УДК 539.3

Динамічні процеси у параметрично нелінійних пружних системах за врахування інерційності процесу деформування

Олександра Мічуда

Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013

На основі енергетичного підходу сформульовано базові фізичні співвідношення математичної моделі потенціального опису динамічних процесів у пружних дисипативних системах, яка враховує у взаємодії інерційну поступальну, обертову та деформаційну форми локального руху. Встановлено відповідні динамічні рівняння руху. З використанням фізичних співвідношень локального динамічного стану одержано взаємозв'язану ключову систему рівнянь несиметричної динамічної теорії пружності для характерних форм руху. На цій основі запропоновано постановку параметрично нелінійних крайових задач моделі та сформульовано енергетичні умови переходу динамічної системи в рівноважний дисипативний стан.

Ключові слова: динамічна пружна система, енергетичний підхід, локальний динамічний стан, власні та спряжені скалярні інваріанти локального динамічного стану, одиничні тензорні об'єкти, тензор динамічних напружень, динамічні рівняння руху.

Вступ. Проблема оптимального проектування та технології виготовлення елементів тонкостінних конструкцій і приладів, які працюють в умовах динамічного періодично змінного в часі зовнішнього навантаження, зумовлює необхідність подальшого вдосконалення математичних моделей нелінійної механіки деформівних систем із метою найповнішого врахування інерційних параметрів характерних форм локального руху, та, зокрема, пов'язаних з ефектами релаксації процесу деформування. Стан і перспективи розвитку досліджень у цій актуальній галузі механіки деформівного твердого тіла відображені в роботах [1-5]. Необхідно відзначити також класичні праці Я. С. Підстригача [6, 7], які присвячені розробці дифузійної теорії непружного деформування металічних тіл. Тут вперше введено тензорні характеристики інерційності — тензор густини та тензор хімічного потенціалу.

Підхід і методику побудови математичних моделей динамічних процесів у деформівних пружних системах для опису у взаємозв'язку поступальної й обертової форми локального руху та, відповідно, локальної зміни об'єму та форми фізично-малих підсистем, наведено у працях [8, 9]. Зокрема, в [9] встановлено відповідні фізичні та кінематичні рівняння, які враховують дисипативний характер динамічних процесів кожної з форм локального деформаційного руху.

У цій роботі в розвиток такого напрямку досліджень пропонується математична модель опису динамічних процесів у параметрично нелінійних пружних системах з урахуванням інерційності поступальної, обертової та деформаційних форм локального руху.

1. Постановка задачі. Енергетичний підхід

У розгляді масоізольована динамічна пружна система K_*, яка у відліковому однорідному стані ($t \le t_1$, t — час) є ненавантаженою та займає область $X_0^* \bigcup \partial X_0^*$ евклідового простору. Термодинамічний стан системи у відліковій конфігурації характеризується температурою $T_{(0)}$ і густиною ентропії $S_{(0)}$, хімічним потенціалом $\mu_{(0)}$ і густиною маси $\rho_{(0)}$.

Протягом часу $t_1 \le t \le t_2$ система K_* перебуває під дією динамічного силового навантаження, яке зумовлює інерційні термомеханічні процеси.

Ідентифікацію довільної фізично-малої підсистеми $\delta K \subset K_*$ та її центра маси $k \in K_*$ реалізуємо за допомогою радіуса-вектора $\vec{r}_0$ місця матеріальної точки $k \in \delta K$ у відліковій (рівноважній) конфігурації, а розташування цієї точки в довільний інший момент часу t ($t_1 \le t \le t_2$) за допомогою радіуса-вектора $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{u}$, де $\vec{u} = \vec{u}\left(\vec{r}_0, t\right)$ — вектор переміщення.

В основу потенціального опису динамічних процесів за ізотермічних умов $\left(T \approx T_{(0)} = const\right)$ приймаємо балансове енергетичне співвідношення

$$d\mathcal{E}(K_*,t) \equiv \int\limits_{X_0^*} dH\left(\vec{r}_0,t\right) dV_0 = \int\limits_{X_0^*} \left[\vec{\mathrm{v}} \cdot d\vec{p} + \left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{\mathrm{v}}\right) \cdot\cdot \left(d\hat{\mathcal{P}}\right)^{\mathrm{T}} \right] \, dV_0 \, .$$

Тут $H = H\left(\vec{r}_0, t\right)$ — густина повної енергії фізично-малої підсистеми δK, яка є нормованою за об'ємом δV_0 цієї підсистеми у відліковому природному стані; $\vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{v}}\left(\vec{r}_0, t\right)$ — швидкість поступального руху; $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{\mathrm{v}}$ — швидкісна тензорна характеристика процесу деформування; $\vec{p} = \vec{p}\left(\vec{r}_0, t\right) \equiv \int\limits_{t_0}^{t} \left(\vec{\nabla}_0 \cdot \dfrac{\partial \hat{\mathcal{P}}}{\partial t} + \vec{f}^{+} \right) d\tilde{t}$ — вектор імпульсу поступального руху; $\hat{\mathcal{P}} = \hat{\mathcal{P}}\left(\vec{r}_0, t\right)$ — тензор імпульсу деформаційної форми руху; $\vec{f}^{+} = \vec{f}^{+}\left(\vec{r}_0, t\right)$ — вектор об'ємних зовнішніх сил; $\vec{\nabla}_0$ — диференціальний оператор Гамільтона у відліковій конфігурації; $\otimes$ — оператор діадного добутку; дві крапки вказують на операцію подвійного скалярного добутку; символ «Т» — визначає операцію транспонування.

Енергія $\mathcal{E}\left(K_*, t\right)$ є адитивна міра динамічного стану системи K_*. Тому виконується таке локальне балансове енергетичне співвідношення для кожної фізично-малої підсистеми δK

$$dH = \vec{\mathrm{v}} \cdot d\vec{p} + \left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{\mathrm{v}}\right) \cdot\cdot d\left(\hat{\mathcal{P}}\right)^{\mathrm{T}} . \tag{1}$$

Тут адитивні параметри $\vec{p}$ і $\hat{\mathcal{P}}$ є нормовані за геометричними характеристиками фізично-малих підсистем у початковому однорідному стані. Тому маємо також відповідну до (1) білінійну форму інтенсивних і спряжених до них екстенсивних параметрів

$$H = \frac{1}{2}\left[\vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{p} + \left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{\mathrm{v}}\right) \cdot\cdot \left(\hat{\mathcal{P}}\right)^{\mathrm{T}}\right]. \tag{2}$$

Одночасно справджуються такі фізичні співвідношення для швидкісних параметрів моделі, а саме, поступальної та деформаційної форм руху

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \equiv \vec{\mathrm{v}}\left(\vec{p}, \hat{\mathcal{P}}\right),$$

$$\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{\mathrm{v}} = \frac{\partial H}{\partial \hat{\mathcal{P}}} \equiv \left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{\mathrm{v}}\right)\left(\vec{p}, \hat{\mathcal{P}}\right). \tag{3}$$

2. Ізотропні динамічні системи. Скалярні інваріанти моделі

Для ізотропних динамічних систем енергетичний пружний потенціал $H = H\left(\vec{p}, \hat{\mathcal{P}}\right)$ є додатно визначена функція скалярних інваріантів параметрів локального динамічного стану, а саме, параметрів імпульсу $\vec{p}$ поступальної та деформаційної $\hat{\mathcal{P}}$ форм руху.

Власними скалярними інваріантами другого порядку для вектора імпульсу поступального руху $\vec{p}$ є

$$\mathcal{J}_{11}^{(2)} = \hat{I}_{(2)}^{s} \cdot\cdot \vec{p} \otimes \vec{p}, \qquad \mathcal{J}_{12}^{(2)} = \vec{p} \cdot \hat{I}_{(2)}^{a} \cdot \vec{p}.$$

Тут $\hat{I}_{(2)}^{s}$, $\hat{I}_{(2)}^{a}$ — симетричний і антисиметричний складники одиничного тензора другої валентності

$$\hat{I}_{(2)} = \hat{I}_{(2)}^{s} + \hat{I}_{(2)}^{a} \equiv \frac{1}{3}\sum_{i,j=1}^{3} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j,$$

$$\hat{I}_{(2)} = \vec{I}_{(1)} \otimes \vec{I}_{(1)}, \quad \vec{I}_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3\right),$$

$$\hat{I}_{(2)}^{s} = \frac{1}{6}\sum_{i,j=1}^{3}\left(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j + \vec{e}_j \otimes \vec{e}_i\right), \qquad \hat{I}_{(2)}^{a} = \frac{1}{6}\sum_{i,j=1}^{3}\left(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j - \vec{e}_j \otimes \vec{e}_i\right).$$

Для встановлення скалярних інваріантів для несиметричного тензора імпульсу $\hat{\mathcal{P}}$ подамо його сумою трьох доданків

$$\hat{\mathcal{P}} = \mathcal{P}\hat{I}_{(2)} + \left(\hat{\mathcal{P}}^{s}\right)^{d} + \hat{\mathcal{P}}^{a},$$

які відповідають за локальну зміну об'єму, формозміну та деформаційний поворот фізично-малої підсистеми. При цьому

$$\mathcal{P} = \frac{1}{3}\left(\mathcal{P}_{11} + \mathcal{P}_{22} + \mathcal{P}_{33}\right),$$

$$\left(\hat{\mathcal{P}}^s\right)^d = \hat{\mathcal{P}}^s - \mathcal{P}\hat{I}_{(2)},$$

де $\hat{\mathcal{P}}^s$ і $\left(\hat{\mathcal{P}}^s\right)^d$ — симетричний і девіаторний складники симетричного тензора $\hat{\mathcal{P}}^s$.

Власні скалярні інваріанти другого порядку для характеристики деформаційної форм руху $\hat{\mathcal{P}}$ є такі

$$\mathcal{J}_{21}^{(2)} = \left(\vec{I}_{(1)} \cdot \hat{\mathcal{P}}^s\right) \cdot \left(\hat{\mathcal{P}}^s \cdot \vec{I}_{(1)}\right), \quad \mathcal{J}_{22}^{(2)} = \left(\hat{\mathcal{P}}^s\right)^d \cdot\cdot \left(\hat{\mathcal{P}}^s\right)^d,$$

$$\mathcal{J}_{23}^{(2)} = \hat{\mathcal{P}}^a \cdot\cdot \left(\hat{\mathcal{P}}^a\right)^{\mathrm{T}}, \qquad \mathcal{J}_{24}^{(2)} = \left(\vec{I}_{(1)} \cdot \hat{\mathcal{P}}^a\right) \cdot \left[\left(\hat{\mathcal{P}}^a\right)^{\mathrm{T}} \cdot \vec{I}_{(1)}\right].$$

До наведених тут власних скалярних інваріантів необхідно долучити скалярні інваріанти, які характеризують енергію взаємовпливу поступальної й обертової форм руху, та, відповідно, енергію взаємовпливу процесів зміни об'єму та форми фізично-малих підсистем. Інваріанти другого порядку є такі

$$\mathcal{J}_2^{(12)} = \left(\vec{I}_{(1)} \cdot \vec{p}\right)\left[\hat{I}_{(2)}^a \cdot\cdot \left(\hat{\mathcal{P}}^a\right)^{\mathrm{T}}\right], \qquad \mathcal{J}_2^{(34)} = \left[\hat{I}_{(2)}^s \cdot\cdot \left(\hat{\mathcal{P}}^s\right)^d\right]\mathcal{P},$$

$$\mathcal{J}_2^{(24)} = \left[\hat{\mathcal{P}}^a \cdot\cdot \left(\hat{I}_{(2)}^a\right)^{\mathrm{T}}\right]\left[\left(\hat{\mathcal{P}}^s\right)^d \cdot\cdot \hat{I}_{(2)}^s\right], \qquad \mathcal{J}_2^{(31)} = \left(\mathcal{P}\hat{I}_{(2)}^a\right) \cdot\cdot \left(\hat{\mathcal{P}}^a\right)^{\mathrm{T}}.$$

3. Фізичні співвідношення

Для встановлення фізичних співвідношень моделі динамічної пружної системи вихідною є диференціальна 1-форма (1) та білінійна форма (2). Для конкретизації загальної структури фізичних співвідношень (3), подамо густину енергії H як функцію введених скалярних інваріантів другого порядку параметрів стану $\vec{p}, \hat{\mathcal{P}}$. У результаті отримаємо такі фізичні співвідношення

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{1}{\rho}\left\{\vec{p} - \frac{\rho}{\rho_l}\left[\alpha_* \vec{p} \cdot \left(\hat{I}_{(2)}^a\right)^{\mathrm{T}} + \frac{\beta_* \rho}{\rho_l}\left(\hat{\mathcal{P}}^a \cdot\cdot \left(\hat{I}_{(2)}^a\right)^{\mathrm{T}}\right)\vec{I}_{(1)}\right]\right\},$$

$$\left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{\mathrm{v}}\right)^a = \frac{1}{\rho_l}\left\{\frac{1}{2\eta_1^*}\hat{\mathcal{P}}^a - \frac{\rho_l}{\rho}\beta_*\left[\left(\vec{I}_{(1)} \cdot \vec{p}\right) + \mathcal{P} + \left(\left(\hat{\mathcal{P}}^s\right)^d \cdot\cdot \hat{I}_{(2)}^s\right)\right]\left(\hat{I}_{(2)}^a\right)^{\mathrm{T}}\right\},$$

$$\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\mathrm{v}} = \frac{1}{\rho_l}\left\{\frac{1}{3\eta_0}\mathcal{P} - \frac{\rho_l}{\rho}\beta_*\left[\hat{I}_{(2)}^s \cdot\cdot \left(\hat{\mathcal{P}}^s\right)^d + \hat{\mathcal{P}}^a \cdot\cdot \left(\hat{I}_{(2)}^a\right)^{\mathrm{T}}\right]\right\},$$

$$\left[\left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{\mathrm{v}}\right)^s\right]^d = \frac{1}{\rho_l}\left\{\frac{1}{2\eta_1}\left(\hat{\mathcal{P}}^s\right)^d - \frac{\rho_l}{\rho}\beta_*\left[\mathcal{P} + \hat{\mathcal{P}}^a \cdot\cdot \left(\hat{I}_{(2)}^a\right)^{\mathrm{T}}\right]\hat{I}_{(2)}^s\right\}. \tag{4}$$

Тут ρ — об'ємна густина маси, ρ_l — лінійна густина маси, α_*, β_* — коефіцієнти взаємодії характерних форм локального руху, а саме, поступального, обертового і зміни об'єму та форми фізично-малих підсистем.

4. Локальний динамічний стан. Динамічні рівняння руху

Для одержання таких рівнянь продиференціюємо за часом фізичні співвідношення (4)

$$\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt}=\frac{1}{\rho}\left\{\frac{d\vec{p}}{dt}-\frac{\rho}{\rho_l}\left[\alpha_*\frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\left(\hat{I}^a_{(2)}\right)^{\mathrm{T}}+\frac{\beta_*\rho}{\rho_l}\left(\frac{d\hat{\mathcal{P}}^a}{dt}\cdot\cdot\left(\hat{I}^a_{(2)}\right)^{\mathrm{T}}\right)\vec{I}_{(1)}\right]\right\},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\nabla}_0\otimes\vec{\mathrm{v}}\right)^a=\frac{1}{\rho_l}\left\{\frac{1}{2\eta_1^*}\frac{d\hat{\mathcal{P}}^a}{dt}-\frac{\rho_l}{\rho}\beta_*\left[\vec{I}_{(1)}\cdot\frac{d\vec{p}}{dt}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{d\mathcal{P}}{dt}+\frac{d\left(\hat{\mathcal{P}}^s\right)^d}{dt}\cdot\cdot\hat{I}^s_{(2)}\right]\left(\hat{I}^a_{(2)}\right)^{\mathrm{T}}\right\},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\nabla}_0\cdot\vec{\mathrm{v}}\right)=\frac{1}{\rho_l}\left\{\frac{1}{3\eta_0}\frac{d\mathcal{P}}{dt}-\frac{\rho_l}{\rho}\beta_*\left[\hat{I}^s_{(2)}\cdot\cdot\frac{d\left(\hat{\mathcal{P}}^s\right)^d}{dt}+\frac{d\hat{\mathcal{P}}^a}{dt}\cdot\cdot\left(\hat{I}^a_{(2)}\right)^{\mathrm{T}}\right]\right\},$$

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\vec{\nabla}_0\otimes\vec{\mathrm{v}}\right)^s\right]^d=\frac{1}{\rho_l}\left\{\frac{1}{2\eta_1}\frac{d\left(\hat{\mathcal{P}}^s\right)^d}{dt}-\frac{\rho_l}{\rho}\beta_*\left[\frac{d\mathcal{P}}{dt}+\frac{d\hat{\mathcal{P}}^a}{dt}\cdot\cdot\left(\hat{I}^a_{(2)}\right)^{\mathrm{T}}\right]\hat{I}^s_{(2)}\right\}.$$

Для динамічних пружних систем

$$\frac{d\hat{\mathcal{P}}}{dt}=\hat{\sigma}_*,\qquad \frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{\nabla}_0\cdot\hat{\sigma}_*+\vec{f}^{\,+}. \tag{5}$$

Тут $\hat{\sigma}_*=\hat{\sigma}_*\left(\vec{r}_0,t\right)$ — тензор динамічних напружень, який для ізотропних пружних систем подається так

$$\hat{\sigma}_*=3K_*e\hat{I}_{(2)}+2G_*\left(\hat{e}-e\hat{I}_{(2)}\right)+2G_*'\hat{\varphi}, \tag{6}$$

де K_*, G_*, G_*' — динамічні модулі пружності стосовно локальної деформаційної зміни об'єму, форми та повороту фізично-малих підсистем; $e=\vec{\nabla}_0\cdot\vec{u}, \hat{e}=\frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}+\right.$ $\left.+\vec{u}\otimes\vec{\nabla}_0\right)$, $\hat{\varphi}=\frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}-\vec{u}\otimes\vec{\nabla}_0\right)$; $\vec{u}$ — вектор переміщення.

Якщо використати фізичні співвідношення (5), (6), то одержимо таку взаємозв'язану систему рівнянь локального опису динамічних процесів для характерних форм руху

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2009, вип. 10, 66-74

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{1}{\rho}\left\{\left(\hat{I}_{(2)}-\frac{\rho}{\rho_l}\alpha_*\hat{I}^a_{(2)}\right)\cdot\left(\vec{\nabla}_0\cdot\hat{\sigma}_*+\vec{f}^+\right)+\frac{2\rho\beta_*}{\rho_l}G'_*\left[\hat{\varphi}\cdot\cdot\left(\hat{I}^a_{(2)}\right)^{\mathrm{T}}\right]\vec{I}_{(1)}\right\},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\nabla}_0\otimes\vec{v}\right)^a=\frac{1}{\rho_l}\left\{\frac{G'_*}{\eta_1^*}\hat{\varphi}-\frac{\rho_l}{\rho}\beta_*\left[\left(\vec{\nabla}_0\cdot\hat{\sigma}_*+\vec{f}^+\right)\cdot\vec{I}_{(1)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2G_*\left(\hat{e}^d\cdot\cdot\hat{I}^s_{(2)}\right)+K_*e\right]\left(\hat{I}^a_{(2)}\right)^{\mathrm{T}}\right\},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\nabla}_0\cdot\vec{v}\right)=\frac{1}{\rho_l}\left\{\frac{K_*}{3\eta_0}e-\frac{2\rho_l}{\rho}\beta_*\left[G_*\left(\hat{e}^d\cdot\cdot\hat{I}^s_{(2)}\right)+G'_*\left(\hat{\varphi}\cdot\cdot\left(\hat{I}^a_{(2)}\right)^{\mathrm{T}}\right)\right]\right\},$$

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\vec{\nabla}_0\otimes\vec{v}\right)^s\right]^d=\frac{1}{\rho_l}\left\{\frac{G_*}{\eta_1}\hat{e}^d-\frac{\rho_l}{\rho}\beta_*\left[K_*e+2G'_*\left(\hat{\varphi}\cdot\cdot\left(\hat{I}^a_{(2)}\right)^{\mathrm{T}}\right)\right]\hat{I}^s_{(2)}\right\}. \tag{7}$$

Сформульованим динамічним рівнянням (7) поставимо у відповідність еквівалентну параметрично нелінійну систему динамічних рівнянь моделі

$$\frac{d}{dt}\left\{\vec{v}-2\beta_*\eta_1^*\left[\left(\vec{\nabla}_0\otimes\vec{v}\right)^a\cdot\cdot\left(\hat{I}^a_{(2)}\right)^{\mathrm{T}}\right]\vec{I}_{(1)}\right\}=\frac{1}{\rho}\left\{\left(\hat{I}_{(2)}-\frac{\rho}{\rho_l}\alpha_*\hat{I}^a_{(2)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2\beta_*^2\eta_1^*\hat{I}_{(2)}\right)\cdot\left(\vec{\nabla}_0\cdot\hat{\sigma}_*+\vec{f}^+\right)+2\beta_*^2\eta_1^*\left[2G_*\left(\hat{e}^d\cdot\cdot\hat{I}^s_{(2)}\right)+K_*e\right]\vec{I}_{(1)}\right\},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\nabla}_0\otimes\vec{v}\right)^a=\frac{1}{\rho_l}\left\{\frac{G'_*}{\eta_1^*}\hat{\varphi}-\frac{\rho_l}{\rho}\beta_*\left[\left(\vec{\nabla}_0\cdot\hat{\sigma}_*+\vec{f}^+\right)\cdot\vec{I}_{(1)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2G_*\left(\hat{e}^d\cdot\cdot\hat{I}^s_{(2)}\right)+K_*e\right]\left(\hat{I}^a_{(2)}\right)^{\mathrm{T}}\right\},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\nabla}_0\cdot\vec{v}\right)=\frac{1}{\rho_l}\left\{\frac{K_*}{3\eta_0}e-\frac{2\rho_l}{\rho}\beta_*\left[G_*\left(\hat{e}^d\cdot\cdot\hat{I}^s_{(2)}\right)+G'_*\left(\hat{\varphi}\cdot\cdot\left(\hat{I}^a_{(2)}\right)^{\mathrm{T}}\right)\right]\right\},$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\left[\left(\vec{\nabla}_0\otimes\vec{v}\right)^s\right]^d+3\beta_*\eta_0\frac{\rho_l}{\rho}\left(\vec{\nabla}_0\cdot\vec{v}\right)\hat{I}^s_{(2)}\right\}=\frac{1}{\rho_l}\left\{\frac{G_*}{\eta_1}\hat{e}^d-\right.$$

$$\left.-\frac{2\rho_l}{\rho}\beta_*\left[3\frac{\rho_l^2}{\rho}\beta_*\eta_0G_*\left(\hat{e}^d\cdot\cdot\hat{I}^s_{(2)}\right)-G'_*\left(1-3\frac{\rho_l^2}{\rho}\beta_*\eta_0\right)\left(\hat{\varphi}\cdot\cdot\left(\hat{I}^a_{(2)}\right)^{\mathrm{T}}\right)\right]\hat{I}^s_{(2)}\right\}. \tag{8}$$

Одержані результати є базові для постановки відповідних початково-крайових задач щодо опису хвильових процесів з урахуванням взаємозв'язку характерних форм локального поступального, обертового та деформаційного рухів і самоорганізаційних явищ.

5. Рівноважний дисипативний стан

Вихідними є необхідні умови стаціонарності динамічної параметрично нелінійної системи рівнянь (8)

$$\left[\hat{I}_{(2)}-\frac{\rho}{\rho_l}\alpha_*\hat{I}^a_{(2)}+2\beta_*^2\eta_1^*\hat{I}_{(2)}\right]\cdot\left(\vec{\nabla}_0\cdot\hat{\sigma}_*+\vec{f}^+\right)+$$

$$+2\beta_*^2\eta_1^*\left[2G_*\left(\hat{e}^d\cdot\cdot\hat{I}^s_{(2)}\right)+K_*e\right]\vec{I}_{(1)}=0\,,$$

$$\frac{G_*'}{\eta_1^*}\hat{\varphi}-\frac{\rho_l}{\rho}\beta_*\left[\left(\vec{\nabla}_0\cdot\hat{\sigma}_*+\vec{f}^+\right)\cdot\vec{I}_{(1)}+2G_*\left(\hat{e}^d\cdot\cdot\hat{I}^s_{(2)}\right)+K_*e\right]\left(\hat{I}^a_{(2)}\right)^{\mathrm{T}}=0\,,$$

$$\frac{K_*}{3\eta_0}e-\frac{2\rho_l}{\rho}\beta_*\left[G_*\left(\hat{e}^d\cdot\cdot\hat{I}^s_{(2)}\right)+G_*'\left(\hat{\varphi}\cdot\cdot\left(\hat{I}^a_{(2)}\right)^{\mathrm{T}}\right)\right]=0\,,$$

$$\frac{G_*}{\eta_1}\hat{e}^d-\frac{2\rho_l}{\rho}\beta_*\left[3\frac{\rho_l^2}{\rho}\beta_*\eta_0G_*\left(\hat{e}^d\cdot\cdot\hat{I}^s_{(2)}\right)-\right.$$

$$\left.-G_*'\left(1-3\frac{\rho_l^2}{\rho}\beta_*\eta_0\right)\left(\hat{\varphi}\cdot\cdot\left(\hat{I}^a_{(2)}\right)^{\mathrm{T}}\right)\right]\hat{I}^s_{(2)}=0\,. \qquad (9)$$

Тензор динамічних напружень $\hat{\sigma}_*$ (6) та тензор градієнта місця $\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}$ з урахуванням сформульованих умов стаціонарності (9) динамічної системи набувають вигляду

$$\hat{\sigma}_*=2\frac{\rho_l}{\rho}\beta_*\left\{G_*\eta_0\left(\hat{e}^d\cdot\cdot\hat{I}^a_{(2)}\right)\hat{I}_{(2)}+\frac{1}{3}K_*\eta_1e\hat{I}^a_{(2)}-\frac{1}{3}\eta_1^*\left[\left(\vec{\nabla}_0\cdot\hat{\sigma}_*+\vec{f}^+\right)\cdot\vec{I}_{(1)}\right]\hat{I}^a_{(2)}\right\},$$

$$\left(\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}\right)^{\mathrm{T}}=\frac{\rho_l}{\rho}\beta_*\left\{2\eta_0\frac{G_*}{K_*}\left(\hat{e}^d\cdot\cdot\hat{I}^a_{(2)}\right)\hat{I}_{(2)}+\frac{1}{3}\eta_1\frac{K_*}{G_*}e\hat{I}^a_{(2)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\eta_1^*}{3G_*'}\left[\left(\vec{\nabla}_0\cdot\hat{\sigma}_*+\vec{f}^+\right)\cdot\vec{I}_{(1)}\right]\hat{I}^a_{(2)}\right\}.$$

У зв’язку з цим енергетичний функціонал рівноважного дисипативного стану динамічної пружної системи буде

$$\mathcal{E}=\int\limits_{X_0^*}\hat{\sigma}_*\cdot\cdot\left(\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}\right)^{\mathrm{T}}dV_0\equiv$$

$$\equiv\frac{2}{3}\left(\frac{\rho_l}{\rho}\right)^2\beta_*^2\int\limits_{X_0^*}\left\{\frac{6G_*^2\eta_0^2}{K_*}\left(\hat{e}^d\cdot\cdot\hat{I}^a_{(2)}\right)^2+\eta_1\left[\eta_0\left(K_*+2G_*\right)-\frac{1}{3}\eta_1\frac{K_*^2}{G_*}\right]e^2+\right.$$

$$+\eta_1^*\left[\frac{1}{G_*'}\left(G_*\eta_0-\frac{1}{3}\eta_1K_*\right)+\frac{1}{3}\eta_1\frac{K_*}{G_*}\right]e\left[\left(\vec{\nabla}_0\cdot\hat{\sigma}_*+\vec{f}^+\right)\cdot\vec{I}_{(1)}\right]+$$

$$\left.+\frac{1}{9}\frac{\left(\eta_1^*\right)^2}{G_*'}\left[\left(\vec{\nabla}_0\cdot\hat{\sigma}_*+\vec{f}^+\right)\cdot\vec{I}_{(1)}\right]^2\right\}dV_0\,.$$

Одержані результати вказують на те, що рівноважний дисипативний стан задовольняє необхідній і достатній умовам стійкості динамічної пружної системи

$$\left.\frac{d\mathcal{E}}{d\beta_*}\right|_{\beta_*=0} = 0\,, \qquad \left.\frac{d^2\mathcal{E}}{d\beta_*^2}\right|_{\beta_*=0} > 0\,.$$

Висновки. Запропоновано енергетичний підхід і методику побудови базових співвідношень математичної моделі динамічних пружних систем з урахуванням інерційності поступальної, обертової та деформаційної форм локального руху. Одержані результати є базові для математичної постановки відповідних параметрично нелінійних крайових задач динамічної теорії пружності [1, 10] і, зокрема, встановлення на цій основі самоорганізаційних стаціонарних станів [11, 12].

Література

[1] *Гринченко, В. Т.* Гармонические колебания и волны в упругих телах / *В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко*. — Киев: Наук. думка, 1981. — 284 с.

[2] *Селезов, И. Т.* Моделирование волновых и дифракционных процессов в сплошных средах / *И. Т. Селезов*. — Киев: Наук. думка, 1989. — 204 с.

[3] *Григолюк, Э. И.* Неклассическая теория колебаний стержней, пластин и оболочек / *Э. И. Григолюк, И. Т. Селезов*. — Москва: ВИНИТИ, 1973. — 272 с.

[4] *Тимошенко, С. П.* Статические и динамические проблемы теории упругости / *С. П. Тимошенко*. — Киев: Наук. думка, 1975. — 564 с.

[5] *Уизем, Дж.* Линейные и нелинейные волны / *Дж. Уизем*. — Москва: Мир, 1977. — 622 с.

[6] *Підстригач, Я. С.* Диференціальні рівняння дифузійної теорії деформації твердого тіла / *Я. С. Підстригач* // Доп. АН УРСР. — 1963. — № 31. — С. 336-344.

[7] *Подстригач, Я. С.* Диффузионная теория неупругости металлов / *Я. С. Подстригач* // Журн. прикл. механики и техн. физики. — 1965. — № 2. — С. 67-72.

[8] *Мічуда, О. Я.* Про енергетичний підхід до формування фізичних співвідношень механіки інерційних пружних систем / *О. Я. Мічуда* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2007. — Т. 50, № 2. — С. 74-78.

[9] *Мічуда, О. Я.* Про один підхід до побудови математичної моделі динамічних процесів в пружних системах з урахуванням релаксаційних явищ / *О. Я. Мічуда* // Доп. НАН України. — 2009. — № 6. — С. 79-84.

[10] *Боголюбов, Н. Н.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / *Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский*. — Москва: Наука, 1974. — 504 с.

[11] *Сугаков, В. Й.* Основи синергетики / *В. Й. Сугаков*. — Київ: Обереги, 2001. — 287 с.

[12] *Николис, Г.* Самоорганизация в неравновесных системах / *Г. Николис*, *Н. Пригожин*. — Москва: Мир, 1979. — 512 с.

Mathematical modelling dynamical processes in parametrically nonlinear elastic systems taking into account persistence of deformation forms of motion

Olexandra Michuda

On the basis of energy approach the initial physical correlations of mathematical model of potential description of dynamical processes in elastic dissipative systems, which takes into account during interaction the inertia linear, rotary and deformation forms of motion are formulated. The corresponding equations of motion are established. Using physical correlations of local *dynamical state the correlated key set of equations of unsymmetrical dynamic theory of elasticity for characteristic forms of motion is obtained. On that ground the statement of parametrically nonlinear boundary value problems of the model is proposed.*

Математическое моделирование динамических процессов в параметрически нелинейных упругих системах с учетом инерционности деформационных форм движения

Александра Мичуда

С использованием энергетического подхода сформулированы исходные физические соотношения математической модели потенциального описания динамических процессов в упругих диссипативных системах, которые учитывают взаимовлияние инерционной поступательной, вращательной и деформационной форм локального движения. Установлены соответствующие динамические уравнения движения. С использованием физических соотношений локального динамического состояния получена взаимосвязанная разрешающая система уравнений несимметричной динамической теории упругости для характерных форм движения. В этой связи предложена постановка параметрически нелинейных краевых задач модели и сформулированы энергетические условия перехода динамической системы в равновесное диссипативное состояние.

Представлено доктором фізико-математичних наук В. Кондратом

Отримано 13.07.09