УДК 681.513.675

А.Ф. Верлань, С.А. Положаенко

ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ ВАРИАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ НАПРАВЛЕННЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Для класса физических процессов с явно выраженным направленным действием, например, фильтрационное движение жидкости в грунтах с неоднородными включениями, распространение волн различной природы в неоднородных средах, деформация элементов механических систем переменной структуры и т.д., адекватными математическими моделями (ММ) являются вариационные неравенства [1, 2]. В работе [3] получена и обоснована обобщенная ММ для данного класса процессов, которая в терминах теории вариационных неравенств может быть представлена в следующем виде.

На ограниченном открытом множестве Ω пространства $\Re^n, n = 1,2$, с гладкой границей Γ и интервале времени $(0, t_k)$ для $t_k < \infty, Q = \Omega \times (0, t_k), \Sigma = \Gamma \times (0, t_k)$ определено вариационное неравенство

$$\psi \in K : \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, v - \psi \right) + \big(B\,\psi, v - \psi \big) + j(v) - j(\psi) \geq$$

$$\big(f, v - \psi \big)\ \forall v \in H^1(\Omega) \tag{1}$$

с начальным условием

$$\psi(0, \bar{z}) = \psi_0(\bar{z}), \tag{2}$$

где $\psi(t, \bar{z})$ — искомая функция, представляющая собой физическую величину, определяющую пространство состояния исследуемого процесса;

$v(t, \bar{z})$ — пробная функция;

f — вынуждающая функция процесса;

B — оператор, задающий линейное преобразование $B : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$, который определен билинейной формой

$$\big(B, v - \psi \big) = \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial (v - \psi)}{\partial z_i} \right) d\bar{z},$$

$j(\cdot)$ — выпуклые функционалы, задающие вид физического процесса;

K — множество, на котором определена функция $\psi(t, \bar{z})$;

$H^1(\Omega)$ — соболевское пространство функций, имеющих первую производную.

Функционалы $j(\cdot)$ могут быть определены либо на границе Γ

пространственной области Ω либо внутри ее, причем их подынтегральные выражения представляют собой мультипликативную функцию, а именно

$$j(\psi) = \int\limits_{\Gamma} \varphi(\psi, \bar{z}) \cdot \lambda(\psi) d\Gamma , \quad j(v) = \int\limits_{\Gamma} \varphi(v, \bar{z}) \cdot \lambda(v) d\Gamma , \qquad (3)$$

$$j(\psi) = \int\limits_{\Omega} \varphi(\psi, \bar{z}) \cdot \lambda(\psi) d\Omega , \quad j(v) = \int\limits_{\Omega} \varphi(v, \bar{z}) \cdot \lambda(v) d\Omega , \qquad (4)$$

где $\varphi(\cdot)$ — непрерывная дифференцируемая функция;

$\lambda(\cdot)$ — непрерывная дифференцируемая (или не обладающая свойством дифференцируемости) функция от искомой переменной.

Предлагаемый подход основан на процедуре оптимизации и сводится к доказательству следующего утверждения.

Утверждение. Для отыскания оптимального решения $\psi(t, \bar{z})$ вариационного неравенства (1), (2) необходимо существование такой ненулевой непрерывной функции $p(t, \bar{z})$, чтобы в любой момент времени t в интервале $0 \le t \le T$ (T — время протекания физического процесса) функция Гамильтона $\widetilde{H}$ в пространственной области Ω (или на ее границе Γ) принимала бы максимальное значение, где

$$\widetilde{H} = \rangle\left(\left(B\widetilde{\psi}, \widetilde{v} - \widetilde{\psi}\right) + \phi(\widetilde{v}) - \phi(\widetilde{\psi}) - \left(\theta\left(\widetilde{\psi}, \widetilde{v}\right), \widetilde{v} - \widetilde{\psi}\right) - \left(f, \left(\widetilde{v} - \widetilde{\psi}\right)\right)\right), \widetilde{p}\langle \ .$$

Смысл переменных, входящих в функцию Гамильтона , будет раскрыт ниже.

Покажем справедливость сформулированного утверждения.

Предварительно выполним ряд преобразований, позволяющих упростить исходную постановку задачи. Для подынтегральных выражений в (3), (4) введем обозначения

$$\varphi\left(\psi, \bar{z}\right) \cdot \lambda\left(\psi\right) = \Phi(\psi) , \quad \varphi\left(\psi, \bar{z}\right) \cdot \lambda\left(\psi\right) = \Phi(\psi) , \qquad (5)$$

$$\varphi\left(v, \bar{z}\right) \cdot \lambda\left(v\right) = \Phi(v) , \quad \varphi\left(v, \bar{z}\right) \cdot \lambda\left(v\right) = \Phi(v) , \qquad (6)$$

в результате чего (3), (4) примут вид

$$j(\psi) = \int\limits_{\Gamma} \Phi(\psi) d\Gamma , \qquad j(v) = \int\limits_{\Gamma} \Phi(v) d\Gamma , \qquad (7)$$

$$j(\psi) = \int\limits_{\Omega} \Phi(\psi) d\Gamma . \qquad j(v) = \int\limits_{\Omega} \Phi(v) d\Gamma . \qquad (8)$$

С учетом (5) — (8) перепишем (1), (2) (далее, для простоты изложения, будем рассматривать задачу, сформулированную на границе Γ)

$$\psi \in K : \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, v - \psi\right) + \left(B, v - \psi\right) + \int\limits_{\Gamma} \Phi(v) d\Gamma - \int\limits_{\Gamma} \Phi(\psi) d\Gamma \ge$$

$$\left(f, v - \psi\right) \forall v \in K , \qquad (9)$$

$$\psi(0, \bar{z}) = \psi_0(\bar{z}) . \qquad (10)$$

Приведем (9), (10), согласно [4], к формулировке задачи с ограничениями в виде равенств и элементарных неравенств. С этой целью введем в рассмотрение дополнительную неизвестную функцию $\theta(\psi, v)$, которая по структуре отвечает функционалам $j(\cdot)$ (соотношения (3) или (4)).

Примем условие

$$\left(\theta(\psi, v), v-\psi\right) \geq 0 \forall v \in K . \tag{11}$$

С учетом выполненных преобразований соотношения (9), (10) представим в виде равенств

$$\psi \in K : \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, v-\psi\right)+\left(B, v-\psi\right)+\int_{\Gamma} \Phi(v) d\Gamma-\int_{\Gamma} \Phi(\psi) d\Gamma-$$

$$\left(\theta(\psi, v), v-\psi\right)=\left(f, v-\psi\right) \forall v \in K , \tag{12}$$

$$\psi(0, \bar{z})=\psi_{0}(\bar{z}) . \tag{13}$$

В ходе последующего решения оптимизационной задачи выражения (11), (12) образуют систему ограничений. Наличие в (12) интегралов усложняет решение оптимизационной задачи. Поэтому преобразуем (12) следующим образом. Введем вспомогательные функции $\phi(v), \phi(\psi)$ в соответствии с выражениями

$$\phi'_{\bar{z} \in \Gamma}(\psi)=\Phi(\psi) , \quad \phi'_{\bar{z} \in \Gamma}(v)=\Phi(v) ,$$

откуда

$$\phi(\psi)=\int_{\Gamma} \Phi(\psi) d\Gamma , \quad \phi(v)=\int_{\Gamma} \Phi(v) d\Gamma .$$

Тогда (12) можно записать в виде

$$\psi \in K : \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, v-\psi\right)+\left(B, v-\psi\right)+\phi(v)-\phi(\psi)-\left(\theta(\psi, v), v-\psi\right)=\left(f, v-\psi\right) \forall v \in K . \tag{14}$$

Для решения поставленной задачи как оптимизационной, введем критерий качества

$$J=\min \int_{\Gamma} \int_{0}^{T}\left|v-\psi\right|^{2} dt d\Gamma . \tag{15}$$

Физический смысл приведенного критерия вытекает из следующего. Пробная функция $v(t, \bar{z})$ является некоторым приближением искомой функции $\psi(t, \bar{z})$, отражая лишь суть физики конкретного процесса. Поэтому адекватность протекания физических процессов, обусловленных действием функций $v(t, \bar{z})$ и $\psi(t, \bar{z})$, обеспечивается с точностью до разницы между указанными функциями. При этом саму разницу между пробной $v(t, \bar{z})$ и искомой $\psi(t, \bar{z})$ функциями можно рассматривать как штраф за несоответствие физике протекания процесса. Для количественного учета несоответствия пространственно-временных характеристик функций $v(t,\bar{z})$ и $\psi(t,\bar{z})$ целесообразно использовать интегральную оценку, как по пространственным, так и по временной координатам, что и отражает критерий (15).

Получим необходимые условия оптимальности задачи (14), (13), (15).

Согласно [5] введем новую координату σ согласно выражению

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial t\partial z} = \left|v-\psi\right|^2\Big|_{z\in\Gamma}\,, \tag{16}$$

а исходная задача будет рассматриваться в $(n+1)$- мерном пространстве с уравнением динамики

$$\tilde{\psi}\in K:$$

$$\left(\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial t},\tilde{v}-\tilde{\psi}\right)+\left(B,\tilde{v}-\tilde{\psi}\right)+\phi(\tilde{v})-\phi(\tilde{\psi})-$$
$$-\left(\theta\left(\tilde{\psi},\tilde{v}\right),\tilde{v}-\tilde{\psi}\right)=\left(f,\tilde{v}-\tilde{\psi}\right)\ \forall\tilde{v}\in K\,, \tag{17}$$

где $\tilde{\psi}$, $\tilde{v}$ — расширенные векторы переменных, определяемые выражениями

$$\tilde{\psi}=\left(\sigma,\psi_1,...,\psi_n\right),\quad \tilde{v}=\left(\sigma,v_1,...,v_n\right)$$

при начальных условиях

$$\tilde{\psi}(0,\bar{z})=\left[0,\psi_0(\bar{z})\right].$$

Предположим, что найдено $\psi(t,\bar{z})$. Этому условию соответствует соотношение

$$\min\int_\Gamma\int_0^T\left|\tilde{v}-\tilde{\psi}\right|^2dtd\Gamma\to J_{\min}=J^*.$$

В момент времени $t=\tau(0\le\tau\le T)$ выполним игольчатую вариацию длительностью ε. В результате выполненной вариации изменится значение функционала J (15)

$$\hat{J}=\int_\Gamma\int_0^T\left|\tilde{v}-\tilde{\psi}\right|^2dtd\Gamma>J_{\min}.$$

Запишем результат вариации

$$\delta\tilde{v}=\tilde{v}-\tilde{\psi}=\varepsilon\left\{\left[\left(B\tilde{\psi},\tilde{v}-\tilde{\psi}\right)+\phi(\tilde{v})-\phi(\tilde{\psi})-\left(\theta(\tilde{\psi},\tilde{v}),\tilde{v}-\tilde{\psi}\right)-\left(f,\left(\tilde{v}-\tilde{\psi}\right)\right)\right]-\right.$$
$$\left.-\left(B\,\tilde{\psi},\tilde{\psi}\right)+\phi(\tilde{\psi})-\left(\theta(\tilde{\psi}),\tilde{\psi}\right)-\left(f,\tilde{\psi}\right)\right\}_{t=\tau}. \tag{18}$$

Выразим $\tilde{v}$ через вариацию и оптимальную функцию состояния

$$\tilde{v}=\tilde{\psi}+\delta\tilde{v}\,. \tag{19}$$

Подставляя (19) в (17) получим

$$\tilde{\psi}\in K:$$

$$\left(\frac{\partial\tilde\psi}{\partial t},(\tilde\psi+\delta\tilde v)-\tilde\psi\right)=\left(B\tilde\psi,(\tilde\psi+\delta\tilde v)-\tilde\psi\right)+\phi(\tilde\psi+\delta\tilde v)-\phi(\tilde\psi)-$$
$$-\left(\theta(\tilde\psi,(\tilde\psi+\delta\tilde v)),(\tilde\psi+\delta\tilde v)-\tilde\psi\right)-\left(f,(\tilde\psi+\delta\tilde v)-\tilde\psi\right)\ \forall\tilde v\in K\,, \qquad (20)$$

Для дальнейших преобразований используем покоординатный аналог (20)

$\tilde\psi_i\in K$:

$$\left(\frac{\partial\tilde\psi_i}{\partial t},(\tilde\psi_i+\delta\tilde v_i)-\tilde\psi_i\right)=\left(B\tilde\psi_i,(\tilde\psi_i+\delta\tilde v_i)-\tilde\psi_i\right)+\phi(\tilde\psi_i+\delta\tilde v_i)-\phi(\tilde\psi_i)-$$
$$-\left(\theta(\tilde\psi_i,(\tilde\psi_i+\delta\tilde v_i)),(\tilde\psi_i+\delta\tilde v_i)-\tilde\psi_i\right)-\left(f,(\tilde\psi_i+\delta\tilde v_i)-\tilde\psi_i\right)\forall\tilde v_i\in K\,,$$
$$i=0,1,\dots,n \qquad (21)$$

Разложим (21) в ряд Тейлора и ограничим рассмотрение величинами 1-го порядка малости

$$\left(\frac{\partial\tilde\psi_i}{\partial t}+\frac{\partial\tilde v_i}{\partial t}\right)=\left(B\tilde\psi_i,\tilde\psi_i\right)+\phi(\tilde\psi_i)-\left(f,\tilde\psi_i\right)+$$
$$+\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial\left[\left(B\tilde\psi_i,\tilde\psi_i\right)_i+\phi(\tilde\psi_i)-\left(f,\tilde\psi_i\right)\right]}{\partial\tilde v_i}\delta\tilde v_i\,,\quad i=0,1,\dots,n\,. \qquad (22)$$

Из (22) следует, что

$$\frac{\partial\tilde v_i}{\partial t}=\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial\left[\left(B\tilde\psi_i,\tilde\psi_i\right)+\phi(\tilde\psi_i)-\left(f,\tilde\psi_i\right)\right]}{\partial\tilde v_i}\delta\tilde v_i\,,\quad i=0,1,\dots,n\,. \qquad (23)$$

Обратимся теперь к моменту времени $t=T$. Определим вариацию функционала в момент времени $t=T$

$$\delta J_{t=T}=\hat J-J_{\min}>0 \quad \text{или} \quad -\delta J_{t=T}=-\delta\sigma_{ Њ=Ѓ}\le 0$$

Введем переменную $\tilde p(t,\bar z)$ таким образом, чтобы при $t=T$ выполнялось условие

$$-\delta J_{t=T}=-\delta\sigma(T)=\rangle\delta\tilde v,\tilde p\langle_{t=T}\,. \qquad (24)$$

Покоординатный аналог (24) выглядит следующим образом

$$-\delta J_{t=T}=-\delta\sigma(T)=\rangle\delta\tilde v_i,\tilde p_i\langle_{t=T},i=0,1,\dots,n\,.$$

Так как $\delta\sigma(T)>0$, то для того, чтобы выполнялось последнее соотношение, должно иметь место: $p^0(T,\bar z_i)=-1;p_j(T,\bar z)=0,$ где $i=0,1,\dots,n;j=1,\dots,n$. Таким образом, если оптимальное решение не найдено, то $-\delta J<0$, а для оптимального решения справедливо $-\delta J=0$, поскольку для оптимального решения вариация функционала должна быть равна нулю.

Свяжем переменную $\tilde p(t,\bar z)$ с уравнением динамики исследуемого процесса через пробную функцию $v(t,\bar z)$. Найдем такую переменную $\tilde p(t,\bar z)$, которая удовлетворяет условию

$$\rangle\delta\tilde{v}(t,\bar{z}),\tilde{p}(t,\bar{z})\langle = \rangle\delta\tilde{v}(T,\bar{z}),\tilde{p}(T,\bar{z})\langle_{\tau+\varepsilon\le t\le T} = const\,.$$

Тогда справедливо

$$\frac{\partial}{\partial t}\rangle\delta\tilde{v}(t,\bar{z}),\tilde{p}(t,\bar{z})\langle = \left\rangle\frac{\partial\delta\tilde{v}(t,\bar{z})}{\partial t},\tilde{p}(t,\bar{z})\right\langle + \left\rangle\frac{\partial v\tilde{p}(t,\bar{z})}{\partial t},\delta\tilde{v}(t,\bar{z})\right\langle_{\tau+\varepsilon\le t\le T} = 0\,. \quad (25)$$

Покоординатный аналог (25) имеет вид

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial\delta\tilde{v}_i(t,\bar{z})}{\partial t},\tilde{p}_i(t,\bar{z}) + \sum_{i=0}^{n}\delta\tilde{v}_i(t,\bar{z})\frac{\partial\tilde{p}_i\tilde{v}_i(t,\bar{z})}{\partial t} = 0\,,\quad i=0,1,\ldots,n\,. \qquad (26)$$

Подставим в (26) значение производной $\dfrac{\partial\delta\tilde{v}(t,\bar{z})}{\partial t}$ из (23)

$$\sum_{i=0}^{n}\tilde{p}_i\cdot\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial\left[\left(B\tilde{\psi}_i,\tilde{\psi}_i\right)+\phi(\tilde{\psi}_i)-\left(f,\tilde{\psi}_i\right)\right]}{\partial\tilde{v}_i}\delta\tilde{v}_i + \sum_{i=0}^{n}\delta\tilde{v}_i\frac{\partial\tilde{p}}{\partial t} = 0\,,\ i=0,1,\ldots,n\,. \quad (27)$$

Изменим порядок суммирования в (27)

$$\sum_{i=0}^{n}\delta\tilde{v}_i + \left[\sum_{i=0}^{n}\tilde{p}_i\frac{\partial\left[\left(B\tilde{\psi}_i,\tilde{\psi}_i\right)+\phi(\tilde{\psi}_i)-\left(f,\tilde{\psi}_i\right)\right]}{\partial\tilde{v}_i} + \frac{\partial\tilde{p}_i}{\partial t}\right] = 0\,,\quad i=0,1,\ldots,n\,.$$

Тогда окончательно получим

$$\frac{\partial\tilde{p}_i}{\partial t} = -\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial\left[\left(B\tilde{\psi}_i,\tilde{\psi}_i\right)+\phi(\tilde{\psi}_i)-\left(f,\tilde{\psi}_i\right)\right]}{\partial\tilde{v}_i}\tilde{p}_i\,,\quad i=0,1,\ldots,n\,.$$

Заметим, что последнее уравнение является сопряженным к (14), а переменная $\tilde{p}(t,\bar{z})$ выражена через функцию состояния.

Вновь обратимся к вариации функционала (15) в момент времени $t=T$

$$-\delta J_{t=T} = \rangle\delta\tilde{v}(t,\bar{z}),\tilde{p}(t,\bar{z})\langle_{t=T} = 0\,.$$

Заменим вариацию $\delta\tilde{v}$ значением (18), сократим на ε и, поскольку τ может быть любым, получим

$$\rangle\left(\left(B\tilde{\psi},\tilde{v}-\tilde{\psi}\right)+\phi(\tilde{v})-\phi(\tilde{\psi})-\left(\theta(\tilde{\psi},\tilde{v}),\tilde{v}-\tilde{\psi}\right)-\left(f,\left(\tilde{v}-\tilde{\psi}\right)\right)\right),\tilde{p}\langle_{t=\tau} -$$

$$-\rangle\left(\left(B\tilde{\psi},\tilde{\psi}\right)+\phi(\tilde{\psi})-\left(f,\tilde{\psi}\right)\right),\tilde{p}\langle_{t=T} = 0\,. \qquad (28)$$

Из (28) следует, что второе слагаемое в нем соответствует оптимальному решению вариационного неравенства (14). В том случае, когда оптимальное решение $\psi(t,\bar{z})$ найдено, вариация функционала J будет равна нулю, т.е. $\delta J = 0$. Учитывая это, первое слагаемое в (28), определяемое функцией Гамильтона

$$\tilde{H} = \rangle\left(\left(B\tilde{\psi},\tilde{v}-\tilde{\psi}\right)+\phi(\tilde{v})-\phi(\tilde{\psi})-\left(\theta(\tilde{\psi},\tilde{v}),\tilde{v}-\tilde{\psi}\right)-\left(f,\left(\tilde{v}-\tilde{\psi}\right)\right)\right),\tilde{p}\langle\,, \qquad (29)$$

должно принимать максимальное значение. Тем самым вышеприведенное утверждение доказано.

Покоординатный аналог (29) определяется выражением

$$\widetilde{H} = \rangle\left(\left(B\widetilde{\psi}_i, \widetilde{v}_i - \widetilde{\psi}_i\right) + \phi(\widetilde{v}_i) - \phi(\widetilde{\psi}_i) - \left(\theta(\widetilde{\psi}_i, \widetilde{v}_i), \widetilde{v}_i - \widetilde{\psi}_i\right) - \left(f, \left(\widetilde{v}_i - \widetilde{\psi}_i\right)\right)\right), \widetilde{p}_i \langle ,$$

$$i = 0,1,...,n . \qquad (30)$$

Для обеспечения максимального значения функции $\widetilde{H}$ необходимо приравнять нулю все частные производные этой функции по пробной переменной $v(t,\bar{z})$, что с учетом (30) дает систему уравнений

$$\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial v_i} = 0 , \quad i = 0,1,...,n , \qquad (31)$$

которая для решения должна быть доопределена следующими уравнениями

$$\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \theta_i} = \widetilde{p}_i , \quad i = 0,1,...,n . \qquad (32)$$

$$\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial p_i} = \left[m(\bar{z}_i) \frac{\partial \widetilde{\psi}_i}{\partial t}, \widetilde{v}_i - \widetilde{\psi}_i \right] , \quad i = 0,1,...,n . \qquad (33)$$

Таким образом предложен метод решения вариационных неравенств, представляющих собой ММ физических процессов, представимых в рамках обобщенной модели вида (1), (2).

Выполнено исследование предложенного подхода, которое показало, что возможно нахождение одношагового решения задачи (как главное следствие из принципа максимума), причем оно не зависит от размерности пространственной области при переходе в дискретную пространственную область в ходе численного решения задачи при дискретизации ММ.

1. *Панагиотопулос П.* Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии.— М.: Мир, 1989.— 494с.

2. *Киндерлерер Д.* Введение в вариационные неравенства и их приложения / *Киндерлерер Д., Стампаккья Г.*— М.: Мир. 1983.— 256с.

3. *Положаенко С.А.* Математические модели процессов течения аномальных жидкостей // Моделювання та інформаційні технології. Зб. наук. праць.— К.: ІПМЕ, 2001.— Вып. 9.— С. 14 — 21.

4. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление.— М.: Наука, 1979.— 428с.

5. *Понтрягин Л.С.* Математическая теория оптимальных процессов / *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* — М.: Физматгиз, 1961.— 452 с.

Поступила 22.09.2010р.