

Б.І.Гайвась, Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики імені Я.С. Підстригача НАН України

## **ПРО ОПИС ЛОКАЛЬНОГО СТАНУ КАПЛЯРНО-ПОРИСТИХ ТА ЩІЛЬНО УПАКОВАНИХ ЗЕРНИСТИХ МАТЕРІАЛІВ В ПРОЦЕСІ СУШІННЯ. Частина 1.**

The paper is devoted to studying nonequilibrium thermal, mechanical and diffusive processes in porous media. On the basis of principles of nonreversible processes thermodynamics the state equations are constructed for three-phase multicomponent porous bodies taking into account chemical and interphase transformations. It allows to investigate the processes on the base of experimental data and with allowance for changes of parameters of both porosity and moisture saturation of body.

В даній роботі вивчаються нерівноважні термічні, механіко-дифузійні процеси в пористому середовищі. На основі принципів термодинаміки незворотних процесів побудовані рівняння стану трьохфазних багатокомпонентних пористих тіл з врахуванням хімічних та міжфазових перетворень. Це дозволяє досліджувати процеси на основі експериментальних даних та враховуючи зміну параметрів пористості та насиченості вологою

**Ключові слова:** процес сушіння, міжфазні сили, багатокомпонентне трифазове тіло.

**Вступ.** Побудові моделі сушіння вологих пористих тіл присвячена велика кількість робіт. Зокрема, в роботі [1] для моделювання сил взаємодії між скелетом і неперервною фазою введені параметри, які залежать від кінематичних та геометричних характеристик фаз тіла. Це дало можливість класифікувати сили, які зумовлюють напруження в тілі у процесі сушіння.

Особливості протікання технологічних режимів сушіння, визначаються прямим або опосередкованим впливом локальної мікроскопічної структури матеріалу тіл. Такий вплив пов'язаний з наявністю швидких шляхів міграції вологи, її локальними фазовими перетвореннями та супутнім напружено-деформованим станом, що виникає при протіканні згаданих процесів.

В теоретичних моделях [2-6], оснований на положеннях термодинаміки нерівноважних процесів і одноконтинуумних наближеннях механіки суцільного середовища, використовують характеристики для фізично малого елемента тіла в цілому. В моделях [7-9], що базуються на уявленнях про багатозшвидкісний континуум і відповідних процедурах часового та просторового усереднення, природнім є використання характеристик окремих компонент ( або фаз) тіла.

**Побудова рівнянь стану.** Будемо вважати, що багатокомпонентне трифазове тіло  $K^*$  вкладене у трьохвимірний афінний простір  $X$ , який віднесений до прямокутної декартової системи координат  $\{x^\alpha\}, \alpha = \overline{1,3}$ . При макроскопічному описі кожній компоненті  $K_k^{(j)*}$  фази  $j$  тіла ставимо у відповідність окремих континуум  $K_k^j$ , а тілу в цілому  $K^* = \bigcup K_k^{(j)*}$  континуум центрів мас  $K_c$ . Тут  $k = \overline{1, K_j}$ ,  $K_j$  - число компонент  $j$ -ої фази  $j = \overline{0,2}$ ,  $j$  надалі в порядку зростання відзначають тверду, рідку і газоподібну фази.

Закони руху точок введених континуумів задамо у вигляді

$$\vec{r}_k^j = \vec{r}_k^j(\vec{r}_0, \tau), \quad \vec{r}^j = \vec{r}^j(\vec{r}_0, \tau), \quad \vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, \tau) \quad (1)$$

і їхні швидкості означимо наступними виразами

$$\vec{v}_k^j = \partial \vec{r}_k^j / \partial \tau, \quad \vec{v}^j = \partial \vec{r}^j / \partial \tau, \quad \vec{v} = \partial \vec{r} / \partial \tau, \quad (2)$$

де  $\vec{r}_0, \vec{r}_k^j, \vec{r}$  - радіус-вектори точок у початковий ( $\tau = 0$ ) та довільний момент часу  $\tau$ . Значимо, що при цьому радіус-вектор  $\vec{r}_0 = \xi^\alpha \vec{i}_\alpha^0$ , або координати точок  $\{\xi^\alpha\}$  у початковий момент часу індивідуалізують окремі частинки,  $\vec{i}_\alpha^0$  - базисні орти,  $\alpha = \overline{1,3}$ . Швидкості точок введених у розгляд континуумів  $\vec{v}_k^j = \vec{v}_k^j(\vec{r}_0, \tau)$ ,  $\vec{v}^j(\vec{r}_0, \tau)$  і  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}_0, \tau)$  можна подати як функції радіус-вектора точок афінного простору  $X$ , тобто  $\vec{v}_k^j = \vec{v}_k^j(\vec{r}, \tau)$ ,  $\vec{v}^j(\vec{r}, \tau)$ ,  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, \tau)$ . Це надалі дозволяє трактувати їх як густини імпульсів відповідних компонент.

Вважаємо, що кінематичні характеристики введених у розгляд континуумів пов'язані співвідношеннями

$$\rho \vec{v} = \sum_j \rho^{(j)} \vec{v}^j = \sum_j \sum_k \rho_k^{(j)} \vec{v}_k^j, \quad \text{де} \quad \rho = \sum_j \rho^{(j)} = \sum_j \sum_k \rho_k^{(j)},$$

$$\rho_k^{(j)} = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\delta m_k^{(j)}}{\delta V} \quad k = \overline{1, K_j}, j = \overline{0,2}, \quad (3)$$

$\rho_k^j, \rho$  - приведена (усереднена) густина компоненти  $k$   $j$ -ої фази і сумарна густина;  $\delta m_k^j$  - маса компоненти  $k$   $j$ -ої фази в фізично малому об'ємі  $\delta V$ , який виділений за точками афінного простору  $X$ .

За спряжені параметри фізично малого макроскопічного елемента  $\delta K^*$ , виділеного за точками афінного простору  $X$ , які визначають його стан і значення внутрішньої енергії  $\delta U$ , прийемо величини [12]

$$T - \delta S, \quad \bar{\sigma}^{\alpha\beta} - \bar{g}_{\alpha\beta}, \quad \mu_k^{(j)} - C_k^{(j)}, \quad \alpha, \beta = \overline{1,3}, \quad k = \overline{1, K_j}, \quad j = \overline{0,2}. \quad (4)$$

Тут  $T$  - абсолютна температура,  $\delta S$  - ентропія;  $\bar{\sigma}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g/g_0)^{1/2}\delta V_0^{1/3}\sigma^{\alpha\beta}$ ,  $\bar{g}_{\alpha\beta} = \delta V_0^{2/3}g_{\alpha\beta}$  - термодинамічні параметри, що визначають механічну роботу,  $g = \det\|g_{\alpha\beta}\|$ ,  $g_0 = \det\|g_{\alpha\beta}^0\|$  - визначники матриці коваріантних компонент метричного тензора у початковий  $g_{\alpha\beta}^0 = \bar{i}_\alpha^0 \cdot \bar{i}_\beta^0$  і довільний  $g_{\alpha\beta} = \bar{i}_\alpha \cdot \bar{i}_\beta$  моменти часу,  $\bar{i}_\alpha = \partial\bar{r}/\partial\xi^\alpha$  - коваріантний орт супутньої системи координат у довільний момент часу;  $\mu_k^{(j)} = \left(\partial U/\partial C_k^{(j)}\right)_{S, \bar{g}_{\alpha\beta}, C_{l \neq k}}$  - хімічний потенціал частинки компоненти  $k$ ,  $C_k^{(j)} = \rho_k^{(j)}/\rho$  - масова концернтрація;  $\delta V_0$  - об'єм вибраного макроелемента  $\delta K^*$  у початковий момент часу, який з його ж об'ємом у довільний момент часу  $\delta V$  пов'язаний формулою  $\delta V = (g/g_0)^{1/2}\delta V_0$ .

Внутрішня енергія  $\delta U$ , ентропія  $\delta S$  і об'єм фізично малого макроелемента в актуальній конфігурації  $\delta V_0$  є екстенсивними величинами. У зв'язку з цим вихідні термодинамічні співвідношення для нього зручно сформулювати для питомих величин з розрахунку на одиницю маси, тобто таких параметрів  $u = \lim_{\delta m \rightarrow 0} (\delta U/\delta m)$ ,  $s = \lim_{\delta m \rightarrow 0} (\delta S/\delta m)$  і  $v_0 = \lim_{\delta m \rightarrow 0} (\delta V_0/\delta m)$ , де  $\delta m = \sum \delta m_k$  - сумарна маса в об'ємі  $\delta V_0$  і надалі в об'ємі  $\delta V$ . Для цих питомих параметрів рівняння Гіббса і Ейлера набувають вигляду [11]

$$du = Tds + \frac{1}{2\rho}\sigma^{\alpha\beta}dg_{\alpha\beta} + \sum_{j=0}^2 \sum_{k=1}^{K_j} \mu_k^{(j)} dC_k^{(j)}, \quad u = Ts + \frac{1}{3}\sigma + \sum_{j=0}^2 \sum_{k=1}^{K_j} \mu_k^{(j)} C_k^{(j)}, \quad (5)$$

де  $\mu_k^{(j)} = \mu_k^{(j)} - \mu_n^{(j)}$  - приведений хімічний потенціал компоненти  $k$  де індексом  $n$  позначена найменш летуча компонента;  $\sigma = \sigma^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}$  - перший інваріант тензора напружень Коші,  $\sigma^{\alpha\beta} = \sum_i \alpha_i \langle \sigma_i^{\alpha\beta} \rangle_i$ ,  $\sigma^{\alpha\beta}$  - повне напруження на елементарній площадці, що дорівнює сумі усереднених напружень в фазах. Тут, і надалі, за грецькими індексами, які повторюються, розуміється підсумовування.

У науковій літературі [9-11] частіше використовуються як незалежні змінні абсолютна температура, деформація і масові концентрації компонент. Тому введемо у розгляд вільну енергію Гельмгольца  $f = u - Ts$ , як термодинамічний потенціал цих незалежних змінних. Для цієї функції рівняння Гіббса і Ейлера будуть

$$df = -s dT + \frac{1}{\rho} \sigma^{\alpha\beta} d\varepsilon_{\alpha\beta} + \sum_{j=0}^2 \sum_{k=1}^{K_j-1} \mu_k^{(j)} dC_k^{(j)}, \quad f = -sT + \frac{\sigma}{3\rho} + \sum_{j=0}^2 \sum_{k=1}^{K_j} \mu_k^{(j)} C_k^{(j)}, \quad (6)$$

де  $\varepsilon_{\alpha\beta} = (g_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}^0)/2$  - компоненти деформації.

Якщо функція Гельмгольца відома як функція змінних  $(T, \{\varepsilon_{\alpha\beta}\}, \{C_k^{(j)}\})$ , то у цьому випадку рівняння стану запишуться у вигляді

$$s = -\frac{\partial f}{\partial T}, \quad \sigma^{\alpha\beta} = \rho \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}, \quad \mu_k^{(j)} = \frac{\partial f}{\partial C_k^{(j)}}, \quad \alpha, \beta = \overline{1,3}, \quad k = \overline{1, K_j}. \quad (7)$$

Записані рівняння стану (7) можуть бути деталізовані з використанням різних фізичних експериментів.

Якщо обмежитись розглядом фазових перетворень і хімічних реакцій, то у цьому випадку хімічний потенціал можемо записати у формі [13]

$$\mu_k^{(j)} = \frac{\partial u}{\partial C_k^{(j)}} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I r_{ki} \frac{\partial C_{ki}^*}{\partial C_k^{(j)}}, \quad (8)$$

де  $r_{ki}$  - питома теплота фазового або хімічного перетворення при переході маси з компоненти  $i$  в компоненту  $k$ , а  $\delta C_{ki}^*$  - зміна концентрації при таких перетвореннях. При цьому питома теплота перетворень визначається формулою  $r = T \int ds$  і при фіксованих значеннях температури і об'єму буде мати вигляд  $r = T \delta s = T(s_2 - s_1)$ .

Ряд експериментів, зокрема, орієнтовані на визначення коефіцієнтів у лінійних рівняннях стану. Для врахування допоміжних напружень, які викликані дією надлишкового тиску компонентів, припустимо, що пори системи, які примикають до зовнішньої поверхні, закриті непроникливою оболонкою.

Нехай в системі протікає процес тепломасопереносу, що супроводиться зміною рівноважних станів, масові сили відсутні, поверхневі сили, викликані рівномірним нормальним тиском  $P_0$  в навколишньому середовищі, а надлишковий тиск неперервної (рідкої і газоподібної) фази всередині системи  $\hat{P} \neq P_0$ . За початковий стан приймемо рівноважний стан. Приймемо, що в цьому стані спряжені параметри стану набувають значень

$$T = T_0, \quad s = s_0; \quad \sigma^{\alpha\beta} = \hat{P}_0, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta 0}; \quad \mu_k^{(j)} = \mu_k^{(j)0}, \quad C_k^{(j)} = C_k^{(j)0}, \quad \alpha, \beta = \overline{1,3}, \quad k = \overline{2, K}. \quad (9)$$

При протіканні в системі нерівноважних процесів теплопровідності, деформації і конвекції (дифузії), або локальних змін типу фазових перетворень, відхилення  $t = T - T_0$ ,  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ ,  $c_k^{(j)} = C_k^{(j)} - C_k^{(j)0}$  значень не залеж-

них параметрів  $(T, \{\varepsilon_{\alpha\beta}\}, \{C_k^{(j)}\})$  від початкових (9) будемо вважати малими  $t/T_0 \ll 1$ ,  $\varepsilon_{\alpha\beta} \ll 1$ ,  $C_k^{(j)} \ll 1$ . При цьому відбувається перехід від одного рівноважного стану до найбільш ймовірного іншого. Тоді розклад густини вільної енергії Гельмгольца в околі рівноважного стану (9) до квадратичних членів включно набуде вигляду

$$f = f_0 - s_0 t + \alpha \hat{P}_n : \hat{\varepsilon}_0 + \sum_j \sum_k \mu_k^{(j)0} c_k^{(j)} - \frac{C_V}{2T_0} t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial(\hat{\sigma}_0/\rho)}{\partial \hat{\varepsilon}_0} :: \hat{\varepsilon}_0 \otimes \hat{\varepsilon}_0 + \\ + \sum_{j,i} \sum_{k,l} \frac{\partial \mu_k^{(j)}}{\partial C_l^{(i)}} c_k^{(j)} c_l^{(i)} + \frac{\partial(\hat{\sigma}_0/\rho)}{\partial T} : \hat{\varepsilon}_0 t + \sum_j \sum_k \frac{\partial(\hat{\sigma}_0/\rho)}{\partial C_k^{(j)}} : \hat{\varepsilon}_0 c_k^{(j)} + \sum_j \sum_k \frac{\partial \mu_k^{(j)}}{\partial T} : c_k^{(j)} t. \quad (10)$$

Тут враховано, що з рівняння Гіббса (6) і рівностей (10) випливає  $\partial f / \partial T = -s_0$ ,  $\partial f / \partial \hat{\varepsilon}_0 = \hat{\sigma}_0 / \rho = \alpha_p \hat{P}_n$ ,  $\partial f / \partial C_k^{(j)} = \mu_k^{(j)0}$ , коефіцієнт  $\alpha_p$  залежить від щільності та структури упаковки зерен і зв'язків між ними, величина  $\alpha_p$  може бути визначена на основі вимірів тиску і відповідної зміни питомого об'єму  $\Delta V_p$  в області пружних деформацій при  $t = const$  і  $C_k^j = const$ . Питома теплоємність при постійному об'ємі дається виразом  $C_V = T_0(\partial s / \partial T)$ ,  $\hat{\sigma}_0 = \sigma^{\alpha\beta} \bar{i}_\alpha^0 \otimes \bar{i}_\beta^0$  - усереднений енергетичний тензор напружень і  $\hat{\varepsilon}_0 = \varepsilon_{\alpha\beta} \bar{i}_\alpha^0 \otimes \bar{i}_\beta^0$  - тензор деформації Гріна другого роду [12, 14] ( $\bar{i}_\alpha^0$  - контраваріантні вектори вихідної конфігурації). Крапкою між величинами позначено скалярний добуток (внутрішню згортку) відповідних величин.

З наведеного виразу випливає, що для його фізичної інтерпретації природно ввести наступні позначення:  $\hat{N} = \left[ \frac{\partial(\rho^{-1} \hat{\sigma})}{\partial \hat{\varepsilon}_0} \right]_{T, \{C_k^j\}}$  - тензор пружних

коефіцієнтів,  $d_{kl}^{ji} = \left( \frac{\partial \mu_k^j}{\partial C_l^i} \right)_{T, \{g_{\alpha\beta}\}, \{C_k^j \neq C_l^i\}}$  - коефіцієнти концентраційної залеж-

ності хімічних потенціалів компонент,  $\hat{a}_t = \left[ \frac{\partial(\rho^{-1} \hat{\sigma})}{\partial T} \right]_{\{g_{\alpha\beta}\}, \{C_k^j\}}$  - тензор коєфі-

цієнтів температурної залежності компонент тензора напружень,

$\hat{a}_{(c)k}^{(j)} = \left[ \frac{\partial(\rho^{-1} \hat{\sigma})}{\partial C_k^j} \right]_{T, \{g_{\alpha\beta}\}, \{C_k^j \neq C_l^i\}}$  - тензор концентраційної зміни напружень,

$a_{(t)k}^{(j)} = \left( \frac{\partial \mu_k^{(j)}}{\partial T} \right)_{\{g_{\alpha\beta}\}, \{C_k^j\}}$  - коефіцієнти температурної залежності хімічних

потенціалів. Тоді розклад (13) запишемо у вигляді

$$f = f_0 - s_0 t + \sum_j \sum_{k=1}^{K_j} \mu_k^{(j)0} c_k^{(j)} - \frac{C_V}{2T_0} t^2 + \frac{1}{2} \hat{N} :: \hat{\varepsilon}_0 \otimes \hat{\varepsilon}_0 + \sum_{j,i} \sum_{k,l} d_{kl}^{ji} c_k^{(j)} c_l^{(i)} + \hat{a}_t : \hat{\varepsilon}_0 t + \sum_j \sum_k \hat{a}_{(c)k} : \hat{\varepsilon}_0 c_k^{(j)} + \sum_j \sum_k a_{(t)k} : c_k^{(j)} t. \quad (11)$$

Якщо тепер підставити цей вираз у загальні формули рівнянь стану (7), то отримаємо рівняння стану

$$s = s_0 + \frac{C_V}{T_0} t + \hat{a}_t : \hat{\varepsilon}_0 + \sum_j \sum_k a_{(t)k}^{(j)} c_k^{(j)} + \frac{\partial \hat{a}_t}{\partial T} : \hat{\varepsilon}_0 t + \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{N}}{\partial T} :: \hat{\varepsilon}_0 \otimes \hat{\varepsilon}_0 + \sum_j \sum_k \frac{\partial \hat{a}_{(c)k}^{(j)}}{\partial T} : \hat{\varepsilon}_0 c_k^{(j)},$$

$$\hat{\sigma}_0 / \rho = \left( \hat{a}_t t + \sum_j \sum_k \hat{a}_{(c)k}^{(j)} c_k^{(j)} \right) : \hat{g}_{11} + \hat{N} :: \hat{g}_{11} \otimes \hat{\varepsilon}_0, \quad (12)$$

$$\mu_k^{(j)} = \mu_k^{(j)0} + a_{(t)k}^{(j)} t + \hat{a}_{(c)k}^{(j)} : \hat{\varepsilon}_0 + \sum_i \sum_l d_{kl}^{ji} c_l^{(i)} + \frac{\partial \hat{a}_t}{\partial c_k^{(j)}} : \hat{\varepsilon}_0 t + \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{N}}{\partial c_k^{(j)}} :: \hat{\varepsilon}_0 \otimes \hat{\varepsilon}_0 + \frac{\partial \hat{a}_{(c)k}^{(j)}}{\partial c_k^{(j)}} : \hat{\varepsilon}_0 c_k^{(j)},$$

де  $\hat{g}_{11} = \bar{i}_\alpha \otimes \bar{i}_\alpha \otimes \bar{i}_\alpha \otimes \bar{i}_\alpha$  - кульовий тензор [13].  $\hat{\sigma}_0$  має значення повного усередненого напруження. Перша частина в виразі  $\hat{\sigma}_0$  представляє вклад в повне напруження за рахунок відносної зміни питомого об'єму, обумовленого процесами тепломасопереносу, а також фазовими і хімічними перетвореннями компонент.  $\hat{N}$  - тензор четвертого рангу, компоненти якого є термомеханічними матеріальними характеристиками середовища. На відміну від загально прийнятих виразів для лінійних рівнянь стану [5], компоненти тензорів, що входять в рівняння стану (12), можуть бути функціями відносної насиченості середовища, концентрацій компонент та температури, що змінюються в результаті протікання процесу сушіння. Тензор повних напружень можна подати у вигляді [13]

$$\hat{\sigma}^{kl} = \hat{\sigma}_f^{kl} - \hat{P}_n \delta^{kl}, \quad (13)$$

де  $\hat{\sigma}_f^{kl}$  - тензор фіктивних напружень, що трактується як частина тензора середніх напружень  $\langle \sigma_0^{kl} \rangle_0$  в твердій фазі, що обумовлена механізмом передачі зусиль через контакти між зернами,

$$\hat{P}_n = \alpha_1 \hat{P}^{(1)} + \alpha_2 \hat{P}^{(2)}, \quad (14)$$

де  $\alpha_1, \alpha_2$  - об'ємні долі рідкої і газоподібної фаз.,  $\hat{P}^{(1)}, \hat{P}^{(2)}$  - істинні тиски фаз.

В досліді тиск  $\hat{P}_n$  вимірюється по п'єзометричних даних, а повне напруження по загальному навантаженню на суміш.

Представлення (13) вигідне при побудові рівнянь імпульсу фаз та дає можливість визначити тензор ефективних напружень через тензор ефективних деформацій пористого чи зернистого скелету. Компоненти  $P_n^{ij}$  тензора  $P_n$  в загальному випадку залежать як від тензора швидкостей деформації, так і нормального тиску. Визначення тензора напружень  $P_n^{ij}$  пов'язане з розв'язком задачі течії неперервної фази в системі. Якщо інтенсивність руху неперервної фази невисока і можна знехтувати інерційними силами в порівнянні з в'язкими, то тензор напружень  $\hat{P}_n$  переходить в тиск.

У випадку ізотропного матеріалу компоненти тензора пружних коефіцієнтів  $\hat{N}$  мають вигляд

$$N^{ij\alpha\beta} = \lambda g^{ij} g^{\alpha\beta} + \mu (g^{i\alpha} g^{j\beta} + g^{i\beta} g^{j\alpha}), \quad (15)$$

де  $\lambda, \mu$  - ефективні пружні коефіцієнти, які як і в анізотропному матеріалі, залежать від насиченості компонентів та температури. Вирази для них отримаємо, якщо врахуємо, що питомий термодинамічний потенціал Гельмгольца для ізотропного тіла залежить тільки від інваріантів тензора деформацій  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ .

Рівняння стану (7) представимо у вигляді

$$\hat{\sigma}_0 = \rho \left[ \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_1} \hat{g}^0 + 2 \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_2} \hat{\varepsilon}^0 + \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon_1^2} \hat{\varepsilon}_1 \hat{g}^0 \right]. \quad (16)$$

Запишемо їх для  $i = j$  ( $i = 1, 2, 3$ ) і просумуємо. Отримаємо

$\sigma_{kk} = 3 \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_1} + K \varepsilon_{kk}$ , де  $K$  - модуль об'ємного стиску. При рівновазі системи,

коли поверхневі і масові сили відсутні, зміна відносного питомого об'єму, обумовлена зміною температури і концентрації компонент системи і складає

$\varepsilon_{kk} = \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0}$ . Тут  $\nu$  - питомий об'єм системи після зміни температури і

концентрації компонент,  $\nu_0$  - питомий об'єм тієї ж системи при вихідних значеннях температури і концентрації. Для цього випадку з (16) при  $\sigma_{kk} = 0$

отримаємо  $\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_1} = -\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = -3K \left( \alpha_T t + \sum_k \sum_j a_{(c)k} c_k^{(j)} \right)$ , де  $\alpha_T, a_{(c)k}$  - коефі-

цієнти термічного і концентраційного розширення в інтервалі температур  $[T, T_0]$  і концентрації компонент  $[C_k^{(j)}, C_{k0}^{(j)}]$ .

Вираз  $N^{ij\alpha\beta}$  отримаємо у вигляді (15), якщо прийнемо, що

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_2} = \alpha_0 \mu^{(\sigma)} (1 - \omega) = \mu, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon_1^2} = \lambda, \quad \alpha_0 = 1 - \Pi$$

$$\rho \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_1} = (\alpha_0 \nu_f - 1) P_n - \alpha_0 \nu_f \left( \lambda_0^{(\sigma)} + \frac{2}{3} \mu_0^{(\sigma)} \right) \left( \alpha'_i t + \sum_{k=1}^{K_1} a_{(c)k}^0 c_k^{(0)} \right), \quad (17)$$

де  $\mu, \lambda$  - ефективні модулі пружності зернистого скелету, що залежать від структури і зв'язків між зернами (чим менша відносна доля скелету  $\alpha_0$ , тим при рівних інших параметрах повинні бути меншими модулі пружності),  $\lambda_0^{(\sigma)}, \mu_0^{(\sigma)}$  - модулі пружності Ламе зернини.  $\omega = \omega(\varepsilon, T, C_i)$  - функція відносного зсуву в області пластичних деформацій, що визначається на основі вимірів узагальнених деформацій  $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2(1+\nu)} \left[ (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ii})^2 + 6\varepsilon_{ij}^2 \right]^{0,5}$ ,

$i \neq j$ , ( $\nu$  - коефіцієнт Пуассона) і узагальнених напружень для простих випадків навантаження. Ці формули випливають із усереднення по об'єму і введення ефективних напружень [9, 14], де

$$a'_i = \sum_k a_{(t)k}, \quad \nu_f = \left( \lambda^{(\sigma)} + 2/3 \mu^{(\sigma)} \right) / \left( \lambda_0^{(\sigma)} + 2/3 \mu_0^{(\sigma)} \right) \left[ 1 + \mathcal{O} \left( \lambda^{(\sigma)} / \lambda_0^{(\sigma)}, \mu^{(\sigma)} / \mu_0^{(\sigma)} \right) \right] \quad (18)$$

Чим менше  $\nu_f$ , тим слабші зв'язки між зернами і тим легше переупаковуються зерна. Якщо  $\nu_f \ll 1$ , то пористі середовища м'які, якщо  $\alpha_0 \nu_f = 1$ , то середовища ідеально зцементовані. Величини  $\mu^{(\sigma)}, \lambda^{(\sigma)}, \nu_f$  зв'язують безпосередньо вимірювані в дослідах величини і розглядаються в якості характеристик пружного пористого середовища.

По аналогії з суцільними середовищами врахуємо, що  $G = \mu$  - модуль зсуву,  $K = (\lambda_0 + 2\mu_0/3) \nu_f \alpha_0 = \lambda + 2\mu/3$  - модуль об'ємного стиску. При цьому також  $\lambda = K - 2G/3$ . Тоді закон Гука набуде виду

$$\sigma^{\alpha\beta} = \left[ \left( K - \frac{2}{3} G \right) \varepsilon - K \left( \alpha'_i t + \sum_j \sum_k a_{(c)k}^{(j)} c_k^{(j)} \right) \right] g^{\alpha\beta} + 2G \varepsilon_{\delta\gamma} g^{\delta\alpha} g^{\gamma\beta} + (\alpha_0 \nu_f - 1) P_n. \quad (19)$$

Позначивши  $\alpha_0 \nu_f - 1 = \alpha_p$ , для останнього члена у виразі (19) запишемо

$$\alpha_p P_n = (\alpha_p P_n)_0 + \sum_{j=0}^2 \sum_{k=1}^{K_j} \left[ \frac{\partial (\alpha_p P_n)}{\partial \mathcal{C}_k^{(j)}} \right]_0 c_k^{(j)} + \left[ \frac{\partial (\alpha_p P_n)}{\partial T} \right]_0 t + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^2 \sum_{k=1}^{K_j} \left[ \frac{\partial^2 (\alpha_p P_n)}{\partial \mathcal{C}_k^{(j)} \partial T} \right]_0 c_k^{(j)} t. \quad (20)$$



Введемо ще такі позначення

$$\left[ \frac{\partial(\alpha_p P_n / \rho)}{\partial C_k^{(j)}} \right] = \hat{a}_{(c)k}^{(j)}, \quad k = \overline{1, K_j}; \quad \frac{\partial}{\partial T} [\alpha_p P_k^{(j)} / \rho] = K a_{(t)k}^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots;$$

$$P_{(n)} = \sum_j \alpha^{(j)} P^{(j)}; \quad P^{(j)} = \sum_{k=1}^{K_j} P_k^{(j)} = \sum_k \alpha_k^{(j)} P_k^{(j)0}, \quad j = 1, 2, \dots; \quad a_{(t)}^{(j)} = \sum_{k=1}^{K_j} a_{(t)k}^{(j)};$$

$$a_{(t)} = \sum_{j=0}^2 a_{(t)}^{(j)};$$

$P_k^{(j)0}$  - "істинний" тиск  $k$ -ої компоненти  $j$ -ої фази.

Значимо, що коли  $j = 1, k = \overline{1, K_1}$ , то  $c_k^{(1)}$  розуміється як відхилення концентрації компонент рідкої фази, а коли  $j = 2, k = \overline{1, K_2}$ , то - газоподібної фази. Тензори  $\hat{a}_{(c)k}^{(j)}$  визначають концентраційну зміну напружень ( $k = \overline{1, K_j}, j = 0, 1, 2$ ), а коефіцієнти  $a_t^{(0)}, a_t^{(1)}, a_t^{(2)}$  є коефіцієнтами температурного розширення твердої, рідкої і газоподібної фаз,  $a_t$  - ефективний коефіцієнт температурної залежності компонент тензора напружень.

У результаті закон Гука запишемо у вигляді

$$\sigma^{\alpha\beta} = \left[ \left( K - \frac{2}{3} G \right) \varepsilon - K \left( \alpha_t t + \sum_{j=0k=1}^2 \sum_{k=1}^{K_j} a_{(c)k}^{(j)} c_k^{(j)} \right) \right] g^{\alpha\beta} + 2G \varepsilon_{\delta\gamma} g^{\delta\alpha} g^{\gamma\beta} + (\alpha_p P_n)_0 g^{\alpha\beta}. \quad (21)$$

Якщо об'ємна доля скелету в капілярно-пористому матеріалі дорівнює  $\alpha_0 = 1 - \Pi$ , де  $\Pi$  - пористість, а рідка і газоподібні фази гомогенні, то вираз для тиску  $P_n$  можемо подати в формі  $P_n = \Pi [\alpha P^{(1)} + (1 - \alpha) P^{(2)}]$ ,  $\alpha, (1 - \alpha)$  - об'ємні долі фаз в порах. Якщо об'ємна доля скелету  $\alpha_0$  дорівнює одиниці, то  $P_n = 0$  і приходимо до закону Гука для твердого розчину [15]. З системи рівнянь (12) приходимо до наступних рівнянь стану для ізотропного тіла

$$s = s_0 + \left[ \frac{C_V}{T_0} - \frac{\partial(K\alpha_t)}{\partial T} \right] t - \sum_{j=0}^2 \sum_k a_{(t)k}^{(j)} c_k^{(j)} - \frac{\alpha_t K}{\rho} \varepsilon -$$

$$- \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial G}{\partial T} \varepsilon_2 + \frac{\partial(K - 2G/3)}{\partial T} \varepsilon^2 - \sum_j \sum_k \frac{\partial(K a_{(c)k})}{\partial T} \varepsilon c_k^{(j)} \right];$$

$$\mu_k^{(j)} = \mu_k^{(j)0} + a_{(t)k}^{(j)} t - \frac{K}{\rho} a_{(c)k}^{(j)} \varepsilon + \sum_i \sum_l d_{kl}^{ji} c_l^{(i)} +$$

$$+ \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial G}{\partial C_k^{(j)}} \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial(K - 2G/3)}{\partial C_k^{(j)}} \varepsilon^2 - \frac{\partial(K\alpha_t)}{\partial C_k^{(j)}} \varepsilon t - \frac{\partial(K a_{(c)k})}{\partial C_k^{(j)}} \varepsilon c_k^{(j)} \right] - \frac{1}{2} \sum_i \sum_\gamma n_{\gamma i} \frac{\partial c_{\gamma i}^{ji}}{\partial C_k^{(j)}}. \quad (22)$$

Рівняння (22) визначають співвідношення між компонентами тензора пружних коефіцієнтів та характеристик неперервної фази на міжфазні та внутріфазні взаємодії, за які відповідають ентропія та хімічний потенціал вологого пористого матеріалу.

Відзначимо, що у літературі [13] величину  $\partial c_{k\gamma}^{ji} / \partial C_k^{(j)} \equiv x_{k\gamma}$  називають ступенем повноти фазового переходу ( $i \neq j$ ) (хімічної реакції ( $i = j$ )) компоненти  $\gamma$  в компоненту  $k$ , тобто під величиною  $\delta c_{k\gamma}$  розуміється зміна концентрації компоненти  $\gamma$  внаслідок фазового або хімічного перетворення в компоненту  $k$ .

**Висновки:** Отримано рівняння стану деформівного пористого вологого середовища, які разом з балансовими співвідношеннями, є ключовими рівняннями для опису процесу сушіння пористих тіл.

1. *Гайвась Б.І., Гайвась І.В.* Математичне моделювання сил фазової взаємодії в вологому пористому середовищі з урахуванням фазових переходів // Вісник Державного університету "Львівська політехніка", Прикладна математика.- 1999. - № 364. – С. 148-155.
2. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т.1. -М: Наука, 1983. –528с.
3. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. – М: Изд-во Моск. Ун-та, 1978.-288с.
4. *Лыков А.В.* Массотеплоперенос в капиллярнопористых телах // Тепло и массообмен в капиллярнопористых телах. – Минск: Наука и техника, 1965. – С.3-27.
5. *Лыков А.В.* Тепло массообмен. Справочник. – М: Энергия, 1978. – 480 с.
6. *Дьярмати И* Неравновесная термодинамика. –М: Мир, 1974. -304 с.
7. *Николаевский В.Н., Горбунов А.Т., Зотов Г.А.* Механика насыщенных пористых сред. – М: Недра, 1970. – 335 с.
8. *Николаевский В.Н.* Механика пористых и трещиноватых сред. - М: Недра, 1984. – 232 с.
9. *Нигматуллин Р.И.* Основы механики гетерогенных сред. - М: Наука, 1978. – 336 с.
10. *Гиббс Д.В.* Термодинамика. Статистическая физика. –М: Наука, 1982. -584 с.
11. *Бурак Я.Й., Третьяк В.І., Чапля Є.Я.* До континуального термодинамічного опису деформівних твердих тіл.// Доповіді НАН України. – 1995. -№9. – С.24-27.
12. *Бурак Я.Й., Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю.* Континуально-термодинамічні моделі механіки твердих розчинів. – Київ: Наук.думка, 2006. – 272 с.
13. *Луцик П.П.* Уравнения теории сушки деформируемых твердых тел // Промышленная теплотехника. -1985, -т7, -№6. –С.8-20
14. *Де Гроот С.П., Мазур П.М.* Неравновесная термодинамика. –М: Мир, 1964. -456с.
15. *Чапля Є.Я.* Теорія твердих розчинів з локальними фазовими змінами. – Львів , 1995. Препрінт НАН У ЦММ ІППММ -№ 14-95.
16. *Пригожин И.* Введение в термодинамику необратимых процессов. – М: Изд-во иностр. лит., 1960. – 127 с.

Поступила 6.09.2010р.