УДК 517.9:539.3

Побудова розв'язку одного рівняння термопружності кусково-однорідних циліндричних оболонок

Юрій Гнатів

К. ф.-м. н., Львівська філія Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту ім. акад. В. Лазаряна, вул. І. Блажкевич, 12*а*, Львів, 79052

Пропонується методика розв'язування рівняння для визначення прогинів пружної кусково-однорідної в осьовому напрямку циліндричної оболонки, яка перебуває під дією осесиметричного сталого за товщиною температурного поля. Методика базується на використанні функції, неперервно-диференційовної на множині дійсних чисел. Вихідне рівняння зводиться до диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами та сингулярною правою частиною. Для побудови його розв'язку використовується інтегральне перетворення Фур'є.

Ключові слова: кусково-однорідна циліндрична оболонка, рівняння для визначення прогинів, побудова розв'язку.

Вступ. Для побудови розв'язків диференціальних рівнянь термопружності кусково-однорідних тіл, зокрема оболонок, у роботі [1] застосовується співвідношення, яке зв'язує класичну й узагальнену похідні. У цій праці для розв'язування такого рівняння замість співвідношення, яке пов'язує класичну й узагальнену похідні, використаємо функцію, яка неперервно-диференційовна на множині дійсних чисел. Розв'язки, які отримуються на основі пропонованої у роботі [1] і цій праці методик, задовольняють умови ідеального механічного контакту сусідніх різнорідних елементів тіл.

Постановка задачі та методика побудови розв'язку

Розглянемо пружну кусково-однорідну циліндричну оболонку, віднесену до циліндричної системи координат. Нехай модуль пружності та коефіцієнт лінійного теплового розширення оболонки залежать від осьової координати, а коефіцієнт Пуассона — стала величина. Приймаємо, що оболонка перебуває під дією осесиметричного сталого за товщиною температурного поля. Рівняння термопружності цієї оболонки зводяться до рівняння для визначення прогинів, яке можна подати у вигляді [2-4]

$$\left[E(x)w_0''(x)\right]'' + 4E(x)\left[w_0(x) - \alpha(x)t(x)\right] = 0. \tag{1}$$

Тут $x = az/R$; $a^4 = 3\left(1-\nu^2\right)R^2\Big/\left(4h^2\right)$; $w_0(x) = w(x)/R$; z — осьова координата; $w(x)$ —

прогин; $E(x)$ — модуль пружності; $\alpha(x)$ — коефіцієнт лінійного теплового розширення; ν — коефіцієнт Пуассона; $2h$ — товщина оболонки; R — радіус серединної поверхні; $t(x)$ — температурне поле.

Нехай

$$E(x) = E_0 + \sum_{i=1}^{n} \left(E_i - E_{i-1}\right) S_-\left(x - x_i\right), \quad \alpha(x) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i - \alpha_{i-1}\right) S_-\left(x - x_i\right),$$

де $S_-\left(x - x_i\right) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \ge x_i, \\ 0, \text{ якщо } x < x_i. \end{cases}$

Із метою спрощення рівняння (1) уведемо функцію

$$z(x) = E(x) w_0''(x). \tag{2}$$

Подамо рівняння (1) таким чином

$$z''(x) + 4E(x)\left[w_0(x) - \alpha(x) t(x)\right] = 0. \tag{3}$$

Зі співвідношень (2), (3) видно, що функції $w_0(x)$ і $z(x)$ неперервно-диференційовні на множині дійсних чисел. Із цієї властивості функцій $w_0(x)$ і $z(x)$ випливають умови ідеального механічного контакту сусідніх різнорідних елементів оболонки.

Використавши тотожність [1]

$$\left[E_0 + \sum_{i=1}^{n} \left(E_i - E_{i-1}\right) S_-\left(x - x_i\right)\right]^{-1} = \frac{1}{E_0} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{E_i} - \frac{1}{E_{i-1}}\right) S_-\left(x - x_i\right),$$

співвідношення (2) перетворимо до вигляду

$$w_0''(x) = \left[\frac{1}{E_0} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{E_i} - \frac{1}{E_{i-1}}\right) S_-\left(x - x_i\right)\right] z(x). \tag{4}$$

Диференціюючи рівняння (4) по x і беручи до уваги, що $z(x)$ — неперервна функція, отримаємо

$$w_0'''(x) = \left[\frac{1}{E_0} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{E_i} - \frac{1}{E_{i-1}}\right) S_-\left(x - x_i\right)\right] z'(x) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{E_i} - \frac{1}{E_{i-1}}\right) z(x_i) \delta_-\left(x - x_i\right). \tag{5}$$

Тут $\delta_-\left(x - x_i\right)$ — асиметрична дельта-функція.

Диференціюючи рівняння (5) по x і враховуючи, що $z(x)$ — неперервно-диференційовна функція, одержуємо

$$w_0^{(4)}(x) = \left[\frac{1}{E_0} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{E_i} - \frac{1}{E_{i-1}}\right)S_-\left(x - x_i\right)\right]z''(x) +$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{E_i} - \frac{1}{E_{i-1}}\right)\left[z'(x_i)\delta_-\left(x - x_i\right) + z(x_i)\delta'_-\left(x - x_i\right)\right]. \quad (6)$$

Визначимо з (3) функцію $z''(x)$ і підставимо її у вираз (6). Тоді отримаємо наступне рівняння зі сталими коефіцієнтами та сингулярною правою частиною

$$w_0^{(4)}(x) + 4w_0(x) = 4\alpha(x)t(x) +$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{E_i} - \frac{1}{E_{i-1}}\right)\left[z'(x_i)\delta_-\left(x - x_i\right) + z(x_i)\delta'_-\left(x - x_i\right)\right]. \quad (7)$$

Використовуючи те, що функція $z(x)$ неперервно-диференційовна, а також співвідношення (2), знайдемо

$$z\left(x_i\right) = E_{i-1}w_0''\left(x_i - 0\right), \quad z'\left(x_i\right) = E_{i-1}w_0'''\left(x_i - 0\right) \quad \left(i = \overline{1, n}\right). \quad (8)$$

Ураховуючи формули (8), рівняння (7) подамо таким чином

$$w_0^{(4)}(x) + 4w_0(x) = 4\alpha(x)t(x) +$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{E_{i-1}}{E_i} - 1\right)\left[w_0'''(x_i - 0)\delta_-\left(x - x_i\right) + w_0''(x_i - 0)\delta'_-\left(x - x_i\right)\right]. \quad (9)$$

Розв'язок рівняння (9), обмежений при $|x| \to \infty$, знайдений за допомогою інтегрального перетворення Фур'є, має вигляд

$$w_0(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(\xi)t(\xi)e^{-|x-\xi|}\left[\cos(x - \xi) + \sin|x - \xi|\right]d\xi +$$
$$+\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{E_{i-1}}{E_i} - 1\right)e^{-|x-x_i|}\left\{w_0'''(x_i - 0)\left[\cos\left(x - x_i\right) + \sin|x - x_i|\right] -\right.$$
$$\left.-2w_0''(x_i - 0)\sin\left(x - x_i\right)\right\}. \quad (10)$$

Визначивши другу та третю похідні функції $w_0(x)$ і послідовно поклавши $x = x_1 - 0, x = x_2 - 0, \ldots, x = x_n - 0$ в отриманих формулах, дістанемо систему рівнянь для знаходження величин $w_0'''\left(x_i - 0\right)$ і $w_0''\left(x_i - 0\right)\left(i = \overline{1, n}\right)$. Якщо $n = 1$, а $x_1 = 0$, то ця система складається з рівнянь

$$\left(E_0 - E_1\right)w_0'''(-0) + 2\left(E_0 + E_1\right)w_0''(-0) = E_1F_1,$$
$$\left(E_0 + E_1\right)w_0'''(-0) + \left(E_0 - E_1\right)w_0''(-0) = E_1F_2, \quad (11)$$

де

$$F_1 = 4\int_0^{\infty}\left[\alpha_0 t(-\xi) + \alpha_1 t(\xi)\right]e^{-\xi}\left(\sin\xi - \cos\xi\right)d\xi\,,$$

$$F_2 = 4\int_0^{\infty}\left[\alpha_0 t(-\xi) - \alpha_1 t(\xi)\right]e^{-\xi}\cos\xi d\xi\,.$$

Висновки. Показано ефективність застосування неперервно-диференційовної на множині дійсних чисел функції для розв'язування диференціального рівняння термопружності для кусково-однорідних тіл. Запропонована методика дозволяє отримати розв'язок для всієї оболонки як єдиного цілого.

Література

[1] *Подстригач, Я. С.* Термоупругость тел неоднородной структуры / *Я. С. Подстригач, В. А. Ломакин, Ю. М. Коляно*. — Москва: Наука, 1984. — 368 с.
[2] *Бурак, Я. Й.* Аналітична механіка локально навантажених оболонок / Я. *Й. Бурак, Ю. К. Рудавський, М. А. Сухорольський*. — Львів: Інтелект-Захід, 2007. — 240 с.
[3] *Григолюк, Э. И.* Оптимизация нагрева оболочек и пластин / *Э. И. Григолюк, Я. С. Подстригач, Я. И. Бурак*. — Киев: Наук. думка, 1979. — 364 с.
[4] *Moguillen, E. J.* Dynamic Thermoelastic Response of Cylindrical Shells / *E. J. Moguillen, M. A. Brull*. — Trans. ASME. Ser. E. J. App. Mech. — 1970. — Vol. 37, No 3. — P. 88-97.

Solution construction of one equation of thermoelasticity of piecewise-homogeneous cylindrical shells

Yuriy Hnativ

The method of solution of equation for determination of bends of elastic piecewise-homogeneous in axial direction cylindrical shell, subjected to the action of the axisymmetrical thickness-constant temperature field, is proposed. The method is based on the use of function, that is continuously differentiated for the real numbers plurality. The initial equation is reduced to a differential equation with constant coefficients and singular right part. For the construction of its solution the integral Fourier transformation is used.

Построение решения одного уравнения термоупругости кусочно-однородных цилиндрических оболочек

Юрий Гнатив

Предлагается методика решения уравнения для определения прогибов упругой кусочно-однородной в осевом направлении цилиндрической оболочки, которая находится под воздействием осесимметричного постоянного по толщине температурного поля. Методика базируется на использовании функции, непрерывно-дифференцируемой на множестве действительных чисел. Исходное уравнение сводится к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами и сингулярной правой частью. Для построения его решения используется интегральное преобразование Фурье.

Представлено професором Т. Нагірним

Отримано 19.02.09