

## Методика дослідження резонансних явищ у неферомагнітних електропровідних тілах канонічної форми за електромагнітної дії в режимі з імпульсним модулюючим сигналом

Роман Мусій<sup>1</sup>, Юзеф Шимчак<sup>2</sup>

<sup>1</sup> д. ф.-м. н., доцент, Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, e-mail: Musiy@polynet.lviv.ua

<sup>2</sup> ад'юнкт, Інститут математики та фізики Політехніки Опольської, вул. Любошицька, 3, Ополо, Польща, 45-370

*Записано вихідні співвідношення варіанта термомеханіки електропровідних тіл за дії імпульсних електромагнітних полів із модуляцією амплітуди, які є основою опису резонансних явищ у неферомагнітних електропровідних тілах канонічної форми. Ці співвідношення конкретизовано для тіл канонічної форми (шару, необмеженого циліндра та кулі), для яких сформульовано відповідні початково-крайові задачі термомеханіки та розроблено методику побудови їх розв'язків із використанням кубічної апроксимації ключових функцій за просторовою змінною й інтегрального перетворення Лапласа за часом. Як приклад приведено розв'язки задачі для циліндра за електромагнітної дії в режимі з імпульсним модулюючим сигналом і подано результати числового аналізу термомеханічної поведінки суцільного та порожнистого циліндрів за несучих частот сигналу, які знаходяться в околі та поза околom резонансних.*

**Ключові слова:** електромагнітне поле, імпульсна дія, резонансні частоти, інтенсивності напружень, несуча здатність.

**Вступ.** Резонансні явища широко використовують у багатьох пристроях сучасної техніки. Дослідженню таких явищ у механічних системах, які перебувають під дією силових, температурних та електромагнітних навантажень, присвячено багато наукових праць [1, 3, 4, 6, 7, 11, 13-15]. Зокрема, значна увага приділяється вивченню ефекту крайового резонансу у зв'язку з явищем концентрації електромагнітної та механічної енергії у скінченних тілах, яке використовується при функціонуванні сучасних електромагнітомеханічних, акустоелектричних і ультразвукових пристроїв.

У даній роботі досліджено закономірності термомеханічної поведінки неферомагнітних електропровідних тіл канонічної форми за електромагнітної дії в режимі з імпульсним модулюючим сигналом (РІМС) за використання несучої частоти, рівної резонансній. Для цього використано варіант теорії термомеханіки електропровідних тіл за дії імпульсних електромагнітних полів (ЕМП) із модуляцією амплітуди, запропонований у роботі [2]. Він включає математичні моделі кількісного опису у взаємозв'язку електромагнітних, теплових і механічних процесів у циліндричних і сферичних тілах, а також тілах із плоскопаралельними границями за врахування особливостей дії електромагнітного поля на електропровідне тіло для характерних типів модулюючого сигналу.

## 1. Вихідні співвідношення варіанта термомеханіки електропровідних тіл за дії імпульсних ЕМП

Розглядаємо імпульсні ЕМП, вектори напруженості магнітного поля  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  яких на поверхні електропровідного тіла подаємо виразами

$$\vec{H}(\vec{r}_0, t) = \vec{H}_0(\vec{r}_0, t) \equiv \vec{H}^0(\vec{r}_0, t) \cos(\omega t)$$

чи

$$\vec{H}(\vec{r}_0, t) = \vec{H}_0(\vec{r}_0, t) \equiv \vec{H}^0(\vec{r}_0, t) \sin(\omega t). \quad (1)$$

Тут  $\vec{H}^0(\vec{r}_0, t) = H_*(t) \vec{H}_0^*(\vec{r}_0)$  — модульована амплітуда;  $\vec{H}_0^*(\vec{r}_0)$  — амплітуда коливань несучої частоти сигналу,  $H_*(t)$  — функція імпульсного характеру, що описує закон зміни в часі сигналу, який модулює амплітуду електромагнітних коливань (амплітуду несучого режиму) та задовольняє умови  $H_*(t) \leq 1$ ,  $t \in [0, t_i]$ ,  $H_*(0) = 0$ ,  $H_*(t_i) = 0$ ;  $\omega$  — несуча кругова частота;  $t_i$  — час тривалості електромагнітної дії;  $\vec{r}$ ,  $\vec{r}_0$  — радіуси-вектори точок усередині та на поверхні електропровідного тіла.

Приймаємо, що величини  $\vec{H}_0^*(\vec{r}_0)$ ,  $H_*(t)$ ,  $\omega$ ,  $t_i$  є такі, що діюче імпульсне ЕМП належить до класу імпульсних «неруйнівних» ЕМП [8, 12, 16] з імпульсом, довжина якого менша від часток секунди ( $t \leq 0,1$  с), та з індукцією магнітного поля, що не перевищує 50 Тл ( $B_{\max} \leq 50$  Тл). Розглядаємо такі ЕМП, дія яких ще не приводить до виникнення ударних хвиль ( $H_{\max} \leq 10^7$  А/м, де  $H_{\max}$  — найбільше значення напруженості магнітного поля на поверхні тіла). Сформулюємо задачі математичної фізики для визначення теплових і механічних процесів в електропровідних тілах канонічної форми за такої електромагнітної дії.

За окреслених величин параметрів електромагнітної дії напруження та деформації, а також їх швидкості є настільки малі, що можна застосувати співвідношення лінійної теорії пружності та знехтувати впливом рухомості середовища на характеристики ЕМП. Процес деформування електропровідного тіла має динамічний характер, для якого властиві відомі особливості механічної поведінки деформованих тіл за динамічних та імпульсних силових і теплових навантажень (значення динамічних модулів пружності металів і їх сплавів мало відрізняються від статичних, а значення динамічної межі пружної деформації  $\sigma_d$  може зростати у 2-3 рази порівняно зі статичною межею пружної деформації  $\sigma_s$  і визначене експериментально для різних матеріалів залежно від швидкості деформування).

Розглядаємо ізотропні однорідні електропровідні неферомагнітні тіла, для яких електромеханічні та термоелектричні ефекти є неістотні. Приймаємо, що матеріальні рівняння електродинаміки мають вигляд  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ ,  $\vec{j} = \sigma_0 \vec{E}$ , де  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_*$ ,  $\mu = \mu_0 \mu_*$ ;  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$  — відповідно електрична та магнітна сталі;  $\epsilon_*$ ,  $\mu_*$  — відносні електрична та магнітна проникливості (сталі величини),  $\sigma_0$  — коефіцієнт електропровідності. За прийнятих припущень вплив імпульсного ЕМП із модуляцією амплітуди на процеси теплопровідності та пружного деформування в електропровідному тілі, як і для квазісталених ЕМП, враховується через зумовлені цим полем джоулеве

тепловиділення  $Q = \sigma_0 \vec{E} \cdot \vec{E}$  та пондеромоторну силу  $\vec{F} = \sigma_0 \mu \vec{E} \times \vec{H}$ . Ці фактори приводять до виникнення нестационарних температурних і механічних полів. Пондеромоторні моменти кручення ( $\vec{M}^* = \vec{M}_E^* + \vec{M}_M^*$ , де  $\vec{M}_E^* = \vec{P} \times \vec{E}$  — електричні моменти, а  $\vec{M}_M^* = \vec{M} \times \vec{B}$  — магнітні моменти;  $\vec{P} = \vec{D} - \epsilon \vec{E}$  та  $\vec{M} = \vec{B} / \mu_0 - \vec{H}$  — вектори поляризації та намагнічування відповідно) за рахунок паралельності векторів індукцій і напруженостей електричного та магнітного полів є рівні нулю. У такому наближенні за постійних характеристик матеріалу (зокрема, рівних середнім значенням у розглядуваному інтервалі зміни температур) вихідні співвідношення для визначення параметрів, що характеризують електромагнітні, теплові та механічні процеси в тілах за імпульсної електромагнітної дії, можна сформулювати у два етапи. На першому записуємо рівняння на визначення параметрів ЕМП і вирази для виробництва тепла та пондеромоторних сил, як функцій параметрів ЕМП. На другому етапі формуємо співвідношення, що описують зв'язок механічних та теплових параметрів за заданих початкових і граничних умов на температуру  $T$  та компоненти  $\sigma_{ij}$  тензора напружень  $\hat{\sigma}$ , в яких джерелами тепла й об'ємними силами є джоулеві тепловиділення та пондеромоторні сили, визначені на першому етапі. За відомих температури та компонент тензора напружень  $\hat{\sigma}$  аналізуємо величини, які характеризують досліджувані фізико-механічні процеси та їх особливості залежно від параметрів імпульсних електромагнітних навантажень, а з умови [6, 9]

$$\sigma_i = \sqrt{3I_2(\hat{\sigma}) - I_1^2(\hat{\sigma})} / \sqrt{2} \leq \sigma_d \quad (2)$$

( $\sigma_i$  — інтенсивність напружень;  $I_j(\hat{\sigma})$ ,  $j=1,2$  — інваріанти тензора напружень;  $\sigma_d$  — межа пружної деформації) визначаємо допустимі параметри імпульсного ЕМП, які забезпечують граничну несучу здатність розглядуваних тіл.

Розв'язування такої комплексної задачі, навіть для тіл простої геометричної конфігурації, пов'язане зі значними математичними труднощами. З метою використання наближених підходів до розв'язування сформульованих задач (зокрема, задачі термопружності) за ключові функції виберемо  $\vec{H}$ ,  $T$ ,  $\hat{\sigma}$ . Зазначимо, що формулювання прямих задач відносно цих ключових функцій дозволяє ефективно використати метод поліноміальної апроксимації розв'язків і суттєво підвищити їх точність.

На першому етапі, нехтуючи струмами зміщення та за відсутності вільних зарядів у тілі, на основі рівнянь Максвелла для неферромагнітного електропровідного тіла записуємо рівняння для визначення вектора напруженості магнітного поля  $\vec{H}$

$$\Delta \vec{H} - \sigma_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0, \quad \text{div } \vec{H} = 0 \quad (3)$$

і вирази для тепловиділення та пондеромоторної сили

$$Q \equiv Q_j = [\text{rot } \vec{H}(\vec{r}, t)]^2 / \sigma_0, \quad \vec{F} = \mu \text{rot } \vec{H}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t). \quad (4)$$

Рівняння (3) розв'язуємо за граничної умови (1) і початкової умови  $\vec{H}(\vec{r}, 0) = 0$  (відсутність поля в початковий момент часу  $t = 0$ ).

Для визначення параметрів, що описують термопружний стан тіла, за ключові функції вибрано температуру  $T$  та тензор напружень  $\hat{\sigma}$ . Приймаючи, що у початковий момент часу  $t = 0$  переміщення  $\vec{U}$  та швидкості  $d\vec{U}/dt$  дорівнюють нулю, а температура  $T$  дорівнює  $T_0$  [К], отримано початкові умови

$$T(\vec{r}, 0) = 0, \quad \sigma_{ik}(\vec{r}, 0) = 0, \\ \frac{1}{2G} \frac{\partial \hat{\sigma}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \left( \alpha \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} - \frac{\nu}{E} \frac{\partial \sigma_*(\vec{r}, t)}{\partial t} \right) \hat{\mathbf{I}} = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (5)$$

Тут  $T$  — відхилення температури від початкової  $T_0$ ;  $\sigma_* \equiv I_1(\hat{\sigma}) = \sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ ;  $G = E/[2(1+\nu)]$  — модуль зсуву;  $\alpha, \nu$  — коефіцієнти лінійного теплового розширення та Пуассона;  $E$  — модуль Юнга;  $\hat{\mathbf{I}}$  — одиничний тензор.

З огляду на співвідношення (4) температуру  $T$  та тензор напружень  $\hat{\sigma}$  подаємо у вигляді суми двох складників

$$T = T^Q + T^F, \quad \hat{\sigma} = \hat{\sigma}^Q + \hat{\sigma}^F, \quad (6)$$

де  $T^Q, \hat{\sigma}^Q$  і  $T^F, \hat{\sigma}^F$  — складники, зумовлені відповідно джоулевым теплом і пондеромоторними силами.

Відомо, що тіла, які перебувають під дією імпульсних «неруйнівних» ЕМП, нагріваються адіабатично — температура в точці визначається тільки кількістю енергії ЕМП, незворотно поглинутої у відповідному елементарному об'ємі тіла (джоулевым теплом) [8, 12, 16]. За таких умов температурне поле  $T^Q$  описується рівнянням  $\frac{\partial T^Q}{\partial t} = \frac{\kappa}{\lambda} Q$ , де  $\kappa, \lambda$  — коефіцієнти температуро- та теплопровідності.

Тому в розглядуваному випадку для складника температури  $T^Q$  маємо

$$T^Q(\vec{r}, t) = \frac{\kappa}{\lambda} \int_0^t Q(\vec{r}, t) dt. \quad (7)$$

Приймаємо, що тіло вільне від силового навантаження. Тоді з рівнянь термопружності для визначення компонент  $\sigma_{ik}^Q$  складника  $\hat{\sigma}^Q$  тензора напружень, зумовленого температурою  $T^Q$ , отримано систему рівнянь

$$\text{Def}(\text{Div } \hat{\sigma}^Q) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{1}{2G} \hat{\sigma}^Q + \left( \alpha T^Q - \frac{\nu}{E} \sigma_* \right) \hat{\mathbf{I}} \right], \quad (8)$$

яку розв'язуємо за початкових

$$\hat{\sigma}^Q(\vec{r}, 0) = 0, \quad \frac{\partial \hat{\sigma}^Q}{\partial t} = -\frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T^Q(\vec{r}, t)}{\partial t} \hat{\mathbf{I}} \quad \text{при } t = 0 \quad (9)$$

і граничних  $\hat{\sigma}^Q \cdot \vec{n} = 0$  при  $\vec{r} = \vec{r}_0$  умов. Тут  $\rho$  — густина матеріалу тіла;  $\vec{n}$  — вектор зовнішньої нормалі до поверхні тіла.

Під час визначення складників температури  $T^F$  і напружень  $\sigma_{ik}^F$ , зумовлених дією пондеромоторної сили, враховуємо, що термічне збурення в електропровідному тілі (викликане деформацією від динамічної силової дії — пондеромоторної сили  $\vec{F}$ , яка має імпульсний характер) є мале. Тому за час імпульсної електромагнітної дії процес деформування електропровідного тіла можна вважати адіабатичним, за якого приріст температури  $T^F$  визначається формулою [7, 10]

$$T^F = -[(3\lambda_* + 2\mu_*)\alpha\kappa T_0 \varepsilon_{kk}^F] / \lambda, \quad (10)$$

де  $\varepsilon_{kk}^F$  — перший інваріант тензора деформацій  $\hat{e}^F$ , зумовлених дією пондеромоторної сили;  $\lambda_*$ ,  $\mu_* \equiv G$  — ізотермічні коефіцієнти Ляме. Враховуючи, що у випадку адіабатичного деформування тіла закон Гука визначається співвідношенням  $\hat{\sigma}^F = 2\mu_* \hat{e}^F + \lambda_s \varepsilon_{kk}^F \hat{\mathbf{I}}$  [7, 10], де  $\lambda_s = \lambda_* + [(3\lambda_* + 2\mu_*)^2 \alpha\kappa T_0] / \lambda$  — адіабатичний коефіцієнт Ляме,  $\varepsilon_* = [(3\lambda_* + 2\mu_*)^2 \alpha^2 \kappa T_0] / [(\lambda_* + 2\mu_*)\lambda]$  — параметр зв'язаності полів деформації та температури, вираз для об'ємної деформації тіла записуємо у вигляді  $\varepsilon_{kk}^F = \sigma_{kk}^F / (3\lambda_s + 2\mu_*)$ . Тоді приріст температури  $T^F$  відносно початкової температури тіла  $T_0$  буде дорівнювати

$$T^F = -\frac{(3\lambda_* + 2\mu_*)\alpha\kappa T_0 \sigma_{kk}^F}{\lambda(3\lambda_s + 2\mu_*)} = -\frac{\alpha\kappa T_0}{[1 + 3\varepsilon_*(1-\nu)]/(1+\nu)]\lambda} \sigma_{kk}^F, \quad (11)$$

а компоненти складника  $\hat{\sigma}^F$  тензора напружень задовольняють рівняння

$$\text{Def}(\text{Div} \hat{\sigma}^F + \vec{F}) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{1}{2G} \hat{\sigma}^F - \frac{\nu\nu_*}{E} \sigma_{kk}^F \hat{\mathbf{I}} \right), \quad (12)$$

початкові умови

$$\hat{\sigma}^F(\vec{r}, 0) = 0, \quad \frac{\partial \hat{\sigma}^F(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t = 0 \quad (13)$$

і граничні умови  $\hat{\sigma}^F \cdot \vec{n} = 0$  при  $\vec{r} = \vec{r}_0$ ,  $t > 0$ . Тут  $\nu_* = 1 + [(1-\nu)(1-2\nu)\varepsilon_*] / \{\nu(1+\nu) \times [1 + 3\varepsilon_*(1-\nu)] / (1+\nu)\}$ .

Зауважимо, що діючи на рівняння (8) і (12) оператором несумісності  $\text{Ink}$  і враховуючи рівняння  $\text{Ink Def} \equiv 0$ , а також початкові умови (9) і (13) для тензорів  $\hat{\sigma}^Q$  та  $\hat{\sigma}^F$ , отримаємо  $\text{Ink} \hat{e}^Q = 0$  і  $\text{Ink} \hat{e}^F = 0$ , тобто за виконання рівнянь (8) і (12) умови неперервності деформацій виконуються тотожно.

Для моментів часу, більших за тривалість імпульсної дії  $t > t_i$ , температурне поле  $T^*(\vec{r}, t) = T^* = T^Q + T^F$  визначаємо з рівняння  $\Delta T^* - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T^*}{\partial t} = 0$  за початкової умови  $T^*(\vec{r}, 0) = T^Q(\vec{r}, t_i) + T^F(\vec{r}, t_i)$  та граничних умов, які відповідають конвективному теплообміну тіла з зовнішнім середовищем. Враховуючи висновки робіт [7, 10] про зникання динамічних ефектів за теплового удару та скінченної швидкості росту температури на поверхні тіл, поле напружень  $\hat{\sigma}^{T^*}$  знаходимо в квазістатичній постановці з системи рівнянь

$$\text{Div} \hat{\sigma}^{T^*} = 0, \quad \text{Ink} \left[ \frac{1+\nu}{E} \hat{\sigma}^{T^*} + \left( \alpha T^* - \frac{\nu}{E} \sigma_{\kappa\kappa}^{T^*} \right) \hat{\mathbf{I}} \right] = 0, \quad (14)$$

яка впливає зі співвідношень (8) за граничних умов  $\hat{\sigma}^{T^*} \cdot \vec{n} = 0$  на поверхні електропровідного тіла.

Для електропровідних тіл канонічної форми (шар, необмежені суцільний і порожнистий циліндри, порожниста та суцільна кулі) сформульовано математичні постановки одновимірних крайових задач термомеханіки у разі однорідної за координатами нестационарної електромагнітної дії. Для циліндрів сформульовано плоску осесиметричну задачу за заданих значень дотичної осьової компоненти  $H_z(r, t)$  вектора  $\vec{H}$ , а для куль — центральносиметричну задачу за заданих значень азимутальної компоненти  $H_\varphi(r, t)$  на відповідних граничних поверхнях, а для пластини — динамічну задачу у разі задання дотичної компоненти  $H_z(z, t)$  на лицевих поверхнях  $z = \pm h$ . Рівняння для визначення відповідної компоненти  $H_i$  вектора  $\vec{H}$  має вигляд

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{m}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) H_i - \sigma_0 \mu \frac{\partial H_i}{\partial t} = 0. \quad (15)$$

Тут  $i = y, m = 0, r \equiv z$  — для пластини;  $i = z, m = 1$  — для циліндрів;  $i = \varphi, m = 2$  — для куль. Початкова умова при  $t = 0$  за відсутності ЕМП в тілі буде:  $H_i(r, 0) = 0$ . Якщо функції  $H_i(r, t)$  відомі, то вирази для питомих густин джоулевих тепловиділень  $Q$  та пондеромоторної сили  $\vec{F}$  записуємо на основі формул (4). Складники температури  $T^Q$  та напружень  $\sigma_{ij}^Q$  визначаємо з системи рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^Q}{\partial t} &= \frac{\kappa}{\lambda} Q, \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\kappa}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \sigma_{rr}^Q - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \sigma_{rr}^Q}{\partial t^2} = \alpha \rho \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 T^Q}{\partial t^2} - \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial T^Q}{\partial r}, \\ \frac{\partial^2 \sigma_{\varphi\varphi}^Q}{\partial t^2} + \frac{2c_2^2}{1-\nu} \frac{p}{r^2} \sigma_{\varphi\varphi}^Q &= \frac{2c_2^2}{1-\nu} \frac{p}{r^2} \frac{\partial (r \sigma_{rr}^Q)}{\partial r} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \sigma_{rr}^Q}{\partial t^2} - \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{\partial^2 T^Q}{\partial t^2}, \\ \sigma_{zz}^Q &= \nu (\sigma_{rr}^Q + \sigma_{\varphi\varphi}^Q) - \alpha E T^Q, \quad \sigma_{\theta\theta}^Q \equiv \sigma_{\varphi\varphi}^Q \end{aligned} \quad (16)$$

за початкових умов

$$T^Q(r, 0) = 0, \quad \sigma_{jj}^Q(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{jj}^Q(r, 0)}{\partial t} = -\frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{\partial T^Q(r, 0)}{\partial t}. \quad (17)$$

Тут  $j \in \{x, y, z\}$ ;  $\kappa = 0$ ;  $l = 0$ ;  $r \equiv x$ ;  $\sigma_{rr}^Q = \sigma_{zz}^Q$ ;  $\sigma_{xx}^Q = \sigma_{yy}^Q = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{zz}^Q - \frac{\alpha E}{1-2\nu} T^Q$  —

для пластини та  $\sigma_{zz}^Q$  визначається з другого рівняння системи (16);  $j \in \{r, \varphi, z\}$ ;  $\kappa = 3$ ;  $l = 1$ ;  $p = 1$  — для циліндрів і розв'язки плоскої осесиметричної задачі знаходимо з 1-4 рівнянь системи (16);  $j \in \{r, \theta, \varphi\}$ ;  $\kappa = 4$ ;  $l = 2$ ;  $p = 2$  — для куль і розв'язки центральносиметричної задачі шукаємо на основі 1-3 та п'ятого рівнянь цієї системи.

У випадку адіабатичного деформування електропровідного тіла внаслідок дії пондеромоторної сили  $\vec{F}$  рівняння для знаходження температури  $T^F$  і напружень  $\sigma_{jj}^F$  будуть мати вигляд

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\kappa}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \sigma_{rr}^F - \frac{1}{c_1^2 (1 + \varepsilon_*)} \frac{\partial^2 \sigma_{rr}^F}{\partial t^2} = -\frac{n F_r}{(1-\nu)r} - \frac{\partial F_r}{\partial r}, \\ & \frac{\partial^2 \sigma_{\varphi\varphi}^F}{\partial t^2} + \frac{2c_2^2 p}{(1-\nu)r^2} \sigma_{\varphi\varphi}^F = \frac{2c_2^2}{1-\nu} \left[ \frac{p}{r^2} \frac{\partial (r \sigma_{rr}^F)}{\partial r} + \frac{F_r}{r} \right] + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \sigma_{rr}^F}{\partial t^2}, \\ & \sigma_{zz}^F = \nu (\sigma_{rr}^F + \sigma_{\varphi\varphi}^F), \\ & \sigma_{\theta\theta}^F \equiv \sigma_{\varphi\varphi}^F, \quad T^F - T_0 = -\varepsilon_* \frac{1-2\nu}{\alpha E} \cdot \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \frac{N_s^F}{1+\varepsilon_* 3(1-\nu)/(1+\nu)}, \end{aligned} \quad (18)$$

а початкові умови

$$T^F(r, 0) = 0, \quad \sigma_{jj}^F(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{jj}^F(r, 0)}{\partial t} = 0. \quad (19)$$

Тут  $j \in \{x, y, z\}$ ;  $\kappa = 0$ ;  $n = 0$ ;  $s = 0$ ;  $\sigma_{rr}^F = \sigma_{zz}^F$ ;  $\sigma_{xx}^F = \sigma_{yy}^F = (\nu \sigma_{zz}^F)/(1-\nu)$ ;  $N_0^F = \sigma_{zz}^F$  — для пластини;  $j \in \{r, \varphi, z\}$ ;  $\kappa = 3$ ;  $n = 2 - \nu$ ;  $p = 1$ ;  $s = 1$ ;  $N_1^F = (1+\nu)(\sigma_{rr}^F + \sigma_{\varphi\varphi}^F)$  — для циліндрів у випадку плоскої осесиметричної задачі;  $j \in \{r, \theta, \varphi\}$ ;  $\kappa = 4$ ;  $p = 2$ ;  $s = 2$ ;  $N_2^F = (1-\nu)/(1+\nu)(\sigma_{rr}^F + 2\sigma_{\varphi\varphi}^F)$  — для куль у випадку центральносиметричної задачі. Квазістатичні напруження  $\sigma_{jj}^{T^*}$ , зумовлені температурою  $T^* = T^Q + T^F$ , визначаємо з системи квазістатичної задачі термопружності, відповідної до системи (16). Записані вище рівняння для визначення напружень  $\sigma_{jj}^Q$  і  $\sigma_{jj}^F$  розв'язуємо за умови відсутності навантажень на поверхнях тіл.

## 2. Методика побудови розв'язків крайових задач

Розв'язки сформульованих вище задач, знайдені відомими методами, зокрема, з використанням інтегральних перетворень, мають вигляд багатократних функціональних рядів, які погано збігаються за умови імпульсної електромагнітної дії, що суттєво ускладнює їх числове аналізування.

Для ключових функцій  $\Phi = \{H_i, \sigma_{ik}^Q, \sigma_{ik}^F, T^*, \sigma_{ik}^*\}$  задач електродинаміки, теплопровідності та термопружності для циліндричних ( $i, k \in \{r, \varphi, z\}$ ), сферичних ( $i, k \in \{r, \theta, \varphi\}$ ) тіл і тіл із плоскопаралельними границями ( $i, k \in \{x, y, z\}$ ) використано апроксимацію їх розподілів многочленом третього степеня за відповідною координатною змінною  $\gamma$ .

Коефіцієнти апроксимаційних многочленів визначаються через інтегральні характеристики  $\Phi_s(\alpha_1, \alpha_2, t)$  ключових функцій (віднесені до відповідної елементарної площі), тобто

$$\Phi_s(\alpha_1, \alpha_2, t) = \frac{s+l+1}{r_1^{s+l+1} - r_0^{s+l+1}} \int_{r_0}^{r_1} \Phi(\alpha_1, \alpha_2, \gamma, t) \gamma^{s+l} d\gamma, \quad s=1,2 \quad (20)$$

та задані граничні значення  $\Phi^\pm(\alpha_1, \alpha_2, t)$  цих функцій чи відомі граничні умови стосовно них на граничних поверхнях. Тут  $\alpha_1 = x, \alpha_2 = y; l = -1; r_0 = 0, r_1 = h$  ( $h$  — товщина) — для шару з плоскопаралельними границями;  $\alpha_1 = \varphi, \alpha_2 = z; l = 0$  — для циліндричного тіла;  $\alpha_1 = \varphi, \alpha_2 = \theta; l = 1$  — для сферичного тіла;  $r_0$  і  $r_1$  — внутрішній і зовнішній радіуси порожнистих циліндра чи кулі;  $r_0 = 0$  і  $r_1 = R$  ( $R$  — радіус) — для суцільних циліндра та кулі.

Рівняння для визначення інтегральних характеристик  $\Phi_s(\alpha_1, \alpha_2, t)$  ( $s = 1, 2$ ) отримано шляхом множення вихідних рівнянь на  $\gamma^{s+1}$  та інтегрування по  $\gamma$  з урахуванням співвідношення (20). Таким чином, розв'язування крайових задач зведено до знаходження розв'язків відповідних задач Коші стосовно інтегральних характеристик.

Отримані системи звичайних диференціальних рівнянь за часовою змінною відносно інтегральних характеристик ключових функцій розв'язуємо з використанням перетворення Лапласа та теореми про згортку функцій.

Зокрема, у випадку порожнистого циліндра для інтегральних характеристик  $H_{is}(t), T_s^*(t)$  та  $\sigma_{rrs}^j(t)$  ( $j = Q, F$ ) ключових функцій отримано такі вирази

$$H_{is}(t) = \sum_{m=1}^2 \int_0^t [H_i^+(t-\tau)\Phi_{s1}^m + H_i^-(t-\tau)\Phi_{s2}^m] e^{p_m \tau} d\tau, \quad (21)$$

$$T_s^*(t) = \sum_{\alpha=1}^2 \int_0^t [T_1^*(t_1)R_{s1}^\alpha + T_2^*(t_1)R_{s2}^\alpha] e^{p_\alpha(t-\tau)} d\tau, \quad (22)$$

$$\sigma_{rrs}^j(t) = \sum_{\beta=1}^2 [2\lambda_\beta^3 + (d_1^{**} + d_4^{**})\lambda_\beta]^{-1} \int_0^t [N_{s1}^j(t-\tau) + N_{s2}^j(t-\tau)] \sin(\lambda_\beta \tau) d\tau. \quad (23)$$



Тут  $H_i^\pm(t)$  — задані довільні значення напруженості магнітного поля на поверхнях  $r = r_0$  і  $r = r_1$  порожнистого циліндра;

$$\begin{aligned} \Phi_{11}^m &= [d_3(p_m - d_6) + d_2 d_7] / d_{0m}; & \Phi_{12}^m &= [d_4(p_m - d_6) + d_2 d_8] / d_{0m}; \\ \Phi_{21}^m &= [d_7(p_m - d_1) + d_3 d_5] / d_{0m}; & \Phi_{22}^m &= [d_8(p_m - d_1) + d_4 d_5] / d_{0m}; \\ R_{11}^\alpha &= (p_\alpha - d_4^*) / d_{0\alpha}^*; & R_{12}^\alpha &= d_2^* / d_{0\alpha}^*; & R_{21}^\alpha &= d_3^* / d_{0\alpha}^*; & R_{22}^\alpha &= (p_\alpha - d_1^*) / d_{0\alpha}^*; \\ N_{11}^Q &= (\lambda_\beta^2 - d_4^{**}) W_1^Q; & N_{12}^Q &= d_2^{**} W_2^Q; & N_{21}^Q &= d_3^{**} W_1^Q; & N_{22}^Q &= (\lambda_\beta^2 - d_1^{**}) W_2^Q; \\ N_{11}^F(t) &= (\xi_\beta^2 - c_6^{**}) N_{1*}^F; & N_{12}^F(t) &= c_2^{**} N_{2*}^F; & N_{21}^F(t) &= c_5^{**} N_{1*}^F; \\ N_{22}^F(t) &= (\xi_\beta^2 - c_1^{**}) N_{2*}^F; & N_{1*}^F &= W_1^F(t); & N_{2*}^F &= W_2^F(t); \end{aligned}$$

$p_m, p_\alpha, \lambda_\beta, \xi_\beta$  — корені відповідних характеристичних рівнянь;  $T_s^*(t_1) = \int_r^{r_1} T^*(r, t_1) r^s dr$ ;

$$W_s^p(t) = \int_r^{r_1} W^p(r, t) r^s dr \quad (s=1, 2; p=Q, F); \quad W^Q = \alpha \rho \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 T^Q}{\partial t^2} - \frac{\alpha E l}{(1-\nu)r} \frac{\partial T^Q}{\partial r};$$

$$W^F = -\frac{nF_r}{(1-\nu)r} - \frac{\partial F_r}{\partial r}; \quad d_1 \div d_8, \quad d_1^* \div d_4^*, \quad d_1^{**} \div d_4^{**}, \quad c_1^{**} \div c_6^{**} \text{ — числові коефіцієнти,}$$

які визначаються через геометричні параметри тіл і фізико-механічні характеристики матеріалу.

Зауважимо, що запропонована методика суттєво спростила знаходження часткових розв'язків складників задач термомеханіки електропровідних тіл. Використання апроксимації ключових функцій кубічним поліномом дозволило побудувати аналітичні розв'язки динамічних задач термомеханіки електропровідних тіл канонічної форми в замкнутому вигляді на всьому часовому проміжку незалежно від характеру зміни в часі імпульсної електромагнітної дії.

### 3. Розв'язок крайової задачі для необмеженого циліндра за електромагнітної дії в РІМС

Із використанням запропонованої вище методики побудовано розв'язок задачі для необмеженого порожнистого циліндра за електромагнітної дії в РІМС, що задається на поверхні електропровідного тіла умовою (1). Така дія використовується для запобігання обледеніння систем, в інших функціональних пристроях для зняття небажаних чужорідних нашарувань і т. і. [1].

За модулюючу функцію  $H_*(t)$  у формулі (1) приймаємо функцію  $H_*(t) \equiv H_0(t) = \kappa(e^{-\beta_1 t} - e^{-\beta_2 t})$ , яка з достатньою точністю відображає характерну часову залежність для поширеного в практиці електромагнітного оброблення модулюючого імпульсного сигналу — він швидко зростає до максимального значення та

далі повільно спадає [5]. Тут  $\beta_1, \beta_2$  — параметри, що характеризують часи фронтів наростання  $t_{iner}$  і спадання  $t_{decr}$  імпульсу, які пов'язані з часом тривалості імпульсу  $t_i$  рівністю  $t_i = t_{iner} + t_{decr}$ ;  $\beta_1 = (re^{-t_{iner}})/(1 - e^{-rt_{iner}})$ , де величину  $r$  за заданої точності  $\varepsilon = 10^{-m}$  заникання до нуля експоненти  $e^{-\beta_1 t}$  визначаємо як  $r = (m \ln 10)/t_i$ ;  $\beta_2 = \beta_1 + r$ ;  $\kappa = 1/(e^{-\beta_1 t_{iner}} - e^{-\beta_2 t_{iner}})$  — нормувальний множник. При цьому  $\beta_2 > \beta_1$ , що забезпечує згадану часову залежність модулюючого імпульсу. Нехай амплітуда  $\vec{H}_*^0(\vec{r}_0)$  несучого сигналу дорівнює  $H_0$ .

Приймаючи у виразі (21) для інтегральної характеристики  $H_{zs}(t)$  осрової компоненти  $H_z(r, t)$  вектора  $\vec{H}$  значення функцій  $H_i^\pm(t)$  рівні

$$H_0^\pm(t) = \kappa H_0 (e^{-\beta_1 t} - e^{-\beta_2 t}) \cos(\omega t), \quad (24)$$

інтегруючи співвідношення (21) за часом і враховуючи кубічне подання для шуканих розв'язків, компоненту  $H_z$  запишемо так

$$\frac{H_z(r, t)}{H_0} = \kappa \sum_{i=1}^4 \sum_{m=1}^2 \left\{ e^{-\beta_1 t} [C_{im}^1 \sin(\omega t) + C_{im}^2 \cos(\omega t)] + e^{-\beta_2 t} [C_{im}^3 \sin(\omega t) + C_{im}^4 \cos(\omega t)] + C_{im}^5 e^{p_m t} \right\} r^{i-1}. \quad (25)$$

Тут  $C_{im}^1 = B_{im} C_{1m}$ ;  $C_{im}^2 = B_{im} C_{2m}$ ;  $C_{im}^3 = B_{im} C_{3m}$ ;  $C_{im}^4 = B_{im} C_{4m}$ ;  $C_{im}^5 = B_{im} C_{5m}$ ;

$$C_{1m} = \omega / [(\beta_1 + p_m)^2 + \omega^2]; \quad C_{2m} = d_i - (\beta_1 + p_m) / [(\beta_1 + p_m)^2 + \omega^2];$$

$$C_{3m} = \omega / [(\beta_2 + p_m)^2 + \omega^2]; \quad C_{4m} = d_i + (\beta_2 + p_m) / [(\beta_2 + p_m)^2 + \omega^2];$$

$$C_{5m} = (\beta_1 + p_m) / [(\beta_1 + p_m)^2 + \omega^2] + (\beta_2 + p_m) / [(\beta_2 + p_m)^2 + \omega^2];$$

$$d_i = a_{i-1,3} + a_{i-1,4}; \quad B_{im} = a_{i-1,1} (\Phi_{11}^m + \Phi_{12}^m) + a_{i-1,2} (\Phi_{21}^m + \Phi_{22}^m).$$

Відповідно до формул (4) питомі густини джоулевого тепловиділення  $Q$  та пондеромоторної сили  $\vec{F} = \{F_r, 0, 0\}$  визначаємо зі співвідношень

$$\frac{Q(r, t)}{H_0^2} = \frac{\kappa^2}{\sigma_0} \sum_{i,j=2}^4 \sum_{m,n=1}^2 (i-1)(j-1) \varphi_{ijmn}(t) r^{i+j-4},$$

$$\frac{F_r(r, t)}{H_0^2} = -\kappa^2 \frac{\mu}{R} \sum_{i,j=2}^4 \sum_{m,n=1}^2 (i-1) \varphi_{ijmn}(t) r^{i+j-3}, \quad (26)$$

де

$$\varphi_{ijmn}(t) = E_{ijmn}^1 e^{-2\beta_1 t} + E_{ijmn}^2 e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} + E_{ijmn}^3 e^{-2\beta_2 t} + E_{ijmn}^4 e^{(p_m + p_n)t} +$$

$$+ \sin(2\omega t) [E_{ijmn}^5 e^{-2\beta_1 t} + E_{ijmn}^6 e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} + E_{ijmn}^7 e^{-2\beta_2 t}] +$$

$$\begin{aligned}
 & + \cos(2\omega t) \left[ E_{ijmn}^8 e^{-2\beta_1 t} + E_{ijmn}^9 e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} + E_{ijmn}^{10} e^{-2\beta_2 t} \right] + \\
 & + \sin(\omega t) \left[ E_{ijmn}^{11} e^{(p_m - \beta_1)t} + E_{ijmn}^{12} e^{(p_m - \beta_2)t} + E_{ijmn}^{13} e^{(p_n - \beta_1)t} + E_{ijmn}^{14} e^{(p_n - \beta_2)t} \right] + \\
 & + \cos(\omega t) \left[ E_{ijmn}^{15} e^{(p_m - \beta_1)t} + E_{ijmn}^{16} e^{(p_m - \beta_2)t} + E_{ijmn}^{17} e^{(p_n - \beta_1)t} + E_{ijmn}^{18} e^{(p_n - \beta_2)t} \right]; \\
 E_{ijmn}^1 & = (C_{im}^1 C_{jn}^1 + C_{im}^2 C_{jn}^2) / 2; \quad E_{ijmn}^2 = (C_{im}^4 C_{jn}^2) / 2; \quad E_{ijmn}^3 = (C_{im}^3 C_{jn}^3 + C_{im}^4 C_{jn}^4) / 2; \\
 E_{ijmn}^4 & = C_{im}^5 C_{jn}^5; \quad E_{ijmn}^5 = (C_{im}^1 C_{jn}^2 + C_{im}^2 C_{jn}^1) / 2; \\
 E_{ijmn}^6 & = (C_{im}^3 C_{jn}^2 + C_{im}^4 C_{jn}^1 + C_{im}^1 C_{jn}^4 + C_{im}^2 C_{jn}^3) / 2; \quad E_{ijmn}^7 = (C_{im}^3 C_{jn}^4 + C_{im}^4 C_{jn}^3) / 2; \\
 E_{ijmn}^8 & = (C_{im}^2 C_{jn}^2 - C_{im}^1 C_{jn}^1) / 2; \quad E_{ijmn}^9 = (C_{im}^4 C_{jn}^2 - C_{im}^3 C_{jn}^1 - C_{im}^1 C_{jn}^3 + C_{im}^2 C_{jn}^4) / 2; \\
 E_{ijmn}^{10} & = (C_{im}^4 C_{jn}^4 - C_{im}^3 C_{jn}^3) / 2; \quad E_{ijmn}^{11} = C_{im}^5 C_{jn}^1; \\
 E_{ijmn}^{12} & = C_{im}^5 C_{jn}^3; \quad E_{ijmn}^{13} = C_{im}^1 C_{jn}^5; \quad E_{ijmn}^{14} = C_{im}^3 C_{jn}^5; \quad E_{ijmn}^{15} = C_{im}^5 C_{jn}^2; \\
 E_{ijmn}^{16} & = C_{im}^5 C_{jn}^4; \quad E_{ijmn}^{17} = C_{im}^2 C_{jn}^5; \quad E_{ijmn}^{18} = C_{im}^4 C_{jn}^5.
 \end{aligned}$$

Формули для  $C_{jn}^1 \div C_{jn}^5$  отримуємо з виразів для  $C_{im}^1 \div C_{im}^5$  заміною індексів  $i \rightarrow j$ ,  $m \rightarrow n$ . Складник температури  $T^Q$  має вигляд

$$\frac{T^Q(r, t)}{H_0^2} = \kappa^2 \frac{\kappa}{\sigma_0 \lambda} \sum_{i,j=2}^4 \sum_{m,n=1}^4 (i-1)(j-1) \Phi_{ijmn}^T(t) r^{i+j-4},$$

де  $\Phi_{ijmn}^T(t) = \int_0^t \phi_{ijmn}(t) dt$ .

Підставляючи вирази температури  $T^Q$  та пондеромоторної сили  $\vec{F}$  у формулу (23), для інтегральних характеристик напружень  $\sigma_{rr}^Q(r, t)$  отримуємо

$$\begin{aligned}
 \frac{\sigma_{rr1}^Q(t)}{H_0^2} & = \frac{\kappa^2 \kappa \alpha E}{\sigma_0 \lambda (1-\nu)} \sum_{\beta=1}^2 \int_0^t \sum_{i,j=2}^4 \sum_{m,n=1}^2 (i-1)(j-1) \left\{ (1+\nu) \left[ \alpha_{ij}^2 (\lambda_\beta^2 - d_4^{**}) + d_2^{**} \alpha_{ij}^1 \right] \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \right. \\
 & - (i+j-4) \left[ \alpha_{4ij} (\lambda_\beta^2 - d_4^{**}) + d_2^{**} \alpha_{3ij} \right] \left. \right\} \Phi_{ijmn}^T(\tau) \frac{\sin \lambda_\beta (t-\tau)}{2\lambda_\beta^3 + (d_1^{**} + d_4^{**}) \lambda_\beta} d\tau; \\
 \frac{\sigma_{rr2}^Q(t)}{H_0^2} & = \frac{\kappa^2 \kappa \alpha E}{\sigma_0 \lambda (1-\nu)} \sum_{\beta=1}^2 \int_0^t \sum_{i,j=2}^4 \sum_{m,n=1}^2 (i-1)(j-1) \left\{ (1+\nu) \left[ \alpha_{ij}^0 (\lambda_\beta^2 - d_4^{**}) + d_3^{**} \alpha_{ij}^1 \right] \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \right. \\
 & - (i+j-4) \left[ \alpha_{2ij} (\lambda_\beta^2 - d_1^{**}) + d_3^{**} \alpha_{3ij} \right] \left. \right\} \Phi_{ijmn}^T(\tau) \frac{\sin \lambda_\beta (t-\tau)}{2\lambda_\beta^3 + (d_1^{**} + d_4^{**}) \lambda_\beta} d\tau;
 \end{aligned}$$

інтегральні характеристики напружень  $\sigma_{rr}^F(r, t)$  подаються виразом

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{rr1}^F(t)}{H_0^2} &= \kappa^2 \mu \sum_{\beta=1}^2 \int_0^t \sum_{i,j=1}^4 \sum_{m,n=1}^2 (i-1) \left[ \frac{2-\nu}{1-\nu} - (i+j-3) \right] \left[ (\xi_\beta^2 - c_6^{**}) \alpha_{2ij} + c_2^{**} \alpha_{2ij} \right] \times \\ &\times \varphi_{ijmn}(\tau) \frac{\sin \xi_\beta(t-\tau)}{2\xi_\beta^3 + (c_1^{**} + c_6^{**}) \xi_\beta} d\tau; \\ \frac{\sigma_{rr2}^F(t)}{H_0^2} &= \kappa^2 \mu \sum_{\beta=1}^2 \int_0^t \sum_{i,j=1}^4 \sum_{m,n=1}^2 (i-1) \left[ \frac{2-\nu}{1-\nu} - (i+j-3) \right] \left[ (\xi_\beta^2 - c_1^{**}) \alpha_{2ij} + c_5^{**} \alpha_{2ij} \right] \times \\ &\times \varphi_{ijmn}(\tau) \frac{\sin \xi_\beta(t-\tau)}{2\xi_\beta^3 + (c_1^{**} + c_6^{**}) \xi_\beta} d\tau, \end{aligned}$$

$$\text{а радіальні напруження — } \sigma_{rr}^p(r, t) = \sum_{\kappa=1}^4 \left[ c_{\kappa-1,1}^p \sigma_{rr}^p(t) + c_{\kappa-1,2}^p \sigma_{rr}^p(t) \right] r^{\kappa-1} \quad (p = Q, F).$$

#### 4. Результати числового аналізу

З аналізу виразів для радіальних напружень  $\sigma_{rr}$  у циліндрі встановлено, що за частоти ЕМП  $\omega = \omega_{*j} \approx \omega_r / 2$  (тут  $\omega_r$  — частота власних механічних коливань циліндра,  $j$  — номер резонансної частоти) значно зростають рівні складників напружень  $\sigma_{ik}^F$  порівняно зі складниками напружень  $\sigma_{ik}^Q$ . Такі частоти ЕМП за аналогією з індукційним нагріванням усталеним ЕМП будемо називати резонансними [3, 11, 14].

Виконано кількісний аналіз отриманого розв'язку розглянутої крайової задачі залежно від параметрів імпульсного модулюючого сигналу  $H_*(t)$  та несучої частоти  $\omega$  коливань. Числові дослідження проведено для таких параметрів імпульсно-модулюючого сигналу:  $t_{iner} = 0,1 t_i$  (при цьому  $\beta_2 = 2\beta_1$ ;  $\kappa = 4$ ),  $t_i = 10^{-4}$  с ( $\beta_1 = 69000$ ) і  $t_i = 10^{-3}$  с ( $\beta_1 = 69000$ ), що відповідають параметрам імпульсних ЕМП, які використовуються в технічних пристроях [1].

Як приклад на рис. 1-5 подано результати досліджень термомеханічної поведінки електропровідних порожнистого (з внутрішнім  $r_0 = 8$  мм і зовнішнім  $r_1 = 10$  мм радіусами) та суцільного ( $R = 10$  мм) циліндрів, виготовлених зі сталі X18N9T за тривалостей імпульсу  $t_i = 10^{-4}$  с;  $10^{-3}$  с. Рис. 1-2 показують зміну в часі колових напружень  $\sigma_{\varphi\varphi}^Q$  та  $\sigma_{\varphi\varphi}^F$  у порожнистому (рис. 1) і суцільному (рис. 2) циліндрах за частоти несучого сигналу  $\omega \neq \omega_{*j}$  ( $\omega = 628$  КГц). Колові напруження  $\sigma_{\varphi\varphi}^Q$  у порожнистому циліндрі в декілька разів більші від напружень  $\sigma_{\varphi\varphi}^F$ , а в суцільному — вони однакового порядку. При  $\omega \neq \omega_{*j}$  величина  $T^F$  в обох циліндрах є нехтовно мала порівняно з величиною  $T^Q$ . Рис. 3 ілюструє зміну в часі при  $\omega = \omega_{*1}$  колових напружень у порожнистому циліндрі ( $\omega_{*1} = 4,87$  МГц). Встановлено, що в обох

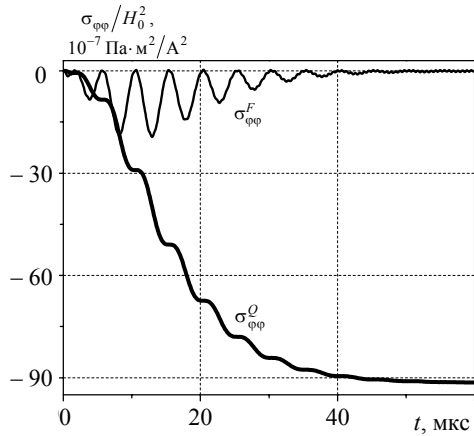


Рис. 1. Динаміка колових напружень  $\sigma_{\phi\phi}$  в порожнистому циліндрі за частоти  $\omega \neq \omega_{*1}$

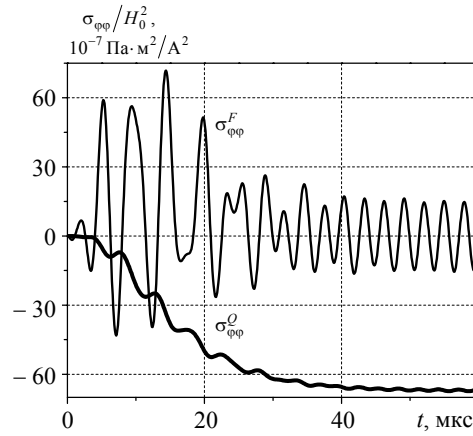


Рис. 2. Динаміка колових напружень  $\sigma_{\phi\phi}$  у суцільному циліндрі за частоти  $\omega \neq \omega_{*1}$

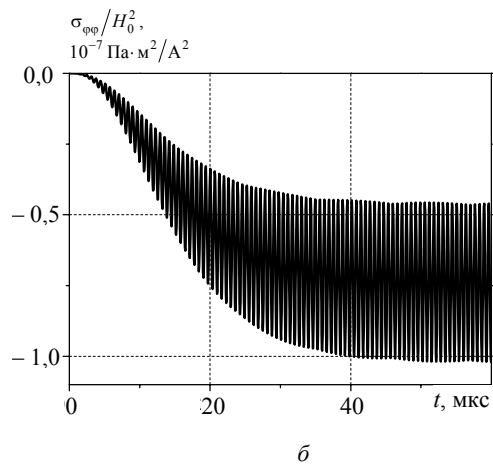
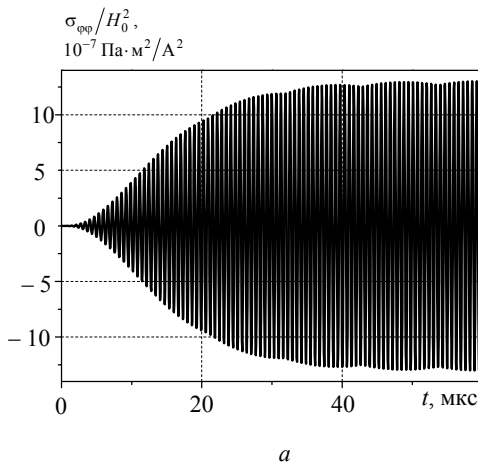


Рис. 3. Динаміка колових напружень  $\sigma_{\phi\phi}^F$  та  $\sigma_{\phi\phi}^Q$  в порожнистому циліндрі за частоти  $\omega = \omega_{*1}$

циліндрах напруження  $\sigma_{\phi\phi}^F$  на порядок більші від напружень  $\sigma_{\phi\phi}^Q$ , а температура  $T^F$  складає 10-15 % від  $T^Q$ . Залежність максимальних значень інтенсивності напружень у порожнистому (штрихові лінії) та суцільному (суцільні лінії) циліндрах при  $\omega = \omega_{*1}$  від величини  $H_0$  за тривалостей електромагнітної дії в РІМС  $t_i = 10^{-4}$  с (криві 1) і  $t_i = 10^{-3}$  с (криві 2) показано на рис. 4. Бачимо, що інтенсивності напружень досягають межі пружності  $\sigma_d = 300$  МПа за тривалості дії в РІМС  $t_i = 10^{-3}$  с при  $\omega = \omega_{*1}$  за величин  $H_0$  відповідно рівних  $H_0 = 2 \cdot 10^5$  А/м — для порожнистого та  $H_0 = 6 \cdot 10^5$  А/м — суцільного циліндрів. Рис. 5 показує амплітудно-частотні характеристики (АЧХ) інтенсивності напружень у суцільному (криві 1) і порожнистому (криві 2) циліндрах. Рис. 5а відповідає тривалості дії  $t_i = 10^{-4}$  с, а рис. 5б —  $t_i = 10^{-3}$  с. В обох циліндрах максимальні значення інтенсивності напружень при  $\omega = \omega_{*1}$  приблизно удвічі більші від значень при  $\omega = \omega_{*2}$ . Максимальні значення інтенсивності

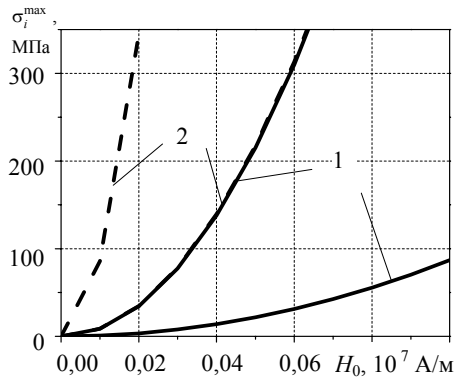


Рис. 4. Залежність максимальних значень інтенсивності напружень у порожнистому та суцільному циліндрах (криві 1 і 2 відповідно) за частоти  $\omega = \omega_{*1}$  від величини  $H_0$

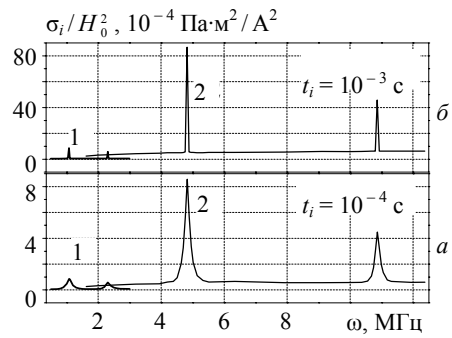


Рис. 5. Амплітудно-частотні характеристики інтенсивності напружень у суцільному (криві 1) і порожнистому (криві 2) циліндрах для  $t_i = 10^{-4}$  с (рис. а) та  $t_i = 10^{-3}$  с (рис. б)

напружень у порожнистому циліндрі є на порядок більші від таких же ж у суцільному циліндрі. Зі збільшенням тривалості імпульсу ширина околу резонансних частот  $\omega_{*j}$  ( $j = 1, 2$ ) звужується. Це узгоджується з відомими закономірностями АЧХ за індукційного нагрівання усталеним ЕМП [3, 11, 14].

**Висновки.** Виявлено нові закономірності термомеханічної поведінки електропровідних тіл канонічної форми й особливості їх несучої здатності за умов електромагнітної дії в РІМС. Основні з них є такі.

1. Якщо несуча частота сигналу  $\omega$ , відмінна від частот околу резонансних  $\omega_{*j}$ , то:

- у порожнистих електропровідних циліндричних і сферичних тілах складники напружень  $\sigma_{ij}^Q$  у декілька разів більші від складників напружень  $\sigma_{ij}^F$ ;
- у суцільних електропровідних циліндричних і сферичних тілах складники напружень  $\sigma_{ij}^Q$  і  $\sigma_{ij}^F$  є величини однакового порядку;
- температура  $T^F$  у суцільних та порожнистих циліндричних і сферичних тілах нехтовно мала порівняно з температурою  $T^Q$ ;
- за максимально можливих із технічної точки зору значень  $H_0$  ( $H_{0\max} = 10^5$  А/м) напруженості магнітного поля на поверхні тіла величина температури  $T^Q$  не перевищує декілька градусів К, а величина максимальних значень сумарних інтенсивностей напружень для різних неферомагнітних матеріалів значно менша, ніж допустима (що відповідає межі пружної деформації тіла);
- зі збільшенням часу тривалості електромагнітної дії з РІМС за фіксованої частоти несучого сигналу максимальні значення температури та напружень зростають;

2. Якщо несуча частота  $\omega$  сигналу належить околу резонансних частот  $\omega_{*j}$ , то:

- рівні складників напружень  $\sigma_{ij}^F$  у суцільних та порожнистих циліндричних і сферичних тілах на порядок більші від рівнів напружень  $\sigma_{ij}^Q$ ;
- сумарні значення інтенсивності напружень за  $H_{0\max} \leq 10^5$  А/м можуть досягати межі пружності тіла;
- у розглядуваних електропровідних тілах канонічної форми, виготовлених зі сталі, максимальне значення складника температури  $T^F$  складає 10-25 % від максимального значення температури  $T^Q$ , а в тілах, виготовлених із міді,  $T^F$  може бути співмірним із  $T^Q$ ;
- для порожнистих циліндра та кулі (за дії магнітного поля на внутрішніх і зовнішніх поверхнях) максимальні значення інтенсивності напружень на порядок більші, ніж у суцільних. Ці значення за частоти несучого сигналу  $\omega = \omega_{*1}$  приблизно удвічі більші від таких же значень при  $\omega = \omega_{*2}$  та лінійно зростають зі збільшенням тривалості електромагнітної дії в РІМС;
- зі збільшенням тривалості дії зменшується величина околу резонансних частот за збільшення амплітуд, що узгоджується з відомими закономірностями АЧХ за умови індукційного нагрівання електропровідного тіла усталеним ЕМП. Зі зменшенням тривалості дії в РІМС збільшується величина околу резонансних частот, але при цьому суттєво зменшуються максимальні значення інтенсивності напружень на резонансній частоті.

## Література

- [1] Батыгин Ю. В., Лавинский В. И., Хищенко Л. Т. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий — Харьков: МОСТ «Торнадо», 2003. — 288 с.
- [2] Бурак Я. Й., Гачкевич О. Р., Мусий Р. С. Термопружність електропровідних тіл за умов дії імпульсних електромагнітних полів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2006. — Т. 49, № 1. — С. 75-84.
- [3] Гачкевич А. Р. Термомеханика электропроводных тел при действии квазиустановившихся электромагнитных полей. — Киев: Наук. думка, 1992. — 217 с.
- [4] Гачкевич А. Р., Мусий Р. С. Термомеханика электропроводных тел при воздействии неустановившихся электромагнитных полей. — Львов: 1993. — 54 с. (Препр. / АН Украины. Ин-т прикл. проблем механики и математики им. Я. С. Подстригача, 3-93).
- [5] Гачкевич А. Р., Мусий Р. С., Стасюк Г. Б. Температурные поля и напряжения в длинном полом электропроводном цилиндре при электромагнитном воздействии в режиме с модуляцией амплитуды при импульсном модулирующем сигнале // Теорет. и прикладная механика. — 2004. — Вып. 39. — С. 168-181.
- [6] Ионоу В. Н., Огибалов П. М. Напряжения в телах при импульсном нагружении. — Москва: Высшая шк., 1975. — 463 с.
- [7] Коваленко А. Д. Основы термоупругости. — Киев: Наук. думка, 1970. — 307 с.

- [8] *Кнопфель Г.* Сверхсильные импульсные магнитные поля. — Москва: Мир, 1972. — 392 с.
- [9] *Орленко Л. П.* Поведение материалов при интенсивных динамических нагрузках. — Москва: Машиностроение, 1964. — 168 с.
- [10] *Новацкий В.* Теория упругости. — Москва: Мир, 1975. — 872 с.
- [11] *Термоупругость* электропроводных тел / Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Гачкевич А. Р., Чернявская Л. В. — Киев: Наук. думка, 1977. — 247 с.
- [12] *Сильные и сверхсильные магнитные поля и их применение* / Под ред. Херлаха Ф. — Москва: Мир, 1988. — 456 с.
- [13] *Фізико-математичне моделювання складних систем* / Я. Бурак, Є. Чапля, Т. Нагірний та ін.; під ред. Я. Бурака, Є. Чаплі. — Львів: СПОЛОМ, 2004. — 264 с.
- [14] *Gaczkiewicz A., Kasperski Z.* Modele i metody matematyczne w zagadnieniach brzegowych termomechaniki ciał przewodzących. — Opole: OWPO, 1999. — 367 s.
- [15] *Maugin G. A., Eringen A. C.* Deformable magnetizable saturated media. Part 2. Constitutive theory // *Ibid.* — 1972. — Vol. 13. — P. 1334-1347.
- [16] *Moon F. O.* Problem in magneto-solid mechanics // *Mechanics Today.* — 1978. — Vol. 4. — P. 307-309.

## **The methodology of investigation of resonance phenomena in nonferromagnetic electroconductive solids of canonical form under electromagnetic action with impulse modulating signal**

Roman Musij, Yuzef Shymchak

*The resulted correlations of the variant of electroconductive solids thermomechanics under the effect of impulse electromagnetic fields with amplitude modulation which are the bases of the description of resonance phenomena in nonferromagnetic electroconductive solids of canonical form have been recorded. For the solids of canonical form — a layer with plane-parallel borders, a sphere and an infinite cylinder — the corresponding initial boundary-value problems have been formulated and the methodology of their solutions construction using cubical approximation of key functions according to space variable and integral Laplace transformation by time has been developed. For the cylinder the solution of the problem under the effect of electromagnetic action with impulse modulating signal has been shown and the results of numerical analysis of thermomechanical behaviour of the solid and the hollow cylinders at the nonresonance and resonance frequency of carrying signal have been shown.*

*The new principles of resonance effect in electroconductive solids of canonical form under the effect of the considered electromagnetic action have been revealed.*



**Методика исследования резонансных явлений  
в неферромагнитных электропроводных телах  
канонической формы при электромагнитном воздействии  
в режиме с импульсным модулирующим сигналом**

Роман Мусий, Юзеф Шимчак

*Записаны исходные соотношения варианта термомеханики электропроводных тел при воздействии импульсных электромагнитных полей с модуляцией амплитуды, которые являются основанием описания резонансных явлений в неферромагнитных электропроводных телах канонической формы при электромагнитном воздействии в режиме с импульсным модулирующим сигналом. Эти соотношения конкретизированы для тел канонической формы (слоя, длинного цилиндра и шара), для которых сформулированы соответствующие начально-краевые задачи термомеханики и разработана методика построения их решений с использованием кубической аппроксимации ключевых функций по пространственной переменной и интегрального преобразования Лапласа по времени. В качестве примера приведены решения задачи для цилиндра при электромагнитном воздействии в режиме с импульсным модулирующим сигналом, а также результаты численного анализа термомеханического поведения сплошного и полого цилиндров при несущих частотах сигнала, которые находятся в окрестности и вне окрестности резонансных.*

Отримано 24.06.08