q')}{f_0(Q',c_1,c_2)}K(Q,Q',c_1,c_2)\varphi(Q')dQ' \tag{25}$$

за умови, що $f_0\left(Q',\mathbf{c}\right) > 0$. Зазначимо, що оператор $T(\mathbf{c}) : \mathbf{C}(\Omega) \to \mathbf{C}(\Omega)$ є цілком неперервний. Доведення цієї властивості аналогічне до доведення повної неперервності оператора $\mathbf{B} = (B_1, B_1)^{\mathrm{T}}$ у теоремі 1.

Література

[1] *Минкович, Б. М.* Теория синтеза антенн / *Б. М. Минкович, В. П. Яковлев*. — Москва: Сов. радио, 1969. — 296 с.

[2] *Савенко, П. А.* Численное решение одного класса нелинейных задач теории синтеза излучающих систем / *П. А. Савенко* // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2000. — Т. 40, № 6. — С. 929-939.

[3] *Савенко, П. О.* Нелінійні задачі синтезу випромінюючих систем (теорія і методи розв'язування) / *П. О. Савенко*. — Львів: ІППММ НАН України, 2002. — 320 с.

[4] *Вайникко, Г. М.* Анализ дискретизационных методов / *Г. М. Вайникко*. — Тарту: Тартуск. гос. ун-т, 1976. — 161 с.

[5] *Grigorieff, R. D.* Approximation von Eigevwertproblemen bei Nichtlinea rer Parameterabhangikeit / *R. D. Grigorieff, H. Jeggle* // Manuscr. math. — 1973. — Vol. 10, No 3. — P. 245-271.

[6] *Karma, O.* Approximation in Eigenvalue Problems for Holomorphic Fredholm Operator Functions. I / *O. Karma* // Numerical Funct. Anal. and Optimization. — 1996. — Vol. 17, No 3 & 4. — P. 365-387.

[7] *Асланян, М. А.* Модификация одного численного метода решения нелинейной спектральной задачи / *М. А. Асланян, С. В. Картышев* // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. — 1998. — Т. 37, № 5. — С. 713-717.

[8] *Solov'yov, S. I.* Preconditioned Iterative Methods for a Class of Nonlinear Eigenvalue Problems / *S. I. Solov'yov* // Linear Algebra and its Applications. — 2006. — Vol. 41, No 1. — P. 210-229.

[9] *Треногин, В. А.* Функциональный анализ / *В. А. Треногин*. — Москва: Наука, 1980. — 496 с.

[10] *Привалов, И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного / *И. И. Привалов*. — Москва: Наука, 1984. — 432 с.

[11] *Колмогоров, А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / *А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин*. — Москва: Наука, 1968. — 496 с.

[12] Забрейко, П. П. Интегральные уравнения / П. П. Забрейко, А. И. Кошелев, М. А. Красносельский. — Москва: Наука, 1968. — 448 с.

[13] Приближенное решение операторных уравнений / *М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко* и др. — Москва: Наука, 1969. — 456 с.

[14] *Ляшко, И. И.* Основы классического и современного математического анализа / *И. И. Ляшко, В. Ф. Емельянов, А. К. Боярчук*. — Київ: Вища школа, 1988. — 591 с.

[15] *Канторович, Л. В.* Функциональный анализ / *Л. В. Канторович, Г. П. Акилов*. — Москва: Наука, 1977. — 742 с.

[16] *Савенко, П. А.* Синтез линейных антенных решеток по заданной амплитудной диаграмме направленности / *П. А. Савенко* // Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика. — 1979. — Т. 22, № 12. — С. 1498-1504.

[17] *Вайнберг, М. М.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений / *М. М. Вайнберг, В. А. Треногин*. — Москва: Наука, 1969. — 527 с.

Mean-square approximation of real function with respect to two variables by Fourier discrete transformation modulus. I. Basic relations

Larysa Protsakh, Petro Savenko, Myroslava Tkach

A nonlinear problem of mean-square approximation of real finite non-negative function with respect to two variables by Fourier discrete transformation modulus, dependent on two parameters is investigated. The solution of this problem is reduced to investigation and solution of nonlinear

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2009, вип. 10, 84-95

two-dimensional Hammerstein type integral equation having the non-unique solution. The linear integral equation on finding the branching points of solutions with nonlinear occurrence of two spectral parameters is obtained. Finding the set of points branching of solutions and numerical examples are considered in part II (continuation) of this paper.

Среднеквадратическая аппроксимация действительной функции двух переменных модулем дискретного преобразования Фурье. I. Основные соотношения

Лариса Процах, Петр Савенко, Мирослава Ткач

Исследуется нелинейная задача среднеквадратической аппроксимации вещественной финитной неотрицательной функции двух переменных модулем дискретного преобразования Фурье, зависимого от двух параметров. Нахождение решений этой задачи сведено к исследованию и решению нелинейного двумерного интегрального уравнения типа Гаммерштейна, имеющего неединственное решение. Получено линейное интегральное уравнение на нахождение множества точек ветвления решений с нелинейным вхождением двух спектральных параметров. Нахождение множества линий ветвления решений и числовые примеры рассматриваются во второй части (продолжении) этой статьи.

Представлено кандидатом фізико-математичних наук М. Дзюбачиком

Отримано 10.07.09