Табл. 1 и 2 показывают влияние пробной функции на качество решения. Наиболее благоприятный вариант $v_0 = x_M$ дает и наилучшее по точности решение при параметре $\alpha = 10^{-2}$.

Так как решается уравнение с невозмущенными данными, то уменьшение α приводит к уменьшению погрешности. Это следует из сравнения табл. 2 и 3. Значения величин Δ_i, приведенные в табл. 4 , показывают, что при достаточно грубой функции $x(t) = 0{,}5(1-|t|)$ уже после пяти итераций схема (7) дает вполне удовлетворительный результат. Из табл. 3-5 видно, что γ_k можно выбирать в широком диапазоне.

Заключение. Полученные результаты свидетельствуют о том, что данный алгоритм является эффективным, быстро сходящимся, позволяет получить высокую точность данных даже при достаточно грубых начальных функциях.

1. *Васин В. В, Агеев А.Л.*. Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеренбург.: УИФ «Наука», 1993.-263с.
2. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. - К.: Наукова думка, 1986. - 544 с.
3. *Ортега Дж.*, *Рейнболдт В*. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. - М.: Мир, 1975.-560с.

Поступила 20.09.2010р.

УДК 621.372

А.М. Корнеев

ДВА СПОСОБА ПРИМЕНЕНИЯ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА ПРИ РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЯЗКОУПРУГИХ СИСТЕМ

Введение. Достаточно эффективным методом численного решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений многих задач наследственной теории вязкоупругости является метод последовательных приближений [1]. Важным свойством метода является то, что в ряде случаев он позволяет построить приближенное аналитическое решение. Метод применим к линейным, и нелинейным интегральным уравнениям. В работе предлагается модификация вычислительной схемы при выполнении традиционного итерационного алгоритма, а также применение усовершенствованной разновидности – метода осреднения функциональных поправок [2], позволяющего получить приближенное аналитическое решение на примере слабосингулярного интегро-дифференциального уравнения динамической задачи вязкоупругости.

Итерационный процесс. Для интегрального уравнения

$$u(t) - \int_0^t R(t-\tau)u(\tau)dt = f(t) \tag{1}$$

(ядро $R(t-\tau)$ и правая часть – заданные функции, $u(t)$ – искомая функция) традиционной процедурой последовательных приближений, является выражение

$$u_n(t) = \int_0^t R(t-\tau)u_{n-1}(\tau)dt + f(t), \quad n = 1,2,3\ldots \tag{2}$$

Используя элементы доказательства единственности полученного при этом решения [2], можно получить описание итерационного процесса в несколько ином виде:

$$\begin{aligned} &u_n(t) = f(0)V_n(t) + \int_0^t f'(\tau)V_n(t-\tau)d\tau, \\ &V_0(t) = 1, \\ &V_n(t) = \int_0^t R(t-\tau)V_{n-1}(\tau)d\tau + 1. \end{aligned} \tag{3}$$

В самом деле, если функция $V(t)$ есть решение уравнения

$$V(t) - \int_0^t R(t-\tau)V(t)dt = 1 \tag{4}$$

то

$$u(t) = f(0)V(t) + \int_0^t f'(\tau)V(t-\tau)d\tau \tag{5}$$

является решением исходного уравнения (1). Справедливость выражения (5) можно также подтвердить непосредственной подстановкой в уравнение (1). Если функция $f(t)$ является достаточно сложной, но допускает дифференцирование, то процедура (3) имеет определенные преимущества перед итерационным процессом (2).

Для оценки ошибки решения можно использовать следующий подход. Пусть $\delta_n(t) = \left|V_n(t) - V(t)\right|$ есть разность между точными и приближенными решениями. Тогда $\delta_n(t) \le K\int_0^t \delta_{n-1}(\tau)d\tau$, $K = \max\limits_{0\le t,\tau \le T}\left|R(t-\tau)\right|$, откуда

$\delta_n(t) \le \frac{K^n t^n}{n!} \max_{0\le t\le T} \delta_0(t)$ и, следовательно, $\|V_n(t) - V(t)\| = \max_{0\le t\le T} \delta_n(t) \le$

$\le C \cdot \frac{K^n T^n}{n!}$, где $C = \max_{0\le t\le T} \delta_0(t)$.

Итерационный способ получения приближенного аналитического решения. Посредством метода дискретизации по пространственным переменным, изложенным в [1] динамические задачи тонкостенных конструкций типа вязкоупругих пластин и оболочек могут быть сведены к решению интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\ddot{u}(t) + \omega^2[u(t) - \int_0^t R(t-\tau)u(\tau)d\tau] = f(t), \\ &u(0) = T_0, \quad \dot{u}(0) = T_1, \end{aligned} \tag{6}$$

Принимая в качестве ядра релаксации функцию Ржаницына [4], т.е. $R(t) = e^{-\beta t} t^{\alpha - 1}$, $0 \le \alpha \le 1$, представим решение уравнения (6) в виде

$$u(t) = e^{-ft} y(t). \tag{7}$$

Выполняя замену переменных в (6) и учитывая начальные условия, получим интегро-дифференциальное уравнение для функции $y(t)$

$$\ddot{y} + (\beta^2 + \omega^2)y(t) - 2\beta\dot{y}(t) - \omega^2 \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} y(\tau)d\tau = e^{\beta t} f(t) \tag{8}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} &y(0) = T_0, \\ &\dot{y}(0) = T_1 + \beta T_0. \end{aligned} \tag{9}$$

Уравнение (8) с начальными условиями (9) эквивалентно интегральному уравнению

$$y(t) - \int_0^t \mathrm{K}(t-\tau)y(\tau)d\tau = B(t), \tag{10}$$

где

$$\mathrm{K}(t) = \frac{A_0}{\Gamma[\alpha+2]} t^{\alpha+1} + A_1 t + A_2,$$

$$B(t) = \int_0^t (t-\tau)e^{\beta\tau} f(\tau)d\tau + T_0 + (T_1 + \beta T_0)t, \tag{11}$$

$$A_0 = \omega^2\Gamma[\alpha], \quad A_1 = -(\beta^2 + \omega^2), \quad A_2 = 2\beta.$$

Используя прием, основанный на выражениях (3)–(4), решение интегрального уравнения (10) можно представить в виде

$$y(t) = T_0 V(t) + \int_0^t B'(\tau) V(t-\tau) d\tau \qquad (12)$$

Таким образом, задача нахождения решения интегро-дифференциального уравнения (6) сводится к решению интегрального уравнения (4). Для этого применим метод осреднения функциональных поправок [3], представляющий собой усовершенствованную разновидность метода последовательных приближений.

В первом приближении по данному методу получим

$$V_1(t) = 1 + \alpha_1 \int_0^t \mathrm{K}(t-\tau) d\tau = 1 + \alpha_1 \left(\frac{A_0}{\Gamma[\alpha+3]} t^{\alpha+2} + \frac{A_1}{2} t^2 + A_2 t \right) \qquad (13)$$

или

$$V_1(t) = 1 - \psi_1(t) + (1+\alpha_1)\psi_1(t), \qquad (14)$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\Psi_1(t) = \frac{A_0}{\Gamma[\alpha+3]} t^{\alpha+2} + \frac{A_1}{2} t^2 + A_2 t \\ &\alpha_1 = \frac{1}{h}\int_0^h V_1(t) dt = \frac{1}{h}\int_0^h [1 + \alpha_1 \psi_1(t)] dt = \\ &= 1 + \alpha_1 \varphi_1(h). \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Отсюда

$$\alpha_1 = \frac{1}{1 - \varphi_1(h)}, \qquad (16)$$

где $\varphi_1(h) = \frac{1}{h}\int_0^h \psi_1(t) dt.$

Если в (15) положить $h = t$, то из (12) будет получено первое приближение решения уравнения (4).

Во втором приближении найдем

$$V_2(t) = 1 + \int_0^t \mathrm{K}(t-\tau)[V_1(\tau) + \alpha_2] d\tau, \qquad (17)$$

или

$$V_2(t) = 1 - \psi_2(t) + (1+\alpha_1)\psi_2(t) + (1+\alpha_2)\psi_1(t), \qquad (18)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&\psi_2(t)=\frac{A_0^2}{\Gamma[2\alpha+5]}t^{2\alpha+4}+\frac{2A_0A_1}{\Gamma[\alpha+5]}t^{\alpha+4}+\\
&+\frac{2A_0A_1}{\Gamma[\alpha+4]}t^{\alpha+3}+\frac{A_1^2}{4!}t^4+\frac{2A_1A_2}{3!}t^3+\frac{A_2^2}{2!}t^2\\
&\alpha_2=\frac{1}{h}\int_0^h[V_2(t)-V_1(t)]dt.
\end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Отсюда, согласно (18) и (12), получим

$$\alpha_2=\frac{\varphi_1(h)+[\varphi_2(h)-\varphi_1(h)]\alpha_1}{1-\varphi_1(h)}, \qquad (20)$$

где

$$\varphi_i(h)=\frac{1}{h}\int_0^h \psi_i(t)dt, \quad i=1,2\,. \qquad (21)$$

Следовательно, если в (20) положить $h=t$, то (18) будет вторым приближением решения уравнения (4).

Аналогично, для n – го приближения имеем

$$V_n(t)=1+\int_0^t \mathrm{K}(t-\tau)[V_{n-1}(\tau)+\alpha_n]d\tau \qquad (22)$$

или

$$V_n(t)=1-\psi_n(t)+\sum_{j=1}^{n}(1+\alpha_j)\psi_{n-j+1}(t)\,, \qquad (23)$$

где

$$\psi_n(t)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\frac{n!}{i!\,j!(n-i-j)!}\frac{A_0^iA_1^jA_2^{n-i-j}t^{i(\alpha+1)+n+j}}{\Gamma[i(\alpha+1)+n+j+1]};$$

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_k=\alpha_1[\psi_{k-1}(h)+\sum_{j=1}^{k-1}[\varphi_{k-j+1}(h)-\varphi_{k-j}(h)]\alpha_j];\\
&\varphi_k(h)=\frac{1}{h}\int_0^h \psi_k(t)dt,\; k=2,3...,n.
\end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Таким образом, если в (24) положить $h=t$, то (23) будет n-м приближением решения уравнения (14). При учете (12) и (7) получим решение интегро-дифференциального уравнения (7):

$$u(t)=e^{-\beta t}\left\{\begin{array}{l}T_0[1-\psi_n(t)+\\+\sum\limits_{j=1}^{n}(1+\alpha_j)\psi_{n-j+1}(t)]+\\+\int\limits_0^t \mathrm{B}'(t)[1-\psi_n(t-\tau)+\\+\sum\limits_{j=1}^{n}(1+\alpha_j)\psi_{n-j+1}(t-\tau)]d\tau\end{array}\right\}. \qquad (25)$$

Если формула (23) справедлива для какого-нибудь натурального числа n, то методом математической индукции покажем ее справедливость для следующего натурального числа $n+1$. В самом деле, учитывая (23), будем иметь

$$\begin{aligned}
&V_{n+1}(t)=1+\int\limits_0^t \mathrm{K}(t-\tau)[V_n(\tau)+\alpha_{n+1}]d\tau=\\
&=1+\int\limits_0^t \mathrm{K}(t-\tau)[1+(1+\alpha_n)\psi_1(\tau)+ \qquad (26)\\
&+(1+\alpha_{n-1})\psi_2(\tau)+\ldots+\alpha_1\psi_n(\tau)+\alpha_{n+1}]d\tau=\\
&=1+(1+\alpha_{n+1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^t\left[\frac{\mathrm{A}_0}{\Gamma[\alpha+2]}(t-\tau)^{\alpha+1}+\mathrm{A}_1(t-\tau)+\mathrm{A}_2\right]d\tau+\\
&+(1+\alpha_n)\\
&\int\limits_0^t\left[\frac{\mathrm{A}_0}{\Gamma[\alpha+2]}(t-\tau)^{\alpha+1}+\mathrm{A}_1(t-\tau)+\mathrm{A}_2\right]\psi_1(\tau)d\tau+\\
&+(1+\alpha_{n-1})\int\limits_0^t\left[\frac{\mathrm{A}_0}{\Gamma[\alpha+2]}(t-\tau)^{\alpha+1}+\mathrm{A}_1(t-\tau)\right.\\
&\left.+\mathrm{A}_2\right]\psi_2(\tau)d\tau+\ldots+\\
&+\alpha_1\int\limits_0^t\left[\frac{\mathrm{A}_0}{\Gamma[\alpha+2]}(t-\tau)^{\alpha+1}+\mathrm{A}_1(t-\tau)+\mathrm{A}_2\right]\psi_n(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

имея в виду

$$\int_0^t \left[\frac{A_0}{\Gamma[\alpha+2]}(t-\tau)^{\alpha+1} + A_1(t-\tau) + A_2 \right] d\tau = \psi_1(t),$$

$$\int_0^t \left[\frac{A_0}{\Gamma[\alpha+2]}(t-\tau)^{\alpha+1} + A_1(t-\tau) + A_2 \right] \psi_1(\tau) d\tau = \psi_2(t),$$

$$\ldots$$

$$\int_0^t \left[\frac{A_0}{\Gamma[\alpha+2]}(t-\tau)^{\alpha+1} + A_1(t-\tau) + A_2 \right] \psi_n(\tau) d\tau = \psi_{n+1}(t),$$

из (26) получим

$$V_{n+1}(t) = 1 + (1+\alpha_{n+1})\psi_1(t) + (1+\alpha_n)\psi_2(t) +$$
$$+ (1+\alpha_{n-1})\psi_3(t) + \ldots + \alpha_1\psi_{n+1}(t),$$

или

$$V_{n+1}(t) = 1 - \psi_{n-1}(t) + \sum_{j=1}^{n+1} (1+\alpha_j)\psi_{n-j+2}(t).$$

Таким образом, имеет место справедливость формулы (23) для натурального числа $n+1$.

Полученное приближенное аналитическое решение (25) можно применить для исследования собственных и вынужденных колебаний вязкоупругих систем, подчиняющихся линейной наследственной теории вязкоупругости.

В качестве примера можно воспользоваться уравнением (7), в котором

$$f(t) = \left(\beta^2 + \omega^2 - \frac{\varepsilon\omega^2 t^\alpha}{\alpha} \right) e^{-\beta t},$$

$$R(t-\tau) = \varepsilon(t-\tau)^{\alpha-1} e^{-\beta(t-\tau)},$$

$$T_0 = 1;\ T_1 = -\beta;\ \alpha = 0{,}25;\ \varepsilon = 0{,}01;\ \omega = 2\pi.$$

Точное решение $u(t) = e^{-\beta t}$, а приближенное имеет вид (25), где функция $B(t)$ вычисляется по формуле

$$B(t) = \frac{1}{2} t^2 \left(\beta^2 + \omega^2 \right) - \frac{\varepsilon\omega^2 t^{\alpha+2}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} + 1 - 2\beta t.$$

Для получения приемлемого решения при выполнении условия $|u_n - u_{n-1}| < 10^{-3}$ на заданном интервале времени достаточно было ограничиться 5-м приближением.

Заключение. Таким образом, в данной статье предложен способ модификации итерационного метода решения линейных и линейных интегро-дифференциальных уравнений в практических задачах наследственной вязкоупругости. Рассмотренная методика может быть использована и для решения соответствующих нелинейных уравнений.

1. *Бадалов Ф.Б.* Метод степенных рядов в нелинейной наследственной теории вязкоупругости. Ташкент: Фан, 1980. – 221 с.
2. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – 5 – е изд. – М.: Наука, 1981. – 544 с.
3. *Лучка А.Ю.* Проекционно-итеративные алгоритмы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев: Наукова думка, 1980. – 263 с.
4. *Ржаницын А.Р.* Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. – М.: ЖГИТТЛ, 1949. – 252 с.

Поступила 11.10.2010р.

УДК 519.711

А.В.Яцишин, В.О.Артемчук

ФОРМУВАННЯ ТА ГРАФІЧНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ВИБІРКИ З БАЗИ ДАНИХ ЕКОЛОГО-ЕНЕРГЕТИЧНОГО МОНІТОРИНГУ

Вступ

В статтях [3, 5] обґрунтовано актуальність, поставлено та розв’язано задачу збереження даних еколого-енергетичного моніторингу для їх обробки, аналізу та інтеграції створеної бази до програмного додатку, написаного на мові програмування Borland C++ Builder 6.0 з використанням технології ADO (ActiveX Data Object). В результаті, створену базу даних Microsoft Access, було поєднано з розробленим програмним додатком. Оскільки планується розвиток даного програмного продукту в „Аналітико-інформаційну систему еколого-енергетичного моніторингу”, в якій першочерговою операцією є мультикритеріальна вибірка даних з бази та її графічне представлення, то актуальною буде задача програмної реалізації формування мультикритеріальної вибірки та її графічного представлення.

У даній роботі розглянуті основні аспекти проектування, створення алгоритму та програмної реалізації формування мультикритеріальної вибірки та її графічного представлення. Обґрунтовано вибір інструментів для вирішення поставленої задачі. Наведено приклади роботи створених програмних модулів.

Методи дослідження

Відповідно до поставленої задачі було проведено дослідження засобів

