

О.Ю.Чернуха, д.т.н.; В.Є.Гончарук, к.ф.-м.н.; В.А.Дмитрук, Центр математичного моделювання ІППММ НАНУ, НУ “Львівська політехніка”, м.Львів

## МОДЕЛЮВАННЯ ГРАНИЧНИХ ВИПАДКІВ КОНТАКТНО-КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ СТАЦІОНАРНОЇ КОНВЕКТИВНОЇ ДИФУЗІЇ В ПЕРІОДИЧНИХ СТРУКТУРАХ

*Abstract.* Admixture convective diffusion processes are studied in a two-phase layer of periodical structure, when convective mechanism of mass transfer is allowed for in one of the phases. An exact solution is constructed by using integral transformations separately in the contacting domains. Limiting and partial cases of convective diffusion are investigated on the basis of the found solution of the problem of admixture mass transfer in regular structures with periodical character of convective phenomena.

*Key-words:* diffusion, convection, admixture, periodical structure, integral transformation, passage through the limit

*Анотація.* Досліджено процеси конвективної дифузії домішкової речовини у двофазному шарі періодичної структури, коли конвективний механізм масоперенесення враховується в одній з фаз. Побудований точний розв'язок контактної-крайової задачі конвективної дифузії з допомогою інтегральних перетворень окремо в контактуючих областях. Вивчені граничні та часткові випадки конвективної дифузії на основі знайдених розв'язків задачі масопереносу домішкової речовини у двофазних регулярних структурах з урахуванням періодичного характеру конвективних явищ.

*Ключові слова:* дифузія, конвекція, домішкова речовина, періодична структура, інтегральне перетворення, граничний перехід

**Вступ.** При розв'язанні ряду прикладних задач виникає широкий клас фізичних задач, пов'язаних з конвективно-дифузійними процесами, що відбуваються в багатофазних об'єктах природного середовища, який вимагає кількісного та якісного опису з урахуванням суттєво різних фізичних характеристик фаз. Зокрема представляють інтерес точні розв'язки конкретних контактної-крайових задач процесів масоперенесення для кусково-однорідних систем, у т.ч. просторово регулярних [1-3]. Таке середовище складається з контактуючих однорідних підсистем, між якими відбувається масообмін речовиною. Для кількісного опису процесів дифузійного типу в таких системах застосування класичних методів математичної фізики є неефективним. Тому навіть для найпростіших постановок контактної-крайових задач дифузії необхідно розробляти нові методи дослідження або узагальнювати відомі.

Для побудови точних аналітичних розв'язків контактної-крайових задач дифузії домішкової речовини у двофазних регулярних структурах з ураху-

ванням конвективного механізму масоперенесення в одній з фаз запропоновано та обґрунтовано метод, який базується на використанні інтегральних перетворень за просторовими змінними окремо в контактуючих областях [4]. Оскільки оператори рівнянь у різних фазах різняться між собою, то типи інтегральних перетворень в різних областях також можуть відрізнятися.

У даній роботі досліджуються граничні та часткові випадки стаціонарної конвективної дифузії на основі знайдених розв'язків задачі дифузії домішкової речовини у двофазних регулярних структурах з урахуванням періодичного характеру конвективних явищ.

**Контактно-крайова задача стаціонарної конвективної дифузії в періодичних структурах.** Розглянемо шар товщини  $x_0$ , який складається з періодично розташованих областей двох типів. Поверхні, що обмежують ці області, перпендикулярні до поверхонь шару (рис.1) (вісь  $Ox$  перпендикулярна до поверхонь тіла,  $Oy$  - до поверхонь складових областей). При цьому області з коефіцієнтом дифузії  $D_1$  мають ширину  $2L$ , а з коефіцієнтом  $D_2$  -  $2l$ , крім цього в областях з коефіцієнтом дифузії  $D_1$  масоперенос відбувається не тільки за дифузійним, а й конвективним механізмом з коефіцієнтом конвективного перенесення  $v$ , який приймається відомим і сталим.

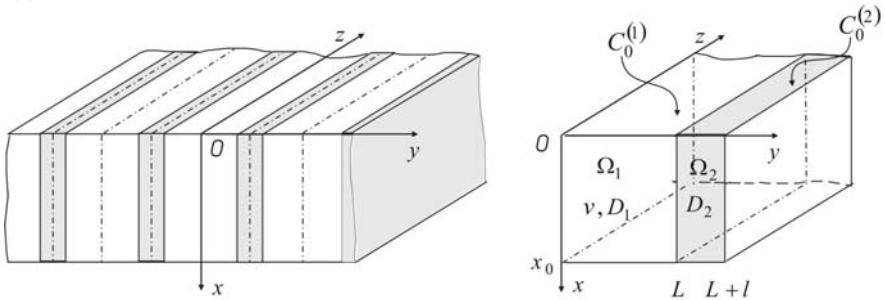


Рис.1. Регулярна структура тіла та виділений елемент такої структури

Така структура має сімейство площин симетрії ( $y = \pm n(L+l)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ), які ділять навпіл сусідні контактуючі області. Тому можемо виділити елемент тіла, на вертикальних границях якого потоки в напрямку осі  $Oy$ , дорівнюють нулю (рис.1).

У стаціонарному випадку концентрація домішкової речовини  $c_1^\infty(x, y)$  в області  $\Omega_1 = ]0; x_0[ \times ]0; L[$  визначається з рівняння

$$D_1 \left[ \frac{\partial^2 c_1^\infty}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_1^\infty}{\partial y^2} \right] - v \frac{\partial c_1^\infty}{\partial x} = 0, \quad x, y \in \Omega_1. \quad (1)$$

В області  $\Omega_2 = ]0; x_0[ \times ]L; L+l[$  концентрація частинок домішки  $c_2^\infty(x, y)$

задовольняє рівняння дифузії

$$D_2 \left[ \frac{\partial^2 c_2^\infty}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_2^\infty}{\partial y^2} \right] = 0, \quad x, y \in \Omega_2. \quad (2)$$

Приймаємо, що на поверхні шару  $x=0$  підтримуються постійні значення концентрацій, а на поверхні  $x=x_0$  концентрації дорівнюють нулю:

$$\begin{aligned} c_1^\infty(x, y) \Big|_{x=0} &= c_0^{(1)} \equiv \text{const}, & c_2^\infty(x, y) \Big|_{x=0} &= c_0^{(2)} \equiv \text{const}, \\ c_1^\infty(x, y) \Big|_{x=x_0} &= c_2^\infty(x, y) \Big|_{x=x_0} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

На бічних поверхнях виділеного елемента  $y=0$ ,  $y=L+l$  нулю дорівнюють горизонтальні складові потоку, тобто

$$\frac{\partial c_1^\infty(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial c_2^\infty(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=L+l} = 0. \quad (4)$$

На границі контакту  $y=L$  задаємо умови неідеального контакту для концентрації  $u$  вигляді

$$\eta_1 c_1^\infty(x, y) \Big|_{y=L} = \eta_2 c_2^\infty(x, y) \Big|_{y=L}, \quad D_1 \frac{\partial c_1^\infty(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=L} = D_2 \frac{\partial c_2^\infty(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=L}, \quad (5)$$

де  $\eta_1$  і  $\eta_2$  ( $\eta_1 \neq \eta_2$ ) - коефіцієнти концентраційної залежності хімічного потенціалу частинок в областях  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$  відповідно.

Розв'язок контактної-крайової задачі масоперенесення (1)-(5) знайдений з допомогою інтегральних перетворень окремо в контактуючих областях [5]. Для того, щоб застосувати перетворення Фур'є необхідно знати величину відповідних функцій або їхніх похідних на границях області перетворення [6]. При  $y=0$  і  $y=L+l$  граничні умови (4) визначають значення функції  $\partial c_1^\infty / \partial y$  на границі області  $\Omega_1$  і  $\partial c_2^\infty / \partial y$  на границі  $\Omega_2$ . На інших границях областей  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$  (поверхні контакту) величини  $\partial c_i^\infty / \partial y$  є невідомими. Доозначимо їх, враховуючи другу контактну умову (5). Вона означає, що на границі контакту  $y=L$  масові потоки рівні між собою і, в свою чергу, дорівнюють деякій функції  $g^\infty(x)$ , тобто

$$D_1 \frac{\partial c_1^\infty}{\partial y} \Big|_{y=L} = D_2 \frac{\partial c_2^\infty}{\partial y} \Big|_{y=L} = g^\infty(x). \quad (6)$$

Звідси маємо

$$\frac{\partial c_1^\infty(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=L} = \frac{1}{D_1} g^\infty(x), \quad \frac{\partial c_2^\infty(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=L} = \frac{1}{D_2} g^\infty(x). \quad (7)$$

Тоді за змінною  $y$  можемо виконати скінченні інтегральні cos-перетворення в областях  $\Omega_i$ . За змінною  $x$  в області  $\Omega_1$  було застосовано таке інтегральне перетворення [7]

$$\bar{c}_1^\infty(n, k) = \int_0^{x_0} \tilde{c}_1^\infty(x, k) e^{-\frac{vx}{2D_1}} \sin(x_n x) dx, \quad \tilde{c}_1^\infty(x, k) = e^{2D_1} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_1^\infty(n, k) \sin(x_n x),$$

де  $x_n = n\pi/x_0$ , а в області  $\Omega_2$  - скінченне інтегральне sin-перетворення Фур'є [6].

В результаті отримуємо розв'язок задачі (1)-(5) в зображеннях у вигляді

$$\bar{c}_1^\infty(n, k) = \frac{1}{v_D^2 + x_n^2 + y_k^2} \left[ D_1 a_k c_0^{(1)} x_n + (-1)^k \bar{g}_n^\infty \right] \quad \text{в області } \Omega_1; \quad (8)$$

$$\bar{c}_2^\infty(m, j) = \frac{1}{D_2(x_m^2 + y_j^2)} \left[ D_2 x_m a_j c_0^{(2)} - \bar{g}_m^\infty \right] \quad \text{в області } \Omega_2. \quad (9)$$

Тут  $x_m = \frac{m\pi}{x_0}$ ,  $y_k = \frac{k\pi}{L}$ ,  $y_j = \frac{j\pi}{l}$ ;  $a_k = \begin{cases} L, & k = 0 \\ 0, & k = 1, 2, \dots \end{cases}$ ;  $a_j = \begin{cases} l, & j = 0 \\ 0, & j = 1, 2, \dots \end{cases}$ ,

$v_D = v/2D_1$ , а також

$$\bar{g}_n^\infty = \int_0^{x_0} g^\infty(x) e^{-v_D x} \sin(x_n x) dx, \quad \bar{g}_m^\infty = \int_0^{x_0} g^\infty(x) \sin(x_m x) dx.$$

У виразах (8), (9) залишились невідомими функції  $\tilde{g}_n^\infty$  і  $\tilde{g}_m^\infty$  відповідно. Знаходимо їх з першої контактної умови (5) стрибка функції концентрації на границі розділу областей  $\Omega_1$  та  $\Omega_2$ . В результаті знаходимо функцію  $\tilde{g}_n^\infty$

$$\tilde{g}_n^\infty = \frac{D_1 D_2 \left( \frac{2\eta_2}{x_0} c_0^{(2)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{x_m} B_{n,m} - \eta_1 \frac{c_0^{(1)} x_n}{\Psi_n^2} \right)}{\eta_1 D_2 R_n + \eta_2 D_1 \frac{4}{x_0^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{cth}(x_m l)}{x_m} B_{n,m} A_{n,m}} \quad (10)$$

і зв'язок між  $\tilde{g}_n^\infty$  і  $\tilde{g}_m^\infty$  у вигляді

$$\tilde{g}_m^\infty = \frac{2}{x_0} \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,m} \tilde{g}_n^\infty, \quad A_{n,m} \equiv \frac{2v_D \pi^2}{x_0^2} \frac{nm [(-1)^{n+m} e^{v_D x_0} - 1]}{\left\{ v_D^2 + \frac{\pi^2}{x_0^2} (n-m)^2 \right\} \left\{ v_D^2 + \frac{\pi^2}{x_0^2} (n+m)^2 \right\}};$$

$$B_{n,m} \equiv -\frac{2v_D \pi^2}{x_0^2} \frac{nm [(-1)^{n+m} e^{-v_D x_0} - 1]}{\left\{ v_D^2 + \frac{\pi^2}{x_0^2} (n-m)^2 \right\} \left\{ v_D^2 + \frac{\pi^2}{x_0^2} (n+m)^2 \right\}}.$$

Тут використано позначення:  $R_n = \frac{1}{\psi_n} \text{cth}(\psi_n L) + \frac{1}{\psi_n^2} \left(1 - \frac{1}{L}\right)$ ,  $\psi_n = \sqrt{v_D^2 + x_n^2}$ .

І після застосування обернених інтегральних перетворень функції концентрації домішкової речовини (8), (9) набудуть вигляду

$$c_1^\infty(x, y) = e^{v_D x} \left\{ c_0^{(1)} \frac{\text{sh}(v_D(x_0 - x))}{\text{sh } v_D x_0} + \frac{2}{x_0 D_1} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(x_n x) \tilde{g}_n^\infty \tilde{R}_n(y) \right\}, \quad (11)$$

$$c_2^\infty(x, y) = c_0^{(2)} \left(1 - \frac{x}{x_0}\right) - \frac{2}{x_0 D_2} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(x_m x) \tilde{g}_m^\infty \frac{\text{ch}[x_m(L+l-y)]}{x_m \text{sh}(x_m l)}, \quad (12)$$

$$\text{де } \tilde{R}_n(y) = \frac{\text{ch}(\psi_n y)}{\psi_n \text{sh}(\psi_n L)} + \frac{1}{\psi_n^2} \left(1 - \frac{1}{L}\right).$$

**Граничні випадки контактної-крайової задачі конвективної дифузії.** Певний інтерес становить отримання та дослідження функції усередненої за змінною  $y$  сумарної концентрації домішкової речовини, яка вводиться наступним чином:

$$\langle c^\infty(x) \rangle = \frac{1}{L+l} \int_0^L c_1^\infty(x, y) dy + \frac{1}{L+l} \int_L^{L+l} c_2^\infty(x, y) dy. \quad (13)$$

Підставляючи вирази (11), (12) для концентрацій  $c_1^\infty$  в області  $\Omega_1$  і  $c_2^\infty$  в області  $\Omega_2$  у співвідношення (13), одержуємо

$$\langle c^\infty(x) \rangle = \frac{1}{L+l} \left\{ e^{v_D x} c_0^{(1)} L \frac{\text{sh}(v_D(x_0 - x))}{\text{sh } v_D x_0} + c_0^{(2)} l \left(1 - \frac{x}{x_0}\right) + \frac{2e^{v_D x}}{x_0 D_1} L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{g}_n^\infty}{\psi_n^2} \sin(x_n x) - \frac{2}{x_0 D_2} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{g}_m^\infty \frac{1}{x_m^2} \sin(x_m x) \right\}. \quad (14)$$

Якщо введемо параметр  $\alpha = l/L$ , то (14) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} \langle c^\infty(x) \rangle &= \frac{1}{1+\alpha} e^{v_D x} c_0^{(1)} \frac{\text{sh}(v_D(x_0 - x))}{\text{sh } v_D x_0} + \frac{\alpha c_0^{(2)}}{1+\alpha} \left(1 - \frac{x}{x_0}\right) + \\ &+ \frac{2e^{v_D x}}{x_0 D_1} \frac{1}{1+\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{g}_n^\alpha}{\psi_n^2} \sin(x_n x) - \frac{2}{x_0 D_2 l} \frac{\alpha}{1+\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{g}_m^\alpha}{x_m^2} \sin(x_m x), \\ \text{де } \tilde{g}_n^\alpha &= \frac{D_1 D_2 \left( \frac{2\eta_2 c_0^{(2)}}{x_0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{x_m} B_{n,m} - \eta_1 \frac{c_0^{(1)} x_n}{\psi_n^2} \right)}{\eta_1 D_2 R_n^\alpha + \eta_2 D_1 \frac{4}{x_0^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{cth}(x_m l)}{x_m} B_{n,m} A_{n,m}}, \quad \tilde{g}_m^\alpha = \frac{2}{x_0} \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,m} \tilde{g}_n^\alpha, \end{aligned}$$

$$\text{тут } R_n^\alpha = \frac{1}{\Psi_n} \operatorname{cth}\left(\Psi_n \frac{l}{\alpha}\right) + \frac{1}{\Psi_n^2} \left(1 - \frac{\alpha}{l}\right).$$

Спрямуємо  $l$  до 0 при  $\alpha \equiv \text{const}$ . Тоді

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow 0} \langle c^\infty(x) \rangle &= \frac{c_0^{(1)}}{1 + \alpha} e^{v_D x} \frac{\operatorname{sh}(v_D(x_0 - x))}{\operatorname{sh} v_D x_0} + \frac{\alpha c_0^{(2)}}{1 + \alpha} \left(1 - \frac{x}{x_0}\right) + \\ &+ \frac{2e^{v_D x}}{x_0 D_1} \frac{1}{1 + \alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Psi_n^2} \sin(x_n x) \lim_{l \rightarrow 0} \tilde{g}_n^\alpha - \frac{2\alpha}{x_0 D_2 (1 + \alpha)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{x_m^2} \sin(x_m x) \lim_{l \rightarrow 0} \tilde{g}_m^\alpha. \end{aligned}$$

Оскільки  $\lim_{l \rightarrow 0} \tilde{g}_n^\alpha = 0$ , то

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow 0} \langle c^\infty(x) \rangle &= \frac{c_0^{(1)}}{1 + \alpha} e^{v_D x} \frac{\operatorname{sh}(v_D(x_0 - x))}{\operatorname{sh} v_D x_0} + \frac{\alpha c_0^{(2)}}{1 + \alpha} \left(1 - \frac{x}{x_0}\right) + \\ &+ \left(\frac{2}{x_0 D_2}\right)^2 \frac{1}{1 + \alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(x_m x)}{x_m^2} \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n^2 A_{n,m} D_1 D_2 \left(\frac{2\eta_2 c_0^{(2)}}{x_0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{x_m} B_{n,m} - \eta_1 \frac{c_0^{(1)} x_n}{\Psi_n^2}\right). \quad (15) \end{aligned}$$

Зазначимо, якщо ввести параметр  $\bar{\alpha} = L/l$  і спрямувати  $L$  до 0 при  $\bar{\alpha} \equiv \text{const}$ , то ми отримаємо ту саму формулу (15).

**Граничний перехід від контактної-крайової задачі конвективної дифузії в регулярних структурах до континуальної моделі конвективної гетеродифузії.** Розглянемо тепер зв'язок задачі конвективної дифузії в періодичних структурах за неідеального масового контакту із задачею конвективної гетеродифузії.

Знайдемо умови, за яких існує перехід від задачі конвективної дифузії в тілі з регулярною структурою до системи рівнянь масоперенесення домішки з урахуванням конвективної складової на одному з них, що супроводжується взаємопереходами частинок з одного шляху міграції на інший (конвективна гетеродифузія двома шляхами).

Якщо ми усереднимо функції концентрації  $c_1^\infty(x, y)$  і  $c_2^\infty(x, y)$  по всій ширині виділеного елемента  $[0; L + l]$ :

$$\tilde{c}_i^\infty(x) = \frac{1}{L + l} \int_0^{L+l} c_i^\infty(x, y) dy, \quad i = 1, 2, \quad (16)$$

то такі усереднені функції повинні задовольняти рівняння

$$\begin{aligned} D_1 \frac{\partial^2 \tilde{c}_1^\infty}{\partial x^2} - v \frac{\partial \tilde{c}_1^\infty}{\partial x} + \frac{D_1}{L + l} \frac{\partial^2 c_1^\infty}{\partial y^2} \Big|_{y=L} &= 0, \\ D_2 \frac{\partial^2 \tilde{c}_1^\infty}{\partial x^2} + \frac{D_2}{L + l} \frac{\partial^2 c_2^\infty}{\partial y^2} \Big|_{y=L} &= 0. \end{aligned}$$

Якщо масові потоки на границі контакту можна подати через хімічні потенціали так:

$$D_1 \frac{\partial c_1^\infty}{\partial y} \Big|_{y=L} = \theta_2 \Delta \mu_2^\infty - \theta_1 \Delta \mu_1^\infty \Big|_{y=L},$$

$$D_2 \frac{\partial c_2^\infty}{\partial y} \Big|_{y=L} = \theta_1 \Delta \mu_1^\infty - \theta_2 \Delta \mu_2^\infty \Big|_{y=L},$$

де  $\theta_1, \theta_2$  ( $\theta_1 \neq \theta_2$ ) - коефіцієнти зв'язку потоків і хімічних потенціалів;  $\mu_i^\infty$  - хімічний потенціал домішкової речовини в області  $\Omega_i$ ,  $\Delta \mu_i^\infty(x, y) = \mu_i^\infty(x, y) - \mu^0$ , то усереднені функції (16) задовольняють рівняння

$$D_1 \frac{\partial^2 \widehat{c}_1^\infty}{\partial x^2} - v \frac{\partial \widehat{c}_1^\infty}{\partial x} + \frac{1}{L+l} (\theta_2 \Delta \mu_2^\infty - \theta_1 \Delta \mu_1^\infty) \Big|_{y=L} = 0,$$

$$D_2 \frac{\partial^2 \widehat{c}_2^\infty}{\partial x^2} - \frac{1}{L+l} (\theta_2 \Delta \mu_2^\infty - \theta_1 \Delta \mu_1^\infty) \Big|_{y=L} = 0. \quad (17)$$

Оскільки  $\Delta \mu_i \Big|_{y=L} = \eta_i c_i^\infty \Big|_{y=L}$ , систему рівнянь (17) можна записати у вигляді

$$D_1 \frac{\partial^2 \widehat{c}_1^\infty}{\partial x^2} - v \frac{\partial \widehat{c}_1^\infty}{\partial x} + \frac{1}{L+l} (\eta_2 \theta_2 c_2^\infty - \eta_1 \theta_1 c_1^\infty) \Big|_{y=L} = 0,$$

$$D_2 \frac{\partial^2 \widehat{c}_2^\infty}{\partial x^2} - \frac{1}{L+l} (\eta_2 \theta_2 c_2^\infty - \eta_1 \theta_1 c_1^\infty) \Big|_{y=L} = 0.$$

При виконанні умови  $\frac{1}{L+l} c_i(x, L) \approx \widehat{c}_i(x)$  одержуємо взаємозв'язану систему диференціальних рівнянь гетеродифузії домішки двома шляхами [8, 9]:

$$D_1 \frac{\partial^2 \widehat{c}_1^\infty}{\partial x^2} - v \frac{\partial \widehat{c}_1^\infty}{\partial x} - k_1 \widehat{c}_1^\infty + k_2 \widehat{c}_2^\infty = 0,$$

$$D_2 \frac{\partial^2 \widehat{c}_2^\infty}{\partial x^2} + k_1 \widehat{c}_1^\infty - k_2 \widehat{c}_2^\infty = 0. \quad (18)$$

Тут  $k_i = \theta_i \eta_i$  ( $i = 1, 2$ ) - коефіцієнти інтенсивності переходу частинок домішки між різними шляхами дифузії. Зазначимо, що коефіцієнти  $k_i$  мають розмірність  $[c^{-1}]$ .

Таким чином, при виконанні умови рівності потоків домішкової речовини на границі контакту областей лінійним комбінаціям хімічних потенціалів на цій поверхні шляхом усереднення по ширині тіла безпосередньо отримаємо систему рівнянь конвективною гетеродифузії двома шляхами з урахуванням взаємопереходів частинок з одного шляху міграції на інший.

Застосовуючи до розв'язків контактної-крайової задачі (11), (12) аналогічний граничний перехід, одержимо аналітичний розв'язок крайової задачі стаціонарної конвективної гетеродифузії у вигляді

$$\begin{aligned} \langle c^\infty(x) \rangle &= e^{v_D x} \left\{ c_0^{(1)} \frac{\text{sh}(v_D(x_0 - x))}{\text{sh } v_D x_0} + \frac{2}{x_0 D_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x_n x)}{\Psi_n^2} \tilde{g}_n^\infty \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[ 1 - \frac{1}{L} + \frac{1}{L+l} \frac{\text{sh}(\psi_n(L+l))}{\text{sh}(\psi_n L)} \right] \right\}; \\ \tilde{c}_2^\infty(x) &= c_0^{(2)} \left( 1 - \frac{x}{x_0} \right) - \frac{2}{x_0 D_2(L+l)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{g}_m^\infty}{x_m^2} \sin(x_m x) \frac{\text{sh}(x_m(L+l))}{\text{sh}(x_m l)}, \end{aligned}$$

причому в  $\tilde{g}_n^\infty$ ,  $\tilde{g}_m^\infty$  коефіцієнти  $\eta_i$  змінюються на  $k_i/\theta_i$  для  $i = 1, 2$ .

Тепер можемо ввести природну безрозмірну форму для такої задачі [8]:

$$\xi = (k_2/D_1)^{1/2} x, \quad \zeta = (k_2/D_1)^{1/2} y. \quad (19)$$

Тоді контактної-крайової задачі (1)-(5) можна подати у безрозмірній формі:

$$\frac{\partial^2 c_1^\infty}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 c_1^\infty}{\partial \zeta^2} - \hat{v} \frac{\partial c_1^\infty}{\partial \xi} = 0, \quad \xi, \zeta \in \omega_1 = [0; \xi_0] \times [0; \Lambda],$$

$$d \left[ \frac{\partial^2 c_2^\infty}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 c_2^\infty}{\partial \zeta^2} \right] = 0, \quad \xi, \zeta \in \omega_2 = [0; \xi_0] \times [\Lambda; \Lambda + \lambda],$$

$$c_1^\infty(\xi, \zeta) \Big|_{\xi=0} \equiv \text{const}, \quad c_2^\infty(\xi, \zeta) \Big|_{\xi=\xi_0} \equiv \text{const}, \quad c_1^\infty(\xi, \zeta) \Big|_{\xi=\xi_0} = c_2^\infty(\xi, \zeta) \Big|_{\xi=\xi_0} = 0,$$

$$\frac{\partial c_1^\infty(\xi, \zeta)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = \frac{\partial c_2^\infty(\xi, \zeta)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=\Lambda+\lambda} = 0,$$

$$\eta_1 c_1^\infty(\xi, \zeta) \Big|_{\zeta=\Lambda} = \eta_2 c_2^\infty(\xi, \zeta) \Big|_{\zeta=\Lambda}, \quad \frac{\partial c_1^\infty(\xi, \zeta)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=\Lambda} = d \frac{\partial c_2^\infty(\xi, \zeta)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=\Lambda}.$$

Тут  $d = D_2/D_1$ ,  $\hat{v} = (k_2 D_1)^{-1/2} v$ ,  $\xi_0 = (k_2/D_1)^{1/2} x_0$ ,  $\Lambda = (k_2/D_1)^{1/2} L$ ,  $\lambda = (k_2/D_1)^{1/2} l$ .

**Числовий аналіз усередненої за шириною виділеного елемента концентрації домішок.** Дослідимо тепер вплив характеристик середовища на поведінку та значення концентрації частинок, усередненої по ширині виділеного елемента тіла. Числові розрахунки функції  $\langle c^\infty(\xi) \rangle$  проведені за формулою (14) у безрозмірних змінних (19) і подані на рисунках 2-4.

Рис.2 ілюструє розподіли  $\langle c^\infty(\xi) \rangle$  для великих (рис.а) і малих (рис.б) значень коефіцієнта швидкості конвективного перенесення  $\hat{v}$ . Криві 1-5



відповідають значенням  $\hat{v} = 1; 2; 3; 4; 5$  на рис.а і  $\hat{v} = 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5$  на рис.б. На рис.3 зображено розподіли функції усередненої концентрації залежно від різних значень коефіцієнта  $d$  (рис.а) та відношення потужностей джерел маси (рис.б). На рис.3а суцільні криві 1-5 відповідають значенням  $d = 0.01; 0.1; 0.3; 0.5; 1$  при  $\hat{v} = 3$ , а штрихові лінії - при  $\hat{v} = 0.3$ , а на рис.3б суцільні криві 1-4 відповідають значенням  $c_0^{(1)}/c_0^{(2)} = 0.1; 0.2; 0.3; 0.4$  при  $\hat{v} = 3$ , а штрихові - при  $\hat{v} = 0.3$ . Рис.4 ілюструє залежність функції усередненої концентрації від різних значень відношення коефіцієнтів концентраційної залежності хімічних потенціалів  $\eta_1/\eta_2$ . Тут криві 1-4 відповідають значенням  $\eta_1/\eta_2 = 0.001; 0.01; 0.1; 0.2; 0.3$  для  $\hat{v} = 3$  - суцільні лінії, і  $\hat{v} = 0.3$  - штрихові лінії.

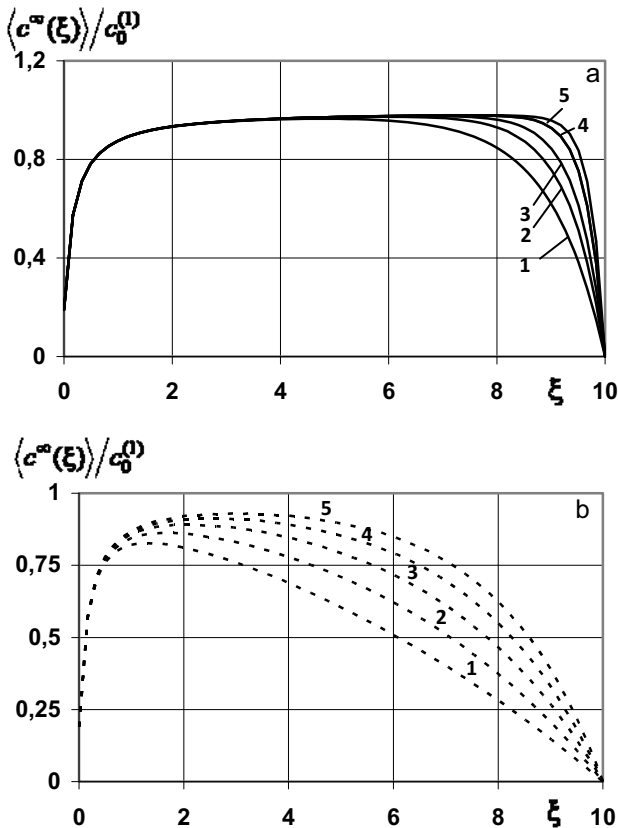


Рис.2. Залежність функції усередненої концентрації для великих (рис.а) і малих (рис.б) значень швидкості конвективного перенесення

Для розподілів усередненої по ширині виділеного елемента тіла концентрації характерне різке її приповерхнєве зростання (біля поверхні, де діє джерело маси). Для великих значень швидкості конвективного перенесення спостерігається подальше монотонне зростання функції  $\langle c^\infty(\xi) \rangle$  (рис.2а) і різке падіння до нуля біля границі тіла  $\xi = \xi_0$ . Причому чим більшим є величина  $\hat{v}$ , тим довшим є проміжок зростання усередненої концентрації і тим більшого максимуму вона досягає (крива 5 на рис.2а). Для малих значень швидкості конвективного перенесення можлива поява явно вираженого при поверхнєвого (біля джерела маси) максимуму функції  $\langle c^\infty(\xi) \rangle$  (крива 1 на рис.2б).

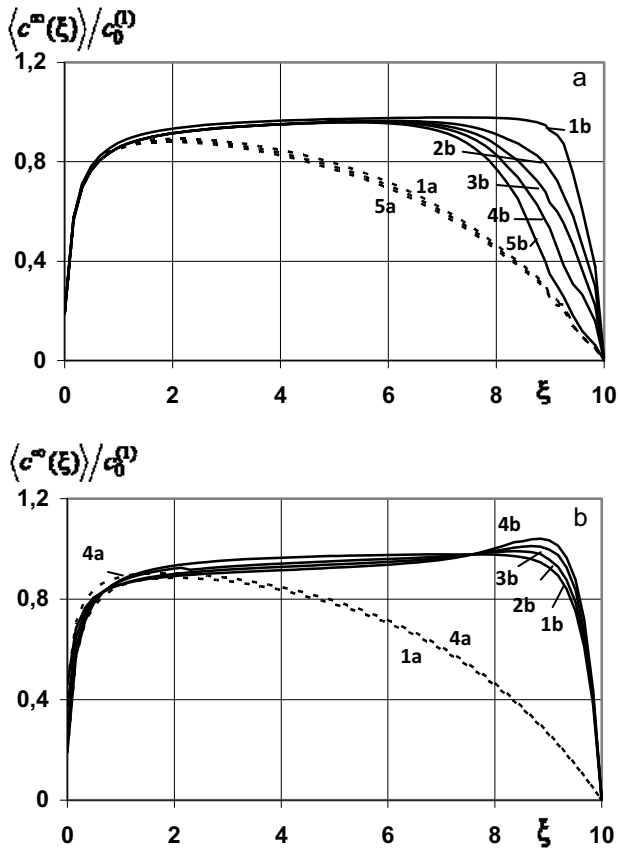


Рис.3. Залежність функції усередненої концентрації від різних значень відношення  $d$  (рис.а) та відношення потужностей джерел маси (рис.б)

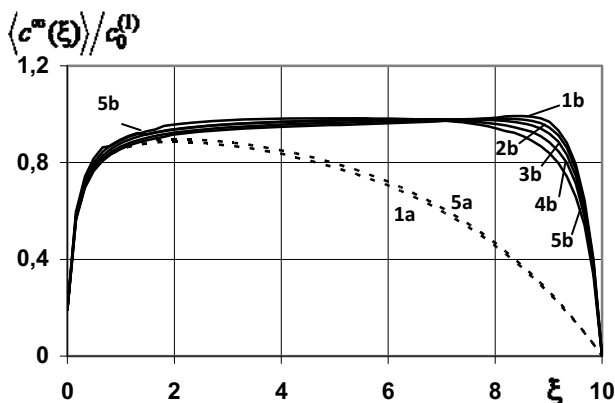


Рис.4. Залежність функції усередненої концентрації від різних значень відношення  $\eta_1/\eta_2$

При зростанні відношення коефіцієнтів дифузії  $d$  відбувається зменшення  $\langle c^\infty(\xi) \rangle$  на всьому проміжку (рис.3а). Проте, якщо для малих  $\hat{v}$  таке зменшення є незначним, то для великих швидкостей конвективного перенесення на проміжку  $\xi \in [6;10]$  суттєво підвищується вплив коефіцієнта  $d$  на функцію  $\langle c^\infty(\xi) \rangle$ .

Для великих значень  $\hat{v}$  збільшення значення відношення потужностей джерел маси  $c_0^{(2)}/c_0^{(1)}$  до збільшення  $\langle c^\infty(\xi) \rangle$  на ділянці різкого при поверхневого зростання, її зменшення на інтервалі пологого зростання і збільшення в області біля поверхні шару  $\xi = \xi_0$  (рис.3б).

Зазначимо також, що вплив величини відношення концентраційної залежності хімічних потенціалів  $\eta_1/\eta_2$  на  $\langle c^\infty(\xi) \rangle$  є відчутним тільки у приповерхневій області біля нижньої границі тіла (рис.4). Причому чим меншим є значення  $\eta_1/\eta_2$ , тим більші значення приймає усереднена по ширині виділеного елемента концентрація домішкової речовини.

1. Fisher J.S. Calculation of diffusion penetration curves for surface and grain boundary diffusion // J.Appl.Phys. – 1951. – Vol. 22. – P. 74-77.
2. Ху С. Диффузия в кремнии и германии / В кн.: Атомная диффузия в полупроводниках. – Под ред. Шоу Д. – М.: Мир, 1975. – С. 248-405.
3. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К.: Наук. думка, 1991. – С. 432.
4. Чапля Е.Я., Чернуха О.Ю. Математичне моделювання дифузійних процесів у

випадкових і регулярних структурах. - К.: Наук. думка, 2009. –С. 302.

5. Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю., Дмитрук В.А. Математичне моделювання стаціонарних процесів дифузії у двофазних тілах регулярної структури з урахуванням конвективного переносу в одній з фаз // *Машинознавство*. – 2010. – № 5. – С. 10-15.

6. Снеддон И. Преобразования Фурье. – М.: Изд-во иностр. литературы, 1955. – 667 с.

7. Мартыненко Н.А., Пустыльников Л.М. Конечные интегральные преобразования и их применение к исследованию систем с распространенными параметрами. – М.: Наука, 1986. – 304 с.

8. Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю. Фізико-математичне моделювання гетеродифузного масопереносу. — Львів: СПОЛОМ, 2003. — 128 с.

9. Aifantis E.C. Continuum basis for diffusion in regions with multiple diffusivity // *Journal of Applied Physics*. – 1979. – **50**, № 3. – P. 1334-1338.

*Поступила 13.09.2010р.*

УДК 534.629

М.В.Лобур, д.т.н., професор, зав. каф. САП, НУ “Львівська політехніка”,  
М.Р.Мельник, аспірант НУ “Львівська політехніка”.

## **МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАЛЕЖНОСТІ РІВНЯ ШУМУ ТРАНСПОРТНОГО ПОТОКУ ВІД ТИПУ ДОРОЖНЬОГО ПОКРИТТЯ**

На основі експериментальних даних рівня звукового тиску виміряного для різних типів дорожнього покриття і регресійного аналізу побудовано математичну модель, яка дає змогу визначити величину поправки для дороги з типом покриття бруківка і чорне шосе в залежності від стану дорожнього покриття, швидкості і віддалі від джерела шуму. Дана математична модель дає змогу підвищити точність методів прогнозування дорожнього шуму, коли точка розрахунку знаходиться на невеликій віддалі від дороги.

Based on experimental data of sound pressure level measured for different types of pavement and regression analysis the mathematical model is proposed that helps determine the value of the amendments to cobbles and metalling type of road depending on the condition of pavement, speed and distance from the noise source. The mathematical model allows to improve accuracy of forecasting methods of road noise when the point of calculation is within a reasonable distance from the road.

### **Вступ**

При прогнозуванні дорожнього шуму деякі методи дають можливість порахувати поправку, яка враховує поверхню дороги, а саме RLS-90, CoRTN, UTVPR, Valdivia. У більшості методів опорний пункт, для якого розраховується базовий рівень шуму знаходиться на віддалі від 10 до 25 м, як показано на Рис. 1. У центральній частині м. Львова, як і в інших