УДК 518.61.001.573

Обернені сингулярно збурені задачі типу «конвекція-дифузія» для двозв'язних областей

Андрій Бомба[1], Ігор Присяжнюк[2], Олена Фурсачик[3]

[1] д. т. н., професор, Рівненський державний гуманітарний університет, вул. Остафова, 31, Рівне, 33000, e-mail: abomba@mail.ru
[2] к. т. н., доцент, Рівненський державний гуманітарний університет, вул. Остафова, 31, Рівне, 33000, e-mail: igor_pri@mail.ru
[3] Національний університет водного господарства та природокористування, вул. Соборна, 11, Рівне, 33000, e-mail: yatsuko@mail.ru

Побудовано асимптотичне розвинення розв'язків сингулярно збурених крайових задач типу «конвекція-дифузія» з невідомим коефіцієнтом дифузії, який залежить від координат двозв'язної області. При побудові алгоритму використано перехід від вихідної постановки конвективно-дифузійної задачі у криволінійній двозв'язній області до періодичної задачі стосовно відповідної області комплексного потенціалу. Наведено результати числових розрахунків.

Ключові слова: обернені задачі, сингулярні збурення, асимптотичні методи, двозв'язні області, конвекція-дифузія.

Вступ. У роботах [1, 2] розроблено асимптотичні методи розв'язування сингулярно збурених параболічних і еліптичних крайових задач з урахуванням різного рівня гладкості початкової та граничних умов, а також їх узгодженості у кутових (реброви́х) точках. У подальшому відповідні методи було модифіковано стосовно розв'язування задач конвективної дифузії під час фільтрації в криволінійних областях, обмежених лініями течії й еквіпотенціальними лініями, у випадках переважання конвективних складників процесу над дифузійними. Це приводить до появи у відповідному параболічному рівнянні малого параметра біля старших похідних [3]. Ці ж методи успішно застосовано і до розв'язування таких задач для багатозв'язних областей, обмежених еквіпотенціальними лініями (внутрішніми та зовнішніми гладкими замкненими контурами) [4-7]. В основі методики розв'язування таких задач лежить ідея переходу від координат фізичної області фільтрації до змінних відповідної області комплексного потенціалу.

У зазначених вище методах коефіцієнти, що входять у відповідні параболічні рівняння, вважали відомими функціями. Проте значний практичний інтерес мають задачі визначення параметрів процесів масоперенесення шляхом математичних розрахунків без проведення складних фізичних експериментів. Таким чином приходимо до необхідності розв'язування обернених задач. Дослідженню питань коректності, зокрема, стійкості розв'язку та можливості регуляризації такого роду задач, присвячені праці [8-11].

У пропонованій роботі йдеться про асимптотичне розвинення розв'язків задач типу «конвекція-дифузія», у яких невідомий коефіцієнт дифузії D залежить лише від фізичних координат двозв'язної області ($D = \varepsilon b(x, y)$).

1. Постановка задачі

Для області $G = G_z \times (0, \infty)$, де $z = x + iy$, G_z — двозв'язна криволінійна область (рис. 1*а*), обмежена двома замкненими гладкими контурами: $L_* = \{z: f_*(x, y) = 0\}$ — внутрішнім, $L^* = \{z: f^*(x, y) = 0\}$ — зовнішнім, розглядатимемо таку обернену модельну задачу процесу конвективної дифузії під час фільтрації в однорідному пористому середовищі

$$\varepsilon\left[\left(b(x,y)c'_x\right)'_x + \left(b(x,y)c'_y\right)'_y\right] - v_x(x,y)c'_x - v_y(x,y)c'_y = c'_t, \tag{1}$$

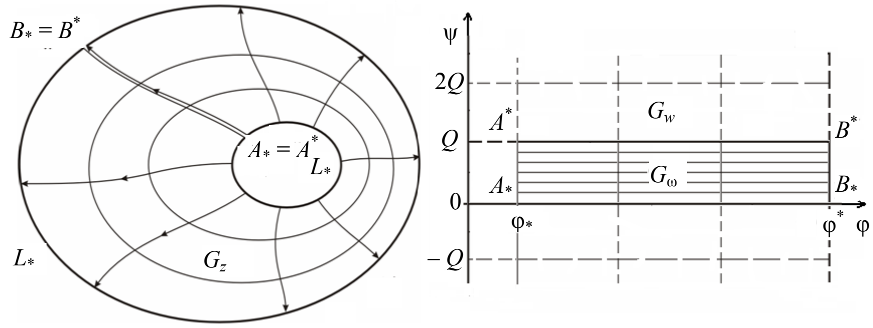
$$c\big|_{L_*} = c_*(M,t), \quad c\big|_{L^*} = c^*(M,t), \quad c(x,y,0) = c_0^0(x,y), \tag{2}$$

$$b(x,y)c'_t(x,y,0) = c_*^*(x,y), \quad (x,y) \in G_z, \tag{3}$$

$$(v_x, v_y) = \operatorname{grad}\varphi(x,y), \quad \Delta\varphi = 0, \quad \varphi\big|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi\big|_{L^*} = \varphi^*, \tag{4}$$

де $c(x, y, t)$ — концентрація розчиненої речовини у фільтраційній течії в точці (x, y) у момент часу t; M — біжуча точка відповідної кривої; $D(x, y) = \varepsilon \cdot b(x, y)$ — коефіцієнт дифузії, $b(x, y)$ — невідома достатньо гладка обмежена функція, ε ($\varepsilon > 0$) — малий параметр; φ, v_x, v_y — відповідно потенціал і компоненти швидкості фільтрації в пористому середовищі G_z.

Приймаємо, що задачу (4) шляхом конформного відображення $G_z \setminus \Gamma \to G_w$, розв'язано та знайдено поле швидкості $(v_x(x, y), v_y(x, y))$ [3]. Тут $\Gamma = A_*A^*B^*B_*$ — розріз двозв'язної області G_z уздовж однієї з ліній течії, а $G_w = \{w = \varphi + i\psi$: $\varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$ — відповідна G_z область комплексного потенціалу (рис. 1*б*), $Q = \int_{L^*} -v_y dx + v_x dy$ — повна фільтраційна витрата, $\psi = \psi(x, y)$ — функція течії (комплексно спряжена до $\varphi = \varphi(x, y)$). Тоді, здійснивши заміну змінних $x = x(\varphi, \psi)$,



а *б*

Рис. 1. Фізична двозв'язна область G_z та відповідна їй область комплексного потенціалу G_w

$y = y(\varphi, \psi)$ у рівнянні (1) та умовах (2), (3), приходимо в області $\tilde{G} = G_w \times (0, \infty)$ до відповідної періодичної (відносно змінної ψ) задачі дифузії

$$\varepsilon v^2(\varphi,\psi)\Big[a(\varphi,\psi)\big(u''_{\varphi\varphi}+u''_{\psi\psi}\big)+a'_{\varphi}(\varphi,\psi)u'_{\varphi}(\varphi,\psi)+$$

$$+a'_{\psi}(\varphi,\psi)u'_{\psi}(\varphi,\psi)\Big]-v^2(\varphi,\psi)u'_{\varphi}=u'_t, \tag{5}$$

$$u(\varphi,\psi,0)=u_0^0(\varphi,\psi), \quad u(\varphi_*,\psi,t)=u_*(\psi,t), \quad u(\varphi^*,\psi,t)=u^*(\psi,t), \tag{6}$$

$$a(\varphi,\psi)u'_t(\varphi,\psi,0)=u_*^*(\varphi,\psi), \tag{7}$$

де $u(\varphi,\psi,t)=c\big(x(\varphi,\psi),y(\varphi,\psi),t\big)$, $u_*(\psi,t)=c_*\big(x(\varphi_*,\psi),y(\varphi_*,\psi),t\big)$, $u_0^0(\varphi,\psi)= =c_0^0\big(x(\varphi,\psi),y(\varphi,\psi)\big)$, $a(\varphi,\psi)=b\big(x(\varphi,\psi),y(\varphi,\psi)\big)$, $u_*^*(\varphi,\psi)=c_*^*\big(x(\varphi,\psi),y(\varphi,\psi)\big)$, $u^*(\psi,t)=c^*\big(x(\varphi^*,\psi),y(\varphi^*,\psi),t\big)$, $v(\varphi,\psi)=v\big(x(\varphi,\psi),y(\varphi,\psi)\big)$ $\left(v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}\right)$.

2. Розв'язок задачі

Розв'язок рівняння (5) в області $\tilde{G} = G_w \times (0,\infty)$, де $G_{\tilde{w}} = \{w : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, -\infty < \psi < \infty\}$, з Q-періодично поширеними умовами (6), (7) із точністю $O(\varepsilon^{n+1})$ шукаємо у вигляді асимптотичних рядів

$$u(\varphi,\psi,t)=\left(u_0(\varphi,\psi,t)+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i u_i(\varphi,\psi,t)\right)+\sum_{i=0}^{n+1}\pi_i(\xi,\psi,t)\varepsilon^i+r(\varphi,\psi,t,\varepsilon), \tag{8}$$

$$a(\varphi,\psi)=a_0(\varphi,\psi)+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i a_i(\varphi,\psi)+r_a(\varphi,\psi,\varepsilon), \tag{9}$$

де $u_i(\varphi, \psi, t)$, $a_i(\varphi, \psi)$ ($i=\overline{0,n}$) — члени регулярної частини асимптотики, зокрема, $u_0(\varphi, \psi, t)$ — розв'язок відповідної виродженої задачі (конвективного перенесення), $u_i(\varphi, \psi, t)$ ($i=\overline{1,n}$) — поправки, які враховують вплив дифузії в даній області (за винятком деякої примежової ділянки), $\pi_i(\xi, \psi, t)$ — функції типу примежового шару в околі $\varphi = \varphi^*$ (поправки навколо виходу фільтраційної течії), $\xi = (\varphi^* - \varphi)\varepsilon^{-1}$ — відповідне регуляризуюче перетворення (розтягнена змінна), $r(\varphi, \psi, t, \varepsilon)$, $r_a(\varphi, \psi, \varepsilon)$ — залишкові члени.

У результаті підстановки розвинень (8) і (9) у співвідношення (5)-(7), виконання стандартної процедури прирівнювання коефіцієнтів біля однакових степенів ε і послідовного розв'язування відповідних задач отримаємо [5-7]

$$u_0(\varphi,\psi,t)=\begin{cases}u_*\big(\psi,t-f(\varphi,\psi)\big), & t\ge f(\varphi,\psi),\\ u_0^0\big(f^{-1}\big(f(\varphi,\psi)-t\big),\psi\big), & t<f(\varphi,\psi),\end{cases}$$

$$a_0(\varphi,\psi)=\frac{u_*^*(\varphi,\psi)}{u'_{0t}(\varphi,\psi,t)\Big|_{t=0}+\pi'_{0t}\left(\dfrac{\varphi^*-\varphi}{\varepsilon},\psi,t\right)\Bigg|_{t=0}},$$

$$\pi_0(\xi,\psi,t)=\left[u^*(\psi,t)-u_0(\varphi^*,\psi,t)\right]e^{-\frac{\xi}{a_0(\varphi^*,\psi)}},$$

$$a_0(\varphi^*,\psi)=\frac{u_*^*(\varphi^*,\psi)}{u_t^{*\prime}(\psi,t)}\Bigg|_{t=0},$$

$$u_k(\varphi,\psi,t)=\begin{cases}\displaystyle\int_{\varphi_*}^{\varphi}\frac{g_k\left(\tilde\varphi,\psi,t-f(\varphi,\psi)+f(\tilde\varphi,\psi)\right)}{v^2(\tilde\varphi,\psi)}d\tilde\varphi, & t\ge f(\tilde\varphi,\psi),\\ \displaystyle\int_0^t g_k\left(f^{-1}(f(\varphi,\psi)-t+\tilde t),\psi,\tilde t\right)d\tilde t, & t<f(\tilde\varphi,\psi),\end{cases}$$

$$g_k(\varphi,\psi,t)=v^2(\varphi,\psi)\left[\sum_{i=1}^{k}a_{k-i}(\varphi,\psi)\left(u''_{i\varphi\varphi}+u''_{i\psi\psi}\right)+a'_{(k-i)\varphi}(\varphi,\psi)u'_{i\varphi}+a'_{i\psi}(\varphi,\psi)u'_{i\psi}\right],$$

$$a_k(\varphi,\psi)=-\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{k}a_{k-i}(\varphi,\psi)\left[u'_{it}(\varphi,\psi,t)+\pi'_{it}\left(\frac{\varphi-\varphi^*}{\varepsilon},\psi,t\right)\right]}{u'_{0t}(\varphi,\psi,t)+\pi'_{0t}\left(\dfrac{\varphi-\varphi^*}{\varepsilon},\psi,t\right)}\Bigg|_{t=0},\quad k=\overline{1,n},$$

$$\pi_k(\xi,\psi,t)=\sum_{j=0}^{k+1}\alpha_{kj}(\varphi,\psi,t)\xi^j e^{-\frac{\xi}{a(\varphi^*,\psi)}},\qquad k=\overline{1,n+1},$$

де $f(\varphi,\psi)=\int\limits_{\varphi_*}^{\varphi}\dfrac{d\tilde\varphi}{v^2(\tilde\varphi,\psi)}$; f^{-1} — функція, обернена до f стосовно змінної φ; α_{kj} визначаємо через α_{ij} $(i<k)$ та граничні умови;

$$r(\varphi,\psi,t,\varepsilon)=\varepsilon^{n+1}q_n(\varphi,\psi,t,\varepsilon),\qquad r_a(\varphi,\psi,\varepsilon)=\varepsilon^{n+1}p_n(\varphi,\psi,\varepsilon),$$

де $q_n(\varphi, \psi, t, \varepsilon)$ і $p_n(\varphi, \psi, \varepsilon)$ визначаємо через відомі члени рядів (8) і (9).

3. Числові розрахунки

Наведемо результати розрахунку процесу типу «конвекція-дифузія» на ідеальному плоско-паралельному фільтраційному фоні, породженому двома особливими точками $z_1=0$ і $z_2=4$ (відповідно джерело та стік однакових інтенсивностей $Q_0=2\pi$), комплексний потенціал якого — $w=Q_0/(2\pi)\ln[(z-z_1)/(z-z_2)]$ для $\varphi_*=-3{,}7$, $\varphi^*=-1{,}7$, $L_*=\{z\colon \psi(x,y)=0\}$, $L^*=\{z\colon \psi(x,y)=2\pi\}$.

Зміну коефіцієнта $a(\varphi, \psi)$ для випадку $u_0^0(\varphi,\psi) = 0,3 + \left[3 + (\varphi + 3,7)^2\right]^{-1}$, $u_*(\psi, t) = 0,3 + e^t/3$, $u_*^*(\varphi,\psi) = 0,3 + e^{-\varphi}\left[3 + (\varphi + 3,7)^2\right]^{-1}$, $u^*(\psi, t) = 0,3 + e^t/7$ проілюстровано на рис. 2. Розподіл концентрації розчиненої речовини $u(\varphi, \psi, t)$ вздовж еквіпотенціальної лінії $\varphi = -3,433$ у момент часу $t = 0,1$ для $\varepsilon_1 = 0,0001$; $\varepsilon_2 = 0,001$; $\varepsilon_3 = 0,003$; $\varepsilon_4 = 0,005$ (криві 1-4 відповідно) зображено на рис. 3.

На рис. 4 зображено розподіли концентрації розчиненої речовини вздовж еквіпотенціальної лінії $\varphi = -2,633$ в моменти часу $t = 0,0019$; 0,072; 0,269 (рис. 4*а*, криві 1-3 відповідно), та вздовж лінії течії $\psi = 1,676$ у ці ж моменти часу (рис. 4*б*).

Криві на рис. 5 ілюструють зміну в часі концентрації розчиненої речовини у точках (– 3,567; 4,189), (– 2,9; 4,189), (– 2,5; 4,189), (– 2,367; 0,209), (– 2,367; 1,047) і (– 2,367; 4,189) (криві 1-6 відповідно).

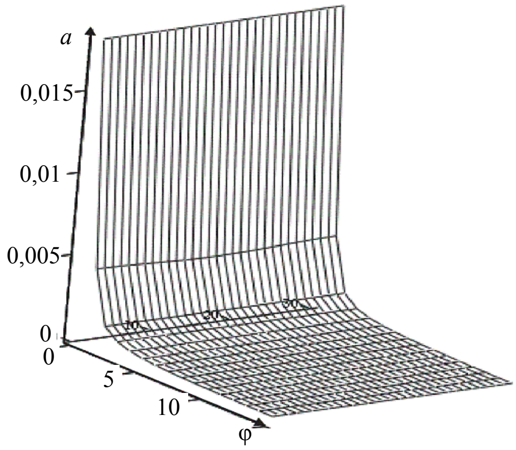


Рис. 2. Зміна шуканого коефіцієнта $a(\varphi, \psi)$ над областю комплексного потенціалу

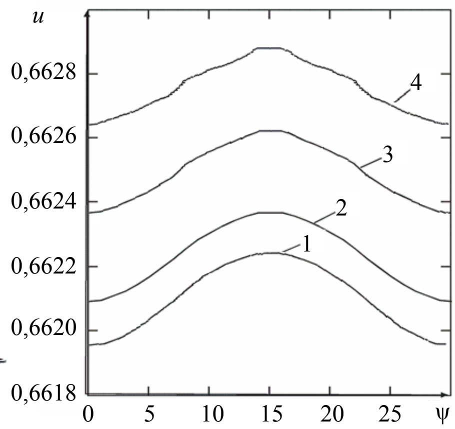


Рис. 3. Розподіл концентрації розчиненої речовини вздовж лінії $\varphi = -3,433$

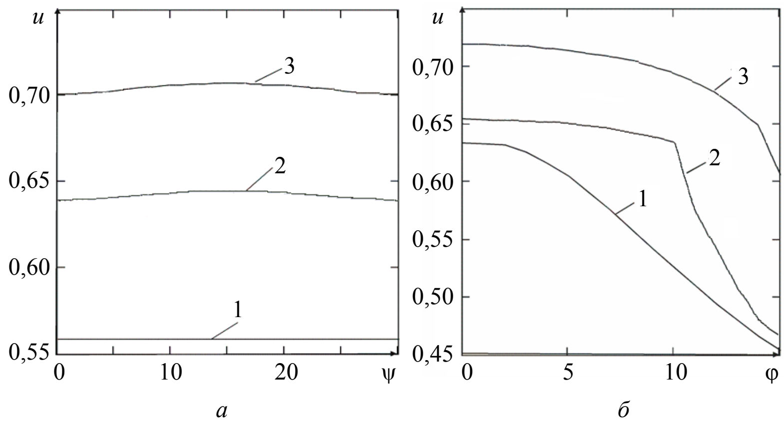


Рис. 4. Розподіл концентрації розчиненої речовини в фіксовані моменти часу

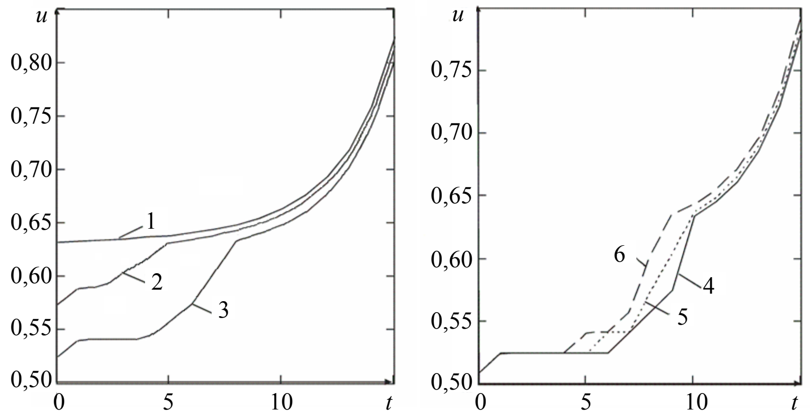


Рис. 5. Розподіл концентрації розчиненої речовини у часі

Висновок. Побудовано конструктивний алгоритм асимптотичного розв'язування сингулярно збурених задач типу «конвекція-дифузія» з невідомим коефіцієнтом дифузії, який залежить від координат двозв'язної області, у випадку достатньої гладкості та сильної узгодженості початкової і граничних умов й умови перевизначення. Підкреслимо, що запропонована модель і процедура побудови розв'язку є «досить чутлива» до умови перевизначення, а також початкової та граничних умов. Наприклад, різка зміна функції $u_*^*(\varphi,\psi)$ на вході фільтраційної течії (в околі $\varphi=\varphi_*$) приводить до відповідної «контрастності» складника $a = a(\varphi, \psi)$ коефіцієнта дифузії $D(x, y)$ (рис. 2). Також цим «різким перепадом» функції $u_*^*(\varphi,\psi)$, що характеризує швидкість зміни у часі початкової концентрації, пояснюється сильна розбіжність кривих 1-3 на рис. 5 на початковій стадії часу.

Література

[1] *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — Москва: Наука, 1973. — 273 с.

[2] *Вишик М. И., Люстерник Л. Я.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи математических наук. — 1957. — Т. 12, вып. 5. — С. 3-122.

[3] *Бомба А. Я.* Про асимптотичний метод розв'язання однієї задачі масопереносу при фільтрації в пористому середовищі // Укр. мат. журн. — 1982. — Т. 4, № 4. — С. 493-496.

[4] *Бомба А. Я. Присяжнюк І. М.* Задачі типу «конвекція-дифузія» у тризв'язних областях з умовами усереднення // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2005. — Т. 48, № 2. — С. 53-58.

[5] *Присяжнюк І. М.* Асимптотичний метод розв'язування сингулярно збурених крайових задач типу «конвекція-дифузія» у многозв'язних областях // Волинський математичний вісник. — 2003. — Вип. 10. — С. 118-128.

[6] *Скопецкий В. В., Бомба А. Я., Присяжнюк И. М.* Сингулярно возмущенные задачи типа «конвекция-диффузия» в многосвязных областях // Компьютерная математика. — 2004. — № 2. — С. 99-104.

[7] *Бомба А. Я., Фурсачик О. А.* Обернені сингулярно збурені задачі типу «конвекція-дифузія» // Волинський математичний вісник. — 2007. — Вип. 13. — С. 28-36.
[8] *Тихонов А. Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малый параметр при производных // УМН. — 1952. — Т. 7, вып. 1(47). — С. 140-142.
[9] *Иванчов Н. И.* Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении // Сиб. мат. журнал. — 1998. — Т. 39, № 3. — С. 539-550.
[10] *Іванчов М. І., Лучко І. Я.* Про одну обернену задачу знаходження коефіцієнтів параболічного рівняння // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 1990. — Вип. 34. — С. 7-10.
[11] *Лаврентьєв М. М.* О постановке некоторых некорректных задач математической физики // Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. — Новосибирск, 1966. — С. 258-276.

Inverse singular disturbed problems of «convection-diffusion» for a double-connected area

Andrii Bomba, Ihor Prysiazhniuk, Olena Fursachyk

The asymptotic expansion is constructed for solving singular disturbed boundary-value «convection-diffusion» problems with the unknown coefficient of diffusion which depends on physical coordinates of a double-connected area. Transition from the initial formulation of «convectional-diffusion» problems in curvilinear double-connected area to periodic task at the corresponding area complex potential is used to algorithm construction. The results of numerical calculations are given.

Обратные сингулярно возмущенные задачи типа «конвекция-диффузия» для двусвязных областей

Андрей Бомба, Игорь Присяжнюк, Елена Фурсачик

Построено асимптотическое развитие решений сингулярно возмущенных краевых задач типа «конвекция-диффузия» с неизвестным коэффициентом диффузии, зависящем от координат двухсвязной области. При построении алгоритма использовано переход от исходной постановки конвективно-диффузионной задачи в криволинейной двусвязной области к периодической задаче относительно соответствующей области комплексного потенциала. Приведены результаты численных расчетов.

Отримано 08.05.08