УДК 539.3

Енергетичні та термодинамічні аспекти математичного моделювання термомеханічних процесів у деформівних термопружних тілах з урахуванням дисипативних ефектів

Ярослав Бурак[1], Галина Мороз[2]

[1] д. ф.-м. н., професор, член-кор. НАНУ, Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАНУ, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: burak@cmm.lviv.ua
[2] к. ф.-м. н., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАНУ, вул. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: halynamoroz@yahoo.mail

Запропоновано енергетичний і термодинамічний підходи до побудови математичних моделей для опису термомеханічних процесів у пружних деформівних дисипативних системах. На цій основі отримано співвідношення як для опису локального термодинамічного стану, так і дисипативних процесів, які є базовими для постановки та розв'язування відповідних крайових задач.

Ключові слова: повний енергетичний функціонал Гамільтона, термодинамічний опис, термопружна система, дисипативні процеси.

Вступ. Для опису механічних і теплових процесів у термопружних системах у літературі використовують підходи й методи механіки деформівного твердого тіла та термодинаміки нерівноважних процесів [1, 5-7, 9-11]. Визначальні рівняння стану встановлюються на основі принципу локальної термодинамічної рівноваги фізично малих підсистем. Сформульовані варіаційні принципи для задач термопружності є узагальнення варіаційних принципів Лагранжа та Кастильяно для ізотермічної теорії пружності [8].

Для побудови математичних моделей нелінійної механіки пружних систем в ізотермічних умовах деформування можна ефективно використовувати також енергетичний підхід [2]. Тоді у простір параметрів локального стану (локальної ситуації) окрім тензора градієнта місця додатково вводять вектор силового імпульсу — характеристику інерційного стану фізично малої підсистеми. За таким підходом, зокрема, природно сформульовано варіаційну постановку крайових задач нелінійної теорії пластин на основі повного функціонала Гамільтона [2].

Функціонал Гамільтона, за допомогою якого сформульована варіаційна постановка крайових задач нелінійної термопружності, наведено у роботі [3].

Енергетичний підхід до термодинамічного опису приповерхневих явищ у термопружних тілах і встановлення стаціонарного стану розглянуто у роботі [4]. У розвиток одержаних там результатів у даній роботі запропоновано поєднання як енергетичного (з використанням повного функціоналу Гамільтона) [3], так і термодинамічного (на основі принципу локальної термодинамічної рівноваги та мінімуму виникнення ентропії) [5, 7, 8] підходів для опису термомеханічних процесів у деформівних дисипативних системах. На цій основі отримано фізичні співвідношення локального термодинамічного стану та рівняння для опису відповідних дисипативних процесів. Одержані результати є базові для постановки та розв'язування відповідних крайових задач термомеханіки.

1. Енергетичний опис моделі

Розглядаємо термопружне тверде тіло $K_* \bigcup \partial K_*$, яке у вихідній (відліковій) конфігурації ($t < t_1$) ненавантажене, однорідне та бієктивно відображається на область $X_0^* \bigcup \partial X_0^*$ евклідового простору. Термодинамічний стан тіла у відліковій конфігурації є однорідний і характеризується температурою $T_{(0)}$ і густиною ентропії $S_{(0)}$, хімічним потенціалом $\mu_{(0)}$ і густиною маси $\rho_{(0)}$. Місцерозташування довільної матеріальної точки $k \in K_*$ у відліковому стані визначає радіус-вектор $\vec{r}_0$.

На проміжку часу $[t_1, t_2]$ термопружна система перебуває під дією зовнішніх сил (силове навантаження) в умовах теплообміну з зовнішнім середовищем. Таке навантаження зумовлює термомеханічні процеси в системі і, відповідно, зміну параметрів локального термодинамічного стану фізично малих підсистем $\delta K \subset K_*$.

Для варіаційного формулювання крайових задач термопружності за вихідний приймаємо функціонал Гамільтона $F\left[T, \vec{p}, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}\right]$, який записаний за підходом Лагранжа, а саме

$$F\left(T, \vec{p}, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}\right) = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{X_0^*} \left[H_0\left(T, \vec{p}, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}\right) + \left(\frac{d\vec{p}}{dt} - \vec{f}^{+} \right) \cdot \vec{u} \right] dV_0 - \right.$$
$$\left. - \int_{\partial X_0^*} \left[\vec{\sigma}_n^{0+} \cdot \vec{u} - T^{+} \cdot \Pi_{sn} \right] d\Sigma_0 \right\} dt - \int_{X_0^*} \vec{u}_{(2)}^{+} \cdot \vec{p}_{(2)} dV_0 \,. \qquad (1)$$

Тут $H_0\left(T, \vec{p}, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}\right)$ — функція Гамільтона; $\Pi_{sn} = \vec{n}_0 \cdot \vec{\Pi}_s$, $\vec{\Pi}_s = \int_{t_1}^{t} \vec{J}_s^0 d\tilde{t}$; $\vec{J}_s^0$ — потік ентропії; $\vec{p} = \int_{t_1}^{t} \left(\vec{\nabla}_0 \cdot \hat{\sigma} + \vec{f}^{+} \right) dt'$ — вектор імпульсу поступального руху; $\vec{\sigma}_n^{0+} = \vec{\sigma}_n^{0+}\left(\vec{r}_0, t\right)$ та $\vec{f}^{+} = \vec{f}^{+}\left(\vec{r}_0, t\right)$ — задані вектори поверхневого силового навантаження й об'ємних сил; $\vec{u}$ — вектор переміщення; T — абсолютна температура; $T^{+} = T^{+}\left(\vec{r}_0, t\right)$ — задане температурне поле на поверхні тіла ∂X_0^*; $\vec{u}_{(2)}^{+}\left(\vec{r}_0\right), \vec{p}_{(2)}\left(\vec{r}_0\right)$ — задані в області тіла вектори переміщення та силового імпульсу в момент часу $t = t_2$.

Тут і надалі всі адитивні параметри моделі нормовані за геометричними характеристиками фізично малої підсистеми $\delta K \subset K$ у відліковому природному стані [2]

$$H_0(\vec{r}_0, t) = H_*(\vec{r}, t)\frac{\delta V}{\delta V_0}, \quad \vec{\sigma}_n^0(\vec{r}_0, t) = \vec{\sigma}_{*n}(\vec{r}, t)\frac{\delta \Sigma}{\delta \Sigma_0}, \quad \vec{f}_0^+(\vec{r}_0, t) = \vec{f}_*^+(\vec{r}, t)\frac{\delta V}{\delta V_0}.$$

Перша варіація функціонала Гамільтона (1) буде

$$\delta F = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_{X_0^*}\left[\frac{\partial H_0}{\partial \vec{p}}\cdot\delta\vec{p} + \frac{\partial H_0}{\partial T}\delta T + \frac{\partial H_0}{\partial \vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}}\cdot\cdot\,\delta\left(\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}\right)^{\mathrm{T}} + \delta\left(\frac{d\,\vec{p}}{dt} - \vec{f}^{\,+}\right)\cdot\vec{u} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{d\,\vec{p}}{dt} - \vec{f}^{\,+}\right)\cdot\delta\vec{u}\right]dV_0 - \int_{\partial X_0^*}\left[\vec{\sigma}_n^{0+}\cdot\delta\vec{u} - T^+\cdot\delta\Pi_{sn}\right]d\Sigma_0\right\}dt - \int_{X_0^*}\vec{u}_{(2)}^{\,+}\cdot\delta\vec{p}_{(2)}dV_0\,. \quad (2)$$

Праву частину співвідношення (2) можна подати так

$$\delta F = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_{X_0^*}\left[\left(\frac{\partial H_0}{\partial T} - C_V\right)\cdot\delta T + \left(\frac{\partial H_0}{\partial \vec{p}} - \vec{v}\right)\cdot\delta\vec{p} + \left(\frac{\partial H_0}{\partial \vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}} - \hat{\sigma}\right)\cdot\cdot\,\delta\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}^{\,T}\right]dV_0 + \right.$$
$$\left. + \int_{\partial X_0^*}\left[\left(\vec{\sigma}_n^0 - \vec{\sigma}_n^{0+}\right)\cdot\delta\vec{u} + \left(T - T^+\right)\delta\vec{\Pi}_s\cdot\vec{n}\right]d\Sigma_0\right\}dt +$$
$$+ \int_{X_0^*}\left[\left(\vec{u}_{(2)} - \vec{u}_{(2)}^{\,+}\right)\cdot\delta\vec{p}_{(2)} - \vec{u}_{(1)}\cdot\delta\vec{p}_{(1)}\right]dV_0\,. \quad (3)$$

При цьому використано рівняння балансу ентропії за відсутності зовнішніх джерел тепла

$$\frac{dS}{dt} = -\vec{\nabla}_0\cdot\vec{J}_s^{\,0} + \vec{J}_s^{\,0}\cdot\left(-\frac{\vec{\nabla}_0 T}{T}\right), \quad (4)$$

а також енергетичне співвідношення для теплових процесів $\delta q_0 = C_V dT$ та відповідне до другого закону термодинаміки подання $\delta q_0 = TdS$. Тут C_V — питома теплоємність за сталого питомого об'єму, q_0 — кількість тепла. Одержані результати дозволяють записати наступні співвідношення

$$C_V dT = TdS = \left[-T\left(\vec{\nabla}_0\cdot\vec{J}_s^{\,0}\right) + \left(-\vec{\nabla}_0 T\right)\cdot\vec{J}_s^{\,0}\right]dt \equiv$$
$$\equiv -T\left(\vec{\nabla}_0\cdot d\vec{\Pi}_s\right) + \left(-\vec{\nabla}_0 T\right)\cdot d\vec{\Pi}_s = -\vec{\nabla}_0\cdot\left(Td\vec{\Pi}_s\right).$$

Приймаємо також, що $\vec{\nabla}_0\cdot\left(T\delta\vec{\Pi}_s\right) = -C_V\delta T$.

Необхідною умовою мінімуму функціонала Гамільтона є рівність нулю його першої варіації $\delta F\left[T, \vec{p}, \vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}\right] = 0$. Якщо врахувати незалежність допустимих варіацій δT, $\delta\vec{p}$, $\delta\left(\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}\right)^T$, то з необхідної умови мінімуму функціонала (3) отримаємо визначальні співвідношення (рівняння Гамільтона)

$$C_V=\frac{\partial H\left(T,\vec{p},\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}\right)}{\partial T},\quad \vec{v}=\frac{\partial H\left(T,\vec{p},\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}\right)}{\partial\vec{p}},\quad \hat{\sigma}=\frac{\partial H\left(T,\vec{p},\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}\right)}{\partial\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}},\quad (5)$$

граничні умови на поверхні тіла

$$\vec{\sigma}_n\Big|_{\partial X_0}=\vec{\sigma}_n^+,\quad T\Big|_{\partial X_0}=T^+ \quad (6)$$

та граничні умови в часовому проміжку $[t_1, t_2]$

$$\vec{u}_{(1)}\Big|_{t=t_1}=0,\quad \vec{u}_{(2)}\Big|_{t=t_2}=\vec{u}_{(2)}^+. \quad (7)$$

У зв’язку з виконанням рівнянь Гамільтона (5) в області тіла маємо наступну диференціальну 1-форму

$$dH_0\left(T,\vec{p},\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}\right)=C_V dT+\vec{v}\cdot d\vec{p}+\hat{\sigma}\cdot\cdot\, d\left(\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}\right)^T, \quad (8)$$

яка є повним диференціалом функції Гамільтона $H_0\left(T,\vec{p},\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}\right)$.

Достатньою умовою мінімуму функціонала Гамільтона (1) є умова його опуклості

$$\delta^2 F=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_{\partial X_0^*}\left[\delta\vec{\sigma}_n^0\cdot\delta\vec{u}-\delta T\cdot\delta\Pi_{sn}\right]d\Sigma_0\right\}dt+\int_{X_0^*}\left[\delta\vec{u}_{(2)}\cdot\delta\vec{p}_{(2)}-\delta\vec{u}_{(1)}\cdot\delta\vec{p}_{(1)}\right]dV_0\geq 0.$$

Ця умова може бути подана так

$$\delta^2 F=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_{X_0^*}\left[\delta\vec{v}\cdot\delta\vec{p}+\delta C_V\cdot\delta T+\delta\hat{\sigma}_0\cdot\cdot\left(\vec{\nabla}_0\otimes\delta\vec{u}\right)^T+2\left(\vec{\nabla}_0\cdot\delta\hat{\sigma}_0\right)\cdot\delta\vec{u}\right]dV_0\right\}dt\equiv$$

$$\equiv\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_{X_0^*}\left[\delta^2\vec{H}\left(\vec{p},T,\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}\right)+2\left(\vec{\nabla}_0\cdot\delta\hat{\sigma}_0\right)\cdot\delta\vec{u}\right]dV_0\right\}dt\geq 0. \quad (9)$$

Відзначимо, що за достатні умови опуклості функціонала Гамільтона можна прийняти, зокрема, і такі

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_{X_0^*}\delta^2\vec{H}\left(\vec{p},T,\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}\right)dV_0\right\}dt>0,\quad \int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_{X_0^*}\left(\vec{\nabla}_0\cdot\delta\hat{\sigma}_0\right)\cdot\delta\vec{u}dV_0\right\}dt\geq 0. \quad (10)$$

Визначальні фізичні рівняння (5), граничні умови (6), (7) і достатні умови опуклості функціонала (10) складають повну систему співвідношень енергетичного опису динамічних дисипативних процесів у термопружних системах.

2. Термодинамічний опис. Базові співвідношення моделі

Для локального опису термомеханічних процесів за вихідну приймемо диференціальну 1-форму (8), яка отримана на основі використання енергетичного підходу для довільної фізично малої підсистеми $\delta K \subset K$. Цій диференціальній 1-формі для дисипативних процесів відповідає наступне енергетичне співвідношення

$$dH_0\left(T, \vec{p}, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}\right) = C_V dT + \hat{\sigma} \cdot\cdot d\left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}\right)^T + \left(\vec{\nabla}_0 \cdot \hat{\sigma} + \vec{f}^{+}\right) \cdot d\vec{u}\,. \qquad (11)$$

Згідно з законом збереження енергії маємо таке балансове співвідношення [5]

$$C_V dT = -\mathcal{P}\, d\left(\rho^{-1}\right) - \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{J}_Q dt\,. \qquad (12)$$

Тут $\mathcal{P}$ — тиск; $\rho^{-1} \equiv V$ — питомий об'єм; $\vec{J}_Q$ — потік тепла.

Якщо додатково використати базове термодинамічне рівняння $\vec{J}_Q = T\vec{J}_s$, то співвідношення (12) набуде вигляду

$$C_V dT = -\mathcal{P}\, d\left(\rho^{-1}\right) + \left[-T\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{J}_s + \left(-\vec{\nabla}_0 T\right) \cdot \vec{J}_s\right] dt\,. \qquad (13)$$

У зв'язку з цим енергетичне співвідношення (11) запишемо так

$$dH_0 = -\mathcal{P}\, d\left(\rho^{-1}\right) + \hat{\sigma}_0 \cdot\cdot d\hat{e} + \left(\vec{\nabla}_0 \cdot \hat{\sigma} + \vec{f}^{+}\right) \cdot d\vec{u} + \hat{\sigma}_* \cdot\cdot d\left(\left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}\right)^a\right)^T +$$
$$+\left[T\left(-\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{J}_s\right) + \left(-\vec{\nabla}_0 T\right) \cdot \vec{J}_s\right] dt\,. \qquad (14)$$

Тут $\hat{e} = \left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} + \vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0\right)/2$ — симетричний тензор деформації; $\left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}\right)^a = \left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} - \vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0\right)/2$ — антисиметрична частина тензора градієнта переміщення; $\hat{\sigma}_0$, $\hat{\sigma}_*$ — симетрична й антисиметрична частини тензора напружень Піоли-Кірхгофа першого роду.

Згідно з другим законом термодинаміки для нерівноважних процесів рівняння балансу ентропії (4) набуває вигляду

$$\frac{dS}{dt} = -\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{J}_s + \sigma_s\,. \qquad (15)$$

Тут $\sigma_s \geq 0$ — виникнення ентропії, яке зумовлене дисипативними процесами [5] у термопружному тілі.

З урахуванням (15) рівняння балансу енергії (14) буде

$$dH_0 = TdS - \mathcal{P}\, d\left(\rho^{-1}\right) + \hat{\sigma}_0 \cdot\cdot d\hat{e} +$$
$$+\left[-T\sigma_s + \left(\vec{\nabla}_0 \cdot \hat{\sigma} + \vec{f}^{+}\right) \cdot \vec{v} + \left(-\hat{\sigma}_* \cdot\cdot \left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{v}\right)^a\right) + \left(-\vec{\nabla}_0 T\right) \cdot \vec{J}_s\right] dt\,. \qquad (16)$$

Надалі використаємо базове твердження термодинамічного опису деформівних систем про те, що в межах фізично малої підсистеми термодинамічні процеси є рівноважні [6, 10] $dH_0 = dU$. У підсумку дістаємо такі базові рівняння моделі для опису дисипативних систем

$$dU = TdS - \mathcal{P}\, d\left(\rho^{-1}\right) + \hat{\sigma}_0 \cdot\cdot\, d\hat{e}\,, \qquad U = TS - \mathcal{P}\rho^{-1} + \hat{\sigma}_0 \cdot\cdot\, \hat{e}\,; \tag{17}$$

$$\sigma_s = \left[\left(\vec{\nabla}_0 \cdot \hat{\sigma} + \vec{f}^{\,+}\right)\cdot \vec{v} - \hat{\sigma}_* \cdot\cdot \left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{v}\right)^a + \left(-\vec{\nabla}_0 T\right)\cdot \vec{J}_s\right]\Big/ T\,. \tag{18}$$

Одержані результати є визначальні як для модельного опису локального термодинамічного стану, так і дисипативних процесів.

2.1. Співвідношення локального термодинамічного стану. Для опису локального термодинамічного стану за вихідну приймаємо диференціальну 1-форму (17)

$$dU = TdS - \mathcal{P}\, d\left(\rho^{-1}\right) + \hat{\sigma}_0 \cdot\cdot\, d\hat{e}\,.$$

Якщо функція внутрішньої енергії $U = U\left(S, \rho^{-1}, \hat{e}\right)$ відома, то одержуємо такі рівняння локального термодинамічного стану

$$T = \partial U/\partial S \equiv T\left(B_*\right), \quad -\mathcal{P} = \partial U\big/\partial \rho^{-1} \equiv -\mathcal{P}\left(B_*\right), \quad \hat{\sigma}_0^d = \partial U\big/\partial \hat{e}^d \equiv \hat{\sigma}_0^d\left(B_*\right), \tag{19}$$

де $B_* = \left(S, \rho^{-1}, \hat{e}\right)$.

Якщо ввести хімічний потенціал $\mu = \dfrac{1}{\rho_0}\left(\dfrac{\mathcal{P}}{\rho(1-e)^2} - \sigma_0\right) \equiv \dfrac{1}{\rho_0}\left(\dfrac{\rho_0 \mathcal{P}}{\rho^2} - \sigma_0\right)$ [4],

то диференціальній 1-формі (17) можна поставити у відповідність наступну

$$dU = TdS + \mu\, d\rho + \hat{\sigma}_0^d \cdot\cdot\, d\hat{e}^d\,. \tag{20}$$

Тоді відповідні рівняння локального термодинамічного стану запишемо так

$$T = \partial U/\partial S \equiv T\left(B_*\right), \quad \mu = \rho_{(0)}^{-1}\, \partial U/\partial e \equiv \mu\left(B_*\right), \quad \hat{\sigma}_0^d = \partial U\big/\partial \hat{e}^d \equiv \hat{\sigma}_0^d\left(B_*\right),$$

де $B_* = \left(s, \rho, \hat{e}^d\right)$.

2.2. Дисипативний потенціал. Перехід термопружного тіла K від вихідного рівноважного термодинамічного стану до відповідного неоднорідного стаціонарного стану в системі $K_* \cup K_*^+$ є потенціальний. Оскільки такий перехід пов'язаний із виникненням ентропії, то за дисипативний потенціал приймаємо

$$F = \int_{t_0}^{t} \sigma_s\, dt'\,. \tag{21}$$

Для потенціалу F маємо таку диференціальну 1-форму

$$dF = \left[\left(\vec{\nabla}_0 \cdot \hat{\sigma} + \vec{f}^{+} \right) \cdot d\vec{u} + \left(-\hat{\sigma}_{*} \right) \cdot\cdot\, d\left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \right)^{a} + \left(-\vec{\nabla}_0 T \right) \cdot d\vec{\Pi}_s \right] \Big/ T \,. \qquad (22)$$

Тут

$$\vec{u} = \int_{t_0}^{t} \vec{v} dt', \quad \left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \right)^{a} = \int_{t_0}^{t} \left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{v} \right)^{a} dt', \quad \vec{\Pi}_s = \int_{t_0}^{t} \vec{J}_s dt' \,. \qquad (23)$$

Якщо дисипативний потенціал $F = F\left(\vec{u}, \left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \right)^{a}, \vec{\Pi}_s \right)$ заданий, то з диференціальної 1-форми (22) отримуємо структуру визначальних співвідношень для опису дисипативних процесів

$$\begin{aligned} &\vec{\nabla}_0 \cdot \hat{\sigma} + \vec{f}^{+} = T\, \partial \mathcal{F}\left(B_{**} \right) \big/ \partial \vec{u} \,, \\ &\hat{\sigma}_{*} = -T\, \partial \mathcal{F}\left(B_{**} \right) \Big/ \partial \left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \right)^{a} , \\ &-\vec{\nabla}_0 T = T\, \partial \mathcal{F}\left(B_{**} \right) \big/ \partial \vec{\Pi}_s \,. \end{aligned} \qquad (24)$$

Тут $B_{**} = \left(\vec{u}, \left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \right)^{a}, \vec{\Pi}_s \right)$.

Одержані співвідношення локального термодинамічного стану (19) і дисипативних процесів (24) є базові для постановки та розв'язування відповідних крайових задач математичної фізики.

Висновки. У роботі запропоновано підхід і методику побудови математичних моделей термомеханіки деформівних пружних систем на основі як енергетичного, так і термодинамічного підходів за урахування дисипативних ефектів. Одержані результати є базові для постановки та розв'язування відповідних крайових задач термомеханіки.

Література

[1] *Бурак Я. Й.* Математична модель потенціального опису нелінійних пружних систем // Доп. НАН України.— 1995. — № 2. — С. 41-49.

[2] *Бурак Я. И., Мороз Г. И.* Вариационная постановка и исследование краевых задач нелинейной теории пластин с использованием энергетического подхода // РАН. Прикладная математика и механика. — Т. 67, вып. 6. — 2003. — С. 977-985.

[3] *Бурак Я., Мороз Г.* Энергетический подход к формулированию краевых задач нелинейной термомеханики упругих систем // Прикладная механика. — 2005. — № 9. — С. 52-59.

[4] *Бурак Я., Чапля Є.* Про термодинамічні аспекти приповерхневих явищ в термопружних системах // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2006. — Т. 42, № 1. — С. 39-44.

[5] *Гиббс Дж. В.* Термодинамика. Статистическая механика. — Москва: Наука, 1982. — 584 с.

[6] *Гріффітс А. А.* Явища розриву і течіння в твердих тілах // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 1993. — Т. 29, № 3. — С. 13-42.

[7] *Де Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. — Москва: Мир, 1964. — 456 с.
[8] *Дьярмати И.* Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы. — Москва: Мир, 1974. — 304 с.
[9] *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. — Москва: Наука, 1980. — 512 с.
[10] *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости. — Киев: Наук. думка, 1970. — 309 с.
[11] *Подстригач Я. С. , Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек. — Киев: Наук. думка, 1978. — 344 с.

The energy and thermodynamic aspects of mathematical modeling of thermomechanical processes in deformable thermoelastic bodies with account of the dissipative effects

Yaroslav Burak, Halyna Moroz

The energy and thermodynamic approaches are proposed for constructing the mathematical models for description of thermomechanical processes in deformable thermoelastic dissipative systems. On this basis the constitutive equations of the local thermodynamical state and description of dissipative processes are formulated. The obtained relationships are basic ones for formulation and solving of the corresponding initial-boundary value problems.

Энергетические и термодинамические аспекты математического моделирования термомеханических процессов в деформируемых термоупругих телах с учетом диссипативных эффектов

Ярослав Бурак, Галина Мороз

Предложены энергетический и термодинамический подходы к построению математических моделей для описания термомеханических процессов в упругих деформируемых диссипативных системах. На этом основании получены соотношения локального термодинамического состояния и описания диссипативных процессов, являющиеся исходными для формулирования и решения соответствующих краевых задач.

Отримано 24.06.08