

А.В.Жильцов, д.т.н., Д.С.Сорокин, аспірант НУБіПУ

СИНТЕЗ ОРІЄНТАЦІЇ ВЕКТОРА НАМАГНІЧЕНОСТІ МАГНІТІВ ЛІНІЙНОГО ДВИГУНА, ЯКІ СТВОРЮЮТЬ МАКСИМАЛЬНО МОЖЛИВЕ ПОТОКОЗЧЕПЛЕННЯ

Предложена методика определения оптимальной ориентации намагниченности постоянных магнитов в электромагнитной системе с ферромагнитным магнитопроводом на основе принципа взаимности. На ее основе определена намагниченность постоянных магнитов линейного двигателя, создающая максимально возможное потокозцепление.

Ключевые слова: синтез магнитной системы, магнитостатическое поле, линейный двигатель.

Під час синтезу магнітних систем потрібно вибрати параметр, який буде визначаючим для проектування пристрою, в якому використовуються ці системи. Для електродвигунів таким параметром є магнітний потік, який припадає на один полюсний поділ, адже від нього залежить тягове зусилля. Розглянемо систему, яка складається з магнітотвердого матеріалу (постійні магніти), що займають область S_u (рис.1). Потрібно визначити напрям вектору намагніченості \vec{J} в кожній точці M цієї області за умови максимального потоку крізь контур зі струмом, переріз якого зображено на рис.1. Поле \vec{J} будемо вважати плоскопаралельним. Розмір контуру дорівнює або менше полюсного поділу τ .

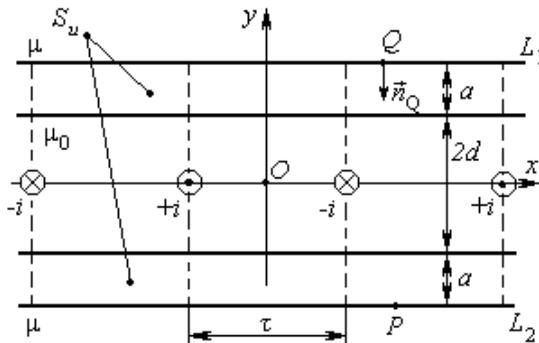


Рис.1. Переріз магнітної системи лінійного двигуна

Для того, щоб визначити орієнтацію вектору намагніченості необхідно пропустити струм $i > 0$ через контур (рис.1). Відповідно до принципу взаємності магнітний потік крізь поверхню, що обмежена контуром дорівнює [1].

$$\Phi = \frac{l_u}{i} \int_{S_u} \vec{B}(M) \vec{J}(M) ds_M, \quad (1)$$

де l_u – довжина області розміщення постійних магнітів; S_u – переріз області, що займають постійні магніти; $\vec{B}(M)$ – магнітна індукція в точці M області розміщення магніту, що обумовлена струмами I з урахуванням наявності феромагнітного матеріалу, $\vec{J}(M)$ – вектор намагніченості постійних магнітів.

З формули (1) витікає, що магнітний потік буде максимальним, якщо при $i > 0$ напрям $\vec{J}(M)$ співпадає з напрямом $\vec{B}(M)$, зумовленим цим струмом в кожній точці M області S_u .

Таким чином, задача знаходження орієнтації вектору намагніченості магнітотвердого матеріалу зведена до розрахунку магнітного поля $\vec{B}(M)$ в області S_u , зумовленого струмом $i > 0$ в контурі.

Для розрахунку характеристик магнітного поля скористаємось методом інтегральних рівнянь. Замінюємо кусково-однорідне середовище однорідним з магнітною проникністю μ_0 . Щоб зберегти незмінним магнітне поле вводим на границі магнітопроводу $L = L_1 \cup L_2$ (рис.1) простий шар магнітних зарядів з лінійною густиною σ , для якої з граничних умов для нормальної складової вектору \vec{H} на $L = L_1 \cup L_2$ можна отримати наступну систему інтегральних рівнянь [2]

$$\begin{cases} \sigma_1(Q) = \frac{\lambda}{\pi} \int_{L_2} \frac{\sigma_2(P) (\vec{r}_{PQ}, \vec{n}_Q)}{r_{PQ}^2} dl_P + 2\lambda H_{0n}(Q), & Q \in L_1; \\ \sigma_2(Q) = \frac{\lambda}{\pi} \int_{L_1} \frac{\sigma_1(P) (\vec{r}_{PQ}, \vec{n}_Q)}{r_{PQ}^2} dl_P + 2\lambda H_{0n}(Q), & Q \in L_2; \end{cases} \quad (3)$$

де $\sigma_1(Q)$, $\sigma_2(Q)$ – густина простого шару магнітних зарядів в точці Q границі магнітопроводів L_1 , L_2 ; $\sigma_1(P)$, $\sigma_2(P)$ – аналогічно в точці P ; \vec{r}_{PQ} – радіус-вектор, що спрямований з точки P в точку Q ; $\lambda = (\mu - \mu_0) / (\mu + \mu_0)$; μ – абсолютна магнітна проникність феромагнітного матеріалу; μ_0 – абсолютна магнітна проникність зовнішнього відносно магнітопроводу середовища; $H_{0n}(Q)$ – проекція напруженості магнітного поля, зумовлена струмом i вказаного контуру, на зовнішню, відносно магнітопроводу, нормаль \vec{n}_Q в точці Q границі $L = L_1 \cup L_2$; P – точка інтегрування (рис.1).

Визначимо поле, яке створюють струми i . Струми, що мають додатний

напряг, розміщені в точках $x_j^+ = -\frac{\tau}{2} + \tau j$, а від'ємний – в точках $x_j^- = \frac{\tau}{2} + \tau j$, де τ – півперіод магнітної системи; $j = 0; \pm 1; \pm 2; \dots \pm p$, $p + 1$ – кількість полюсних ділянок.

Для такої решітки струмів, використовуючи закон повного струму в інтегральній формі, можна отримати наступні вирази для проєкцій напруженості магнітного поля

$$H_x(x, y) = -\frac{i}{2\pi} \sum_{j=-p}^p (-1)^j \left[\frac{y}{(x-x_j^+)^2 + y^2} - \frac{y}{(x-x_j^-)^2 + y^2} \right], \quad (4)$$

$$H_y(x, y) = \frac{i}{2\pi} \sum_{j=-p}^p (-1)^j \left[\frac{x-x_j^+}{(x-x_j^+)^2 + y^2} - \frac{x-x_j^-}{(x-x_j^-)^2 + y^2} \right], \quad (5)$$

тут i – струм в контурі.

В силу симетрії магнітної системи відносно вибраного початку координат O маємо $\sigma_1(x) = -\sigma_2(x)$, де $\sigma_1(x)$ та $\sigma_2(x)$ – лінійна густина зарядів, на границях L_1 і L_2 (рис.1). Тоді, якщо врахувати, що

$$\begin{aligned} (\vec{r}_{pQ}, \vec{n}_Q) &= -2(d+a), \\ r_{pQ}^2 &= (x-x_p)^2 + 4(d+a)^2, \\ H_{0n}(Q) &= -H_y(x, d+a), \end{aligned}$$

$H_y(x, y)$ – визначається за формулою (5), то

$$\sigma_1(x) = \lambda \frac{2(d+a)}{\pi} \int_{-\varphi - \frac{\tau}{2}}^{\varphi + \frac{\tau}{2}} \frac{\sigma_1(x_p)}{(x-x_p)^2 + 4(d+a)^2} dx_p - 2\lambda H_y(x, d+a). \quad (6)$$

Рівняння (6) розв'язувалось за допомогою методу квадратур [3], при цьому для густини простого шару магнітних зарядів використовувалась кусково-постійна апроксимація. Визначив, таким чином, $\sigma_{1i} = \sigma_1(x_i)$, а потім $\sigma_{2i} = -\sigma_1(x_i)$, де $i = \overline{1, m}$, m – кількість розбиттів області інтегрування при зведенні інтегрального рівняння (6) до системи лінійних алгебраїчних рівнянь, для проєкцій індукції магнітного поля в області S_u отримаємо вирази

$$B_x(x, y) = \mu_0 H_x(x, y) + \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{i=1}^m \sigma_{1i} (x-x_i) \left[\frac{1}{r_{1i}^2} - \frac{1}{r_{2i}^2} \right] \Delta x, \quad (7)$$

$$B_y(x, y) = \mu_0 H_y(x, y) + \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{i=1}^m \sigma_{1i} \left[\frac{y-(d+a)}{r_{1i}^2} - \frac{y+(d+a)}{r_{2i}^2} \right] \Delta x, \quad (8)$$

де $r_{1i}^2 = (x - x_i)^2 + (y - (d + a))^2$; $r_{2i}^2 = (x - x_i)^2 + (y + (d + a))^2$; Δx – крок розбиття області інтегрування в (6); $H_x(x, y)$ і $H_y(x, y)$ визначаються виразами (4) та (5);

Для плоскопаралельного поля магнітна індукція від простого шару магнітних зарядів може бути розрахована за формулою [1]

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{2\pi_L} \int \frac{\sigma(P)\vec{r}_{PM}}{r_{PM}^2} dl_P.$$

Якщо $J(M) = J = const$, то орієнтацію вектору намагніченості магнітотвердого матеріалу визначають наступні вирази

$$J_x(M) = J \frac{B_x(M)}{\sqrt{B_x^2(M) + B_y^2(M)}}, \quad J_y(M) = J \frac{B_y(M)}{\sqrt{B_x^2(M) + B_y^2(M)}}, \quad (9)$$

тут $J_x(M)$ і $J_y(M)$ – проєкції вектору намагніченості магнітотвердого матеріалу в точці $M(x, y) \in S_u$ відповідно на вісь Ox та Oy ; $B_x(M)$ і $B_y(M)$ визначаються за формулами (7) та (8). На рис.2 наведена топографія вектора намагніченості постійного магніту, що отримана за допомогою методики, що описана вище.

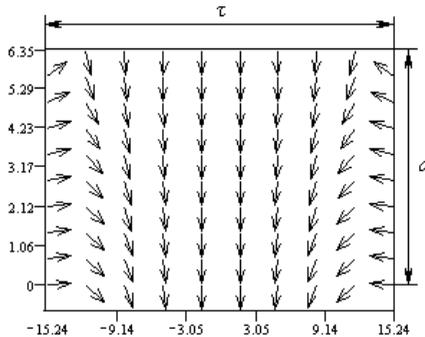


Рис.2. Розрахована топографія вектора намагніченості для одного магніту полюсної ділянки лінійного двигуна

Розрахунок магнітного поля в лінійному двигуні від постійних магнітів з розрахованою орієнтацією вектора намагніченості. Розглянемо магнітну систему лінійного двигуна з розрахованою вище орієнтацією вектору намагніченості, яка визначена із умови максимального магнітного потоку на один полюсний поділ. Топографія такої намагніченості для одного з магнітів, який припадає на полюсну ділянку, представлена на рис.2. Для магніту, симетричного відносно вісі Ox першому, топографію поля вектору \vec{J} можна отримати з вищевказаної, якщо для симетричних відносно Ox точок проєкцію J_y залишити без змін, а проєкцію J_x замінити на $-J_x$.

Для розрахунку магнітного поля скористаємось методом інтегральних рівнянь [2]. Але перед тим замінимо область постійних магнітів з неоднорідною намагніченістю $\vec{J}(x, y)$ кусково-однорідно намагніченою, розділив на ділянки прямокутної форми (рис.3).

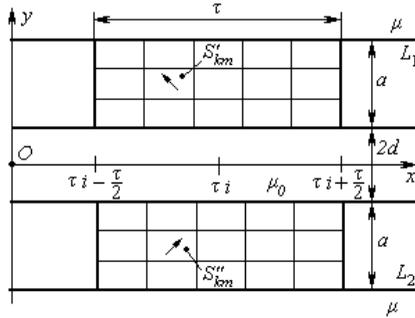


Рис.3. Розбиття області з постійними магнітами на ділянки прямокутної форми

Напрямок вектору \vec{J} для кожної ділянки визначається його напрямом в центральній точці.

Замінюємо кусково-однорідне середовище однорідним з магнітною проникністю μ_0 . Для того, щоб не змінилося магнітне поле введемо на границі розподілу $L = L_1 \cup L_2$ простий шар магнітних зарядів з лінійною густиною $\sigma(Q)$, причому $\sigma(Q)$ є сума лінійної густини зарядів наведених зовнішнім магнітним полем (обумовлено постійними магнітами), та лінійної густини магнітних зарядів на границі постійних магнітів, спільної з L . Постійні магніти замінюємо вторинними джерелами – простим шаром магнітних зарядів на їх границі з лінійною густиною $\sigma(P) = J_n(P)$, де $J_n(P)$ – проекція вектору намагніченості на зовнішню, відносно магніту, нормаль \vec{n} . Зовнішнє поле $\vec{H}_0(Q)$ – поле магнітних зарядів, обумовлене постійними магнітами, за виключенням тих, що знаходяться на спільній з L границею.

Із граничної умови для нормальної компоненти вектору \vec{H} на L відносно $\sigma(Q)$ можна отримати інтегральне рівняння (6), в якому $\sigma_1(x)$ – лінійна густина простого шару магнітних зарядів на L_1 , $H_y(x, y)$ – y -компонента вектору $\vec{H}_0(x, y)$, вказаного вище, позначимо її як $H_{0y}(x, y)$.

Знайдемо $H_{0y}(x, y)$. Позначимо через k, m – кількість елементів розбиття одного полюсного магніту вздовж Ox та Oy відповідно. Внесок в y -компоненту результуючого значення напруженості від елемента S'_{km} , використовуючи формули (5) і (7), для i -тої полюсної ділянки

($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm p$, $p + 1$ – кількість полюсних ділянок) визначається виразом

$$H'_y(x, y) = \frac{J_x(x_{ik}, y'_m)}{4\pi} \sum_{j=0}^1 (-1)^j \ln \frac{[x - (x_{ik} - (-1)^j b)]^2 + [y - (y'_m + c)]^2}{[x - (x_{ik} - (-1)^j b)]^2 + [y - (y'_m - c)]^2} + \frac{J_y(x_{ik}, y'_m)}{2\pi} \sum_{j=0}^1 (-1)^j \left\{ \operatorname{arctg} \frac{x - (x_{ik} + b)}{y - (y'_m - (-1)^j c)} - \operatorname{arctg} \frac{x - (x_{ik} - b)}{y - (y'_m - (-1)^j c)} \right\}, \quad (10)$$

тут $c = a/(2m)$; $b = \tau/(2k)$; a – висота магніту; τ – полюсний поділ магнітної системи; k, m – кількість елементів розбиття одного полюсного магніту вздовж Ox і Oy ; $x_{ik} = -\frac{\tau}{2} + \tau i + (2k - 1)b$; $k = 1; 2; 3; \dots$
 $y'_m = d + (2m - 1)c$; $m = 1; 2; 3; \dots$

Аналогічно внесок $H''_y(x, y)$ в y - компоненту результуючого значення напруженості від елементу S''_{km} , симетричного елементу S'_{km} відносно Ox , визначається виразом (10) заміною y'_m на $y''_m = -(d + (2m - 1)c)$; $m = 1; 2; 3; \dots$

Тоді, результуюче значення y - компоненти напруженості магнітного поля, обумовленого постійними магнітами, визначається сумою за всіма елементами магнітної системи, а саме

$$H_y(x, y) = \sum_{i=-p}^p (-1)^i \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^M H'_y(x, y) + H''_y(x, y), \quad (11)$$

де $H'_y(x, y)$ визначається за формулою (10), $H''_y(x, y)$ визначається так само, але враховуючи вищезазначену заміну.

Отримавши рішення інтегрального рівняння (2), знайдемо лінійну густину магнітних зарядів σ , знаючи яку, за формулами (8) можна знайти y - компоненту магнітної індукції на Ox , $H_y(x, y)$ визначаються за формули (11). Для двигунів з розрахованою орієнтацією вектору намагніченості магнітів середнє значення тягового зусилля [5] складає 33,76 Н, що на 12 % більше, ніж для існуючого двигуна тільки з полюсними однорідно намагніченими магнітами шириною $2b = 27,93$ мм (рис.1).

Реалізувати розраховану вище намагніченість постійних магнітів – складне технологічне завдання. Тому, як правило, для практично реалізованої задачі синтезу оптимальної орієнтації вектору намагніченості магніт виконують з m однорідно намагнічених ділянок, границі яких можна визначити наступним чином [6]. Розбиваємо область, яку займає магнітотвердий матеріал на малі ділянки, кожен з котрих вважаємо однорідно намагніченим. Визначаємо кут між напрямом вектору намагніченості та однією з координатних вісей. Потім, аналізуючи значення кутів α для всіх точок, знаходимо мінімальне (α_{\min}) та максимальне (α_{\max}) значення. Далі

знаходимо величину $\Delta\alpha = \frac{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}}{2(m-1)}$ і m значень кутів α (напрямів намагніченості ділянок) $\alpha_1 = \alpha_{\min}$, $\alpha_2 = \alpha_{\min} + 2\Delta\alpha$, $\alpha_3 = \alpha_2 + 2\Delta\alpha$, $\alpha_m = \alpha_{m-1} + 2\Delta\alpha = \alpha_{\max}$. Далі знову переглядаємо всі значення α та співвідносимо кожен елемент до однієї з m ділянок. Наприклад, якщо $\alpha_k - \Delta\alpha \leq \alpha \leq \alpha_k + \Delta\alpha$, то елемент, відповідний куту α необхідно віднести до k - тої ділянки.

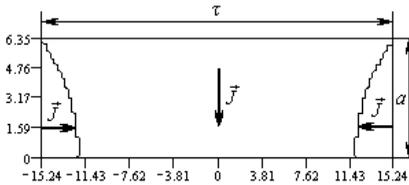


Рис.4. Топографія намагніченості для $m=3$ полюсної ділянки для $m=2$ $(0^\circ, 45^\circ, 90^\circ)$

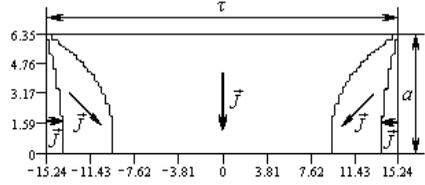


Рис.5. Топографія (кути)

Середнє значення тягового зусилля лінійного двигуна при орієнтації вектору \vec{J} (рис. 4) дорівнює 32,08 Н (більше на 6,5%, ніж у первісній моделі), пульсації $\varepsilon = 1,11\%$.

Для розподілу намагніченості (рис. 5) середнє значення тягового зусилля 33,08 Н (більше на 9,8%, ніж у первісній моделі), пульсації при цьому $\varepsilon = 0,9420\%$.

Оптимізація магнітної системи лінійного двигуна з постійними магнітами. Припустимо, що кожен полюсний магніт складається з 5-ти однорідно намагнічених ділянок.

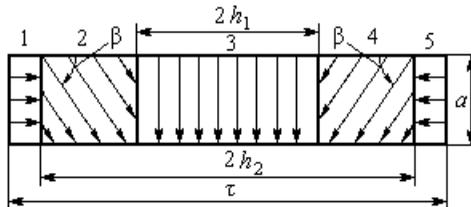


Рис.6. Структура магніту, що розглядається

Розглянемо магнітну систему лінійного двигуна, яка складається з $p+1$ полюсних магнітів. Кожен i -тий полюсний магніт представимо у вигляді системи однорідно намагнічених магнітів (рис. 6). Завдамо напрям намагніченості крайніх (1 та 5 магніти) і середньої ділянки (магніт 3), так, як

зображено на рисунку. Завдання полягає в тому, щоб оптимізувати наступні параметри $2h_1$, $2h_2$, та кут β за умови максимуму тягового зусилля.

Розрахуємо магнітне поле за допомогою зарядової моделі [1]. Знайдемо y -компоненту магнітного поля \overline{H}_0 . Внесок від магнітів 1 та 5 можна визначити за формулою

$$H_{1y}(x, y) = -\frac{J}{4\pi} \sum_{i=-p}^p (-1)^i \sum_{m=1}^2 \sum_{q=1}^2 \ln \frac{(x-x_{iq})^2 + (y-y''_m)^2}{(x-x'_{iq})^2 + (y-y'_m)^2}, \quad (12)$$

де $x_{iq} = \tau i + (-1)^i h_2$; $y'_m = (-1)^m d$; $y''_m = (-1)^m (d+a)$.

Внесок від магніту 3 визначимо з

$$H_{3y}(x, y) = -\frac{J}{2\pi} \sum_{i=-p}^p (-1)^i \sum_{m=1}^2 (-1)^{m+1} \left\{ \arctg \frac{x-x_i^+}{y-y_m} - \arctg \frac{x-x_i^-}{y-y_m} \right\}, \quad (13)$$

де $x_i^+ = \tau i + h_1$; $x_i^- = \tau i - h_1$; $y_m = (-1)^m d$.

Внесок від магнітів 2 та 4 можна знайти, використовуючи вираз

$$H_{2y}(x, y) = H'_{2y}(x, y) + H''_{2y}(x, y), \quad (14)$$

де

$$H'_{2y}(x, y) = -\frac{J \cos \beta}{4\pi} \sum_{i=-p}^p (-1)^i \sum_{m=1}^2 \sum_{q=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^j \ln \frac{(x-x'_{ijm})^2 + (y-y'_q)^2}{(x-x''_{ijm})^2 + (y-y''_q)^2},$$

$$H''_{2y}(x, y) = -\frac{J \sin \beta}{2\pi} \sum_{i=-p}^p (-1)^i \sum_{m=1}^2 \sum_{q=1}^2 (-1)^{m+q+1} \left(\arctg \frac{x-x'_{im}}{y-y''_q} - \arctg \frac{x-x''_{im}}{y-y'_q} \right).$$

Тут

$$x'_{ijm} = \tau i + (-1)^m \frac{h_1 + h_2}{2} - (-1)^j \frac{h_2 - h_1}{2}; \quad y'_q = (-1)^q (d+a); \quad y''_q = (-1)^q d;$$

$$x''_{im} = \tau i + (-1)^m h_1; \quad x'''_{im} = \tau i + (-1)^m h_2; \quad i = 0; \pm 1; \pm 2; \dots; \pm p.$$

Для шуканої лінійної густини простого шару магнітних зарядів маємо інтегральне рівняння (6), в якому

$$H_y(x, y) = H_{1y}(x, y) + H_{2y}(x, y) + H_{3y}(x, y),$$

де $H_{1y}(x, y)$, $H_{2y}(x, y)$, $H_{3y}(x, y)$ визначають відповідно виразами (12), (14), (13). Знайшовши за допомогою методу квадратур [3] $\sigma(Q)$ на границі магнітопроводу, можна за формулою (8) визначити y -компоненту магнітної індукції в робочій області лінійного двигуна. Потім знаходимо середнє значення тягового зусилля [5].

В результаті оптимізації, за умови максимуму тягового зусилля, отримані наступні значення параметрів $2h_1 = 12,8$ мм; $2h_2 = 26,08$ мм; $\beta = 55^\circ$. При цьому середнє за напівперіод значення тягового зусилля складає $F_{cp, теор} = 33,385$ Н (менше на 1,1% у порівнянні з випадком орієнтації

вектору намагніченості за умови максимального магнітного потоку, і більше, ніж у існуючої моделі на 10,8 %); пульсація $\varepsilon = 0,415\%$.

1. *Поливанов К. М.* Теоретические основы электротехники: часть 3. – М.: Энергия, 1975. – 120 с.
2. *Тозони О.В., Маергойз И.Д.* Расчет трехмерных электромагнитных полей. – Киев: Техника, 1974. – 352 с.
3. *Верлань А.Ф., Сизяков В.С.* Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. – Киев: Наукова думка, 1978. – 292 с.
4. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1981. – 720 с.
5. *Жильцов А.В., Сорокин Д.С.* Синтез магнитной системы линейного двигателя с постоянными магнитами // Зб. наук. пр. ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України. – К.: 2010. – Вып. 55. – С. 3–11.
6. *Стадник И. П.* Методы и алгоритмы синтеза магнито- и электростатических полей: Дисс... док. тех. наук: 05.09.05. – Симферополь, 1987. – 369 с.

Поступила 11.10.2010р.

УДК 681.142 + 519.4

О.Д. Глухов

ПРО ПЛАНАРНІ КВАЗІВИПАДКОВІ ГРАФИ ПУАССОНІВСЬКОГО ТИПУ

В роботі розглядається задача оцінки зв'язності планарних квазівипадкових графів.

В работе рассматривается задача оценки связности планарных квазислучайных графов.

In this paper we study the problem of estimating the connectivity of planar quasi-random graphs.

Квазівипадковим графом (або частково-випадковим графом) на основі звичайного графа G з множиною G^0 вершин і множиною G^1 ребер, $|G^0| = n, |G^1| = m$, називається граф $G(p)$ з випадковою множиною ребер $U = (G(p))^1$, де $Prob(u \in U) = p$, якщо $u \in G^1$, $Prob(u \in U) = 0$, якщо $u \notin G^1$. Тут розглядаються квазівипадкові графи пуассонівського типу, для яких виконується умова: $p = 1 - \alpha / m$, де α - деяка константа. Такі графи були введені в статті [1] для моделювання дискретних систем, структура яких може змінюватись внаслідок випадкового розриву частини зв'язків. В даній роботі розглядається задача оцінки ймовірності P зв'язності графа $G(p)$ у