

## Моделювання вимушених резонансних коливань і дисипативного розігріву гнучких в'язкопружних пластин із розподіленими актуаторами

Василь Карнаухов<sup>1</sup>, Володимир Козлов<sup>2</sup>, Тетяна Карнаухова<sup>3</sup>

<sup>1</sup> д. ф.-м. н., професор, Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, вул. Нестерова, 3, Київ, e-mail: Karn@inmech.kiev.ua

<sup>2</sup> д. ф.-м. н., с. н. с., Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, вул. Нестерова, 3, Київ

<sup>3</sup> к. ф.-м. н., доцент, Нац. техн. ун-т України «КПІ», пр. Перемоги, 37, Київ

*Розглядається задача про резонансні коливання та дисипативний розігрів композитних ортотропних пластин із розподіленими актуаторами. За допомогою актуаторів демпфуються вказані коливання. Залежність властивостей матеріалів від температури не враховується. Тоді спряжена задача зводиться до задачі механіки про резонансні вимушені нелінійні коливання пластини та задачі про розрахунок температури дисипативного розігріву. Для розв'язування задачі механіки використано метод Бубнова-Гальоркіна. В результаті одержано звичайне нелінійне інтегро-диференціальне рівняння. Його розв'язок знаходиться методом гармонічного балансу. Досліджено вплив геометричної нелінійності та температури дисипативного розігріву на ефективність активного демпфування вимушених резонансних коливань прямокутної пластини з шарнірно опертими торцями.*

**Ключові слова:** в'язкопружна пластина, вимушені коливання, демпфування, актуатори, дисипативний розігрів.

**Вступ.** Тонкі композитні пластинки широко застосовують у багатьох галузях сучасної техніки [1, 2, 4, 19, 20]. У разі дії на них гармонічних за часом навантажень із частотою, близькою до резонансної, виникають коливання, амплітуди яких можуть бути співмірні до товщини пластинок. При вивченні процесів у таких тілах слід враховувати геометричну нелінійність. Потреба врахування геометричної нелінійності виникає також під час дослідження досить тонких пластинок, а також за дії інтенсивного механічного навантаження.

Якщо матеріал пластини є непружний, то за моногармонічного навантаження на резонансних частотах внаслідок гістерезисних втрат може суттєво підвищитися температура пластини (так званий дисипативний розігрів). Інтенсивні коливання пластини та дисипативний розігрів можуть привести до втрати її функціональної здатності внаслідок втомного руйнування та високої температури.

У зв'язку з цим виникає необхідність у демпфуванні вимушених резонансних коливань гнучких пластин. Найрозповсюдженішими є пасивні методи демпфування, коли в структуру пластини вводять включення з високими гістерезисними втратами. Огляд робіт із пасивного демпфування вимушених коливань тонкостінних елементів подано в [8, 15, 17, 18, 25]. Проте в останні роки почали використовувати ефективніші

методи активного демпфування вимушених резонансних коливань тонкостінних елементів, коли в структуру пластини вводять п'єзоелектричні включення, які виконують функції, так званого, актуатора [12, 22, 23, 28, 31]. Основна задача під час використання цього методу полягає у розрахунку різниці потенціалів, яку необхідно підвести до актуатора для компенсації дії механічного навантаження. На цю різницю потенціалів може вплинути як геометрична нелінійність, так і температура дисипативного розігріву [10, 11, 13, 26, 27, 29, 32]. Наприклад, якщо температура досягає точки Кюрі, то п'єзоелектричний актуатор втрачає своє функціональне призначення через відсутність п'єзоефекту за такої температури. При цьому реалізується специфічний тип теплового руйнування, коли пластина не втрачає цілісності, але керувати її коливаннями неможливо.

У цій роботі наведено основні співвідношення, які описують вимушені резонансні коливання та дисипативний розігрів гнучких шаруватих тонких пластин за дії на них поверхневого механічного тиску, який змінюється за часом згідно моногармонічного закону. Для моделювання термомеханічної поведінки таких пластин використовуємо механічні гіпотези Кірхгофа-Лява, які доповнені відповідними гіпотезами про розподіл по товщині електричних польових величин і температури. Пасивні матеріали пластини вважаємо в'язкопружними, а активні шари — пружними. Для випадку гармонічного навантаження використовуємо концепцію комплексних характеристик. Наведено загальну нелінійну систему інтегрально-диференціальних рівнянь, яка описує коливання та дисипативний розігрів пасивних ортотропних пластин із розподіленими актуаторами за дії гармонічного тиску. Обмежуючись одночленним наближенням резонансних коливань гнучкої прямокутної пластини з шарнірно закріпленими торцями, методом Бубнова-Гальоркіна одержано звичайне нелінійне інтегрально-диференціальне рівняння, яке описує нестационарні коливання пластини в околі резонансної частоти. З цього рівняння одержано співвідношення для визначення різниці потенціалів, яку необхідно підвести до актуатора для компенсації механічного навантаження. Записано рівняння енергії, розв'язок якого визначає температуру дисипативного розігріву. Для випадку теплоізолюваних торців одержано точний розв'язок цього рівняння. Аналіз виразу для різниці потенціалів показує, що геометрична нелінійність не впливає на неї. Таким чином, для розрахунку вказаної різниці потенціалів можна використати значно простішу лінійну теорію, згідно якої співвідношення, які пов'язують деформації та переміщення, є лінійні. Прирівнюючи максимальну температуру дисипативного розігріву до температури Кюрі, одержано вираз для критичного значення поверхневого тиску, після досягнення якого керувати коливаннями пластини неможливо внаслідок втрати активним матеріалом п'єзоефекту. При цьому слід пам'ятати, що у разі встановлення цього критичного значення уже необхідно враховувати вплив геометричної нелінійності.

Розглядатимемо матеріали, властивості яких не залежать від температури. При цьому спряжена задача ділиться на такі три: 1) задачу про нелінійні згинні коливання пластини; 2) розрахунок дисипативної функції; 3) розв'язування рівняння енергії з відомим джерелом тепла.

Розглянемо окремо кожну з цих задач.

## 1. Постановка задачі про активне демпфування вимушених коливань гнучких багат шарових пластин

Для активного демпфування стаціонарних гармонічних коливань гнучких пластин із пасивних матеріалів (металів, полімерів, композитів тощо) за допомогою актуаторів у її структуру вводять п'єзоелектричні включення, які можуть бути розташовані як на її поверхні, так і в будь-якому місці по товщині. Вони можуть покривати всю поверхню пластини або наноситися у вигляді плям. До цих включень потрібно підвести таку різницю потенціалів, яка б компенсувала зовнішнє механічне навантаження.

У загальному випадку області з включеннями є тонкі шаруваті в'язкопружні п'єзопластини, які складені з довільної кількості пасивних або п'єзоактивних шарів постійної товщини. Пасивні шари можуть бути металеві, полімерні або композитні. Вважаємо їх ортотропними. П'єзоактивні шари є трансверсально-ізотропні та поляризівні по товщині пластини. Якщо між шарами електроди відсутні, то на їх границі реалізується ідеальний механічний і електричний контакт. Дисипативні властивості матеріалів пасивних і п'єзоактивних шарів враховуються на основі моделей лінійної в'язкопружності, які за гармонічного деформування приводять до комплексних характеристик [9, 10, 11, 14, 16, 18, 21, 25]. Деформації вважаємо малими, а кути повороту такими, що необхідно враховувати їх квадрати. Відтак можна використати найпростіший варіант геометрично нелінійної квадратичної теорії. При цьому рівняння руху є також нелінійні.

Пластина віднесена до криволінійної ортогональної системи координат  $\alpha, \beta, \gamma$ . Координатна поверхня  $\gamma = 0$  може міститися всередині деякого шару, співпадати з поверхнею контакту шарів або з граничною поверхнею пластини.

Модель шаруваті пластини будемо на основі гіпотез Кірхгофа-Лява для всього пакету шарів [1, 2, 5, 6, 10, 11]. Ці гіпотези доповнюємо гіпотезами щодо електричних польових величин, а саме [7, 10, 11, 22, 23]: 1) вважаємо, що тангенціальні складники напруженості електричного поля й індукції  $E_\alpha = E_1, E_\beta = E_2, D_\alpha = D_1, D_\beta = D_2$  є значно менші від їх нормальних складників  $E_\gamma = E_3, D_\gamma = D_3$ , а тому ними можна знехтувати; 2) тоді з рівняння електростатики для індукції  $\partial D_\gamma / \partial \gamma = 0$  маємо, що нормальний складник індукції  $D_\gamma$  у кожному діелектричному пасивному або п'єзоактивному шарі постійний по товщині. У зв'язку з умовами ідеального електричного контакту між діелектричними шарами нормальний складник індукції буде постійною величиною у пакеті діелектричних шарів, якщо між ними немає електродів. За наявності електродів індукція змінюється стрибком при переході через них. Металеві шари вважаємо ідеальними провідниками, на їхніх поверхнях потенціал постійний, а напруженість електричного поля в них дорівнює нулю.

Під час вивчення впливу температури на активне демпфування коливань за допомогою актуаторів згадані вище рівняння потрібно доповнити рівнянням енергії, яке описує дисипативний розігрів.

Надалі будемо розглядати шаруваті в'язкопружні гнучкі пластини постійної товщини, що складаються з довільної кількості пасивних або п'єзоактивних шарів. Пасивні шари можуть бути металеві, полімерні чи композитні. У загальному

випадку пасивні шари будемо вважати ортотропними. П'єзоактивні шари приймаємо поляризованими по товщині. Вони можуть бути виготовлені з п'єзokerаміки або п'єзополімеру. Якщо між шарами відсутні електроди, то між ними реалізується ідеальний механічний та електричний контакт. Для моделювання нестационарних процесів використано лінійні моделі в'язкопружності, в яких усі електромеханічні характеристики заміняються на оператори Вольтерра. Приймаємо, що під час коливань кути повороту координатної поверхні великі, а кінематичні характеристики — нелінійні. При цьому рівняння руху є нелінійні, хоча деформації — малі.

Для пасивного ортотропного матеріалу рівняння стану матимуть вигляд [1, 5, 6]

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= a_{11} * \sigma_{11} + a_{12} * \sigma_{22} + a_{13} * \sigma_{33}, & \varepsilon_{12} &= a_{66} * \sigma_{12}, \\ \varepsilon_2 &= a_{12} * \sigma_{11} + a_{22} * \sigma_{22} + a_{23} * \sigma_{33}, & \varepsilon_{13} &= a_{55} * \sigma_{13}, \\ \varepsilon_3 &= a_{13} * \sigma_{11} + a_{23} * \sigma_{22} + a_{33} * \sigma_{33}, & \varepsilon_{23} &= a_{44} * \sigma_{23}. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут символ «\*» означає оператор Вольтерра [9, 21]

$$a * b = ab - \int_{-\infty}^t a(t-\tau)b(\tau)d\tau. \quad (2)$$

Ядра  $a_{kl}(t)$  визначаються експериментально та можуть бути вибрані в різній формі. Найпоширеніші в літературі — ядра Абеля, експоненціальні ядра, ядра М. Колтунова, А. Ржаніцина, Ю. Работнова [9, 21]. Для кожного з них розроблено алгебру операторів, яка дозволяє конкретизувати запис функцій цих операторів, що діють на будь-яку польову величину [9, 21]. Для гармонічних процесів співвідношення (2) приводять до концепції комплексних модулів, коли у виразах (1) зірочка замінюється на комплексний множник так, що

$$a * b = (a' + ia'')(b' + ib''). \quad (3)$$

Величини  $a_{kl}$  у співвідношеннях (1) можна подати через технічні характеристики [1, 2]

$$\begin{aligned} a_{(11,12,13)} &= (1, -v_{12}, -v_{13}) / E_{(1,2,3)}, & a_{(22,23,33)} &= \\ &= (1, -v_{23}, 1) / E_{(2,3,3)}, & a_{(44,55,66)} &= 1 / G_{(23,13,12)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Для поляризованих у товщинному напрямку п'єзоактивних матеріалів визначальні рівняння одержимо з наведених у [7, 11, 12] шляхом заміни пружних характеристик операторами (2)

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= S_{11}^E * \sigma_{11} + S_{12}^E * \sigma_{22} + S_{13}^E * \sigma_{33} + d_{31} * E_3, \\ \varepsilon_2 &= S_{12}^E * \sigma_{11} + S_{11}^E * \sigma_{22} + S_{13}^E * \sigma_{33} + d_{31} * E_3, \\ \varepsilon_3 &= S_{13}^E * (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + S_{33}^E * \sigma_{33} + d_{33} * E_3, \\ \varepsilon_{23} &= S_{44}^E * \sigma_{23} + d_{15} * E_2, & \varepsilon_{13} &= S_{44}^E * \sigma_{13} + d_{15} * E_1, \\ \varepsilon_{12} &= S_{66}^E * \sigma_{12} = 2(S_{11}^E - S_{12}^E) * \sigma_{12}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= \varepsilon_1^T * E_1 + d_{15} * \sigma_{13}, & D_2 &= \varepsilon_1^T * E_2 + d_{15} * \sigma_{23}, \\ D_3 &= \varepsilon_3^T * E_3 + d_{31} * (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + d_{33} * \sigma_{33}. \end{aligned} \quad (5)$$

Якщо використати кінематичні гіпотези Кірхгофа-Лява для всього пакету загалом, то переміщення та деформації будуть змінюватися по товщині кожного шару за лінійним законом [1, 2, 4-6]

$$\begin{aligned} u_\alpha &= u + \gamma \omega_1, & u_\beta &= v + \gamma \omega_2, & u_\gamma &= w, \\ \varepsilon_\alpha &= \varepsilon_1 + \gamma \kappa_1, & \varepsilon_\beta &= \varepsilon_2 + \gamma \kappa_2, & \varepsilon_{\alpha\beta} &= \varepsilon_{12} + \gamma \kappa_{12}, \end{aligned} \quad (6)$$

де  $u, v, w$  — переміщення координатної поверхні в напрямках  $\alpha, \beta, \gamma$  відповідно.

Вважаючи, що поворот елемента оболонки відносно нормалі до координатної поверхні є мала величина більш високого порядку, ніж поворот відносно осей  $\alpha, \beta$ , матимемо такі вирази для тангенціальних і згинних деформацій через переміщення та кути повороту [1, 4, 6, 10, 11]

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{1}{2} \omega_1^2 \quad (1 \leftrightarrow 2, \alpha \leftrightarrow \beta, u \leftrightarrow v, A \leftrightarrow B), \\ \varepsilon_{12} &= \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v}{B} \right) + \omega_1 \omega_2, \\ \kappa_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial v}{\partial \beta} \quad (1 \leftrightarrow 2, \alpha \leftrightarrow \beta, u \leftrightarrow v, A \leftrightarrow B), \\ 2\kappa_{12} &= \frac{1}{A} \frac{\partial \omega_2}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial \omega_1}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \left( \frac{\partial A}{\partial \beta} \omega_1 + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \omega_2 \right), \end{aligned} \quad (7)$$

де

$$\omega_1 = -\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \quad \omega_2 = -\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta}. \quad (8)$$

Співвідношення (7)-(8) визначають найпростіший варіант рівнянь теорії гнучких пластин у квадратичному наближенні.

Відповідно до динамічних гіпотез Кірхгофа-Лява рівняння стану для пасивних шарів значно спрощуються та набувають вигляду

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(\gamma) &= a_{11}(\gamma) * \sigma_{11}(\gamma) + a_{12}(\gamma) * \sigma_{22}(\gamma), & \varepsilon_{12}(\gamma) &= a_{66}(\gamma) * \sigma_{12}(\gamma), \\ \varepsilon_2(\gamma) &= a_{12}(\gamma) * \sigma_{11}(\gamma) + a_{22}(\gamma) * \sigma_{22}(\gamma). \end{aligned} \quad (9)$$

Із співвідношень (9) маємо

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(\gamma) &= B_{11}(\gamma) * \varepsilon_1(\gamma) + B_{12}(\gamma) * \varepsilon_2(\gamma), \\ \sigma_{22}(\gamma) &= B_{12}(\gamma) * \varepsilon_1(\gamma) + B_{22}(\gamma) * \varepsilon_2(\gamma), \\ \sigma_{12}(\gamma) &= B_{66}(\gamma) * \varepsilon_{12}(\gamma). \end{aligned} \quad (10)$$

Тут

$$\begin{aligned} B_{11}(\gamma) &= a_{22}(\gamma)/\Omega(\gamma), & B_{22}(\gamma) &= a_{11}(\gamma)/\Omega(\gamma), \\ B_{12}(\gamma) &= -a_{12}(\gamma)/\Omega(\gamma), & \Omega(\gamma) &= a_{11}(\gamma)a_{22}(\gamma) - a_{12}^2(\gamma). \end{aligned} \quad (11)$$

Для конкретизації визначальних співвідношень тут і надалі потрібно використати згадану вище алгебру операторів.

Інтегруючи вирази (10) по товщині пакетів пасивних шарів, одержимо складники зусиль, які вносять у сумарні зусилля пасивні пакети

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1 &= \tilde{C}_{11} * \varepsilon_1 + \tilde{C}_{12} * \varepsilon_2 + \tilde{K}_{11} * \kappa_1 + \tilde{K}_{12} * \kappa_2, \\ \tilde{T}_2 &= \tilde{C}_{12} * \varepsilon_1 + \tilde{C}_{22} * \varepsilon_2 + \tilde{K}_{12} * \kappa_1 + \tilde{K}_{22} * \kappa_2, \\ \tilde{S} &= \tilde{C}_{66} * \varepsilon_{12} + \tilde{K}_{66} * \kappa_{12}, & \tilde{M}_1 &= \tilde{K}_{11} * \varepsilon_1 + \tilde{K}_{12} * \varepsilon_2 + \tilde{D}_{11} * \kappa_1 + \tilde{D}_{12} * \kappa_2, \\ \tilde{M}_2 &= \tilde{K}_{12} * \varepsilon_1 + \tilde{K}_{22} * \varepsilon_2 + \tilde{D}_{12} * \kappa_1 + \tilde{D}_{22} * \kappa_2, & \tilde{H} &= \tilde{K}_{66} * \varepsilon_{12} + \tilde{D}_{66} * \kappa_{12}, \end{aligned} \quad (12)$$

де

$$(\tilde{C}_{kl}, \tilde{K}_{kl}, \tilde{D}_{kl}) = \int_{(h)} \tilde{B}_{kl}(\gamma) (1, \gamma, \gamma^2) d\gamma. \quad (13)$$

За врахування прийнятих вище гіпотез для п'єзоактивного шару отримаємо спрощені рівняння стану

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^k &= B_{11}^k(\gamma) * (\varepsilon_1 + \gamma\kappa_1) + B_{12}^k(\gamma) * (\varepsilon_2 + \gamma\kappa_2) - \gamma_{31}^k(\gamma) * E_\gamma^k, \\ \sigma_{22}^k &= B_{12}^k(\gamma) * (\varepsilon_1 + \gamma\kappa_1) + B_{22}^k(\gamma) * (\varepsilon_2 + \gamma\kappa_2) - \gamma_{31}^k(\gamma) * E_\gamma^k, \\ \sigma_{12}^k &= B_{66}^k(\gamma) * (\varepsilon_{12} + \gamma\kappa_{12}), \\ D_3^k &= \gamma_{33}^k(\gamma) * E_\gamma^k + \gamma_{31}^k(\gamma) * [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \gamma(\kappa_1 + \kappa_2)]. \end{aligned} \quad (14)$$

Тут

$$\begin{aligned} B_{11}^k(\gamma) &= B_{22}^k(\gamma) = 1/S_{11}^k(\gamma) \left[ 1 - \left( v(\gamma) \right)^2 \right], & B_{12}^k(\gamma) &= v(\gamma) B_{11}^k(\gamma), \\ B_{66}^k(\gamma) &= \frac{1}{2} \left[ 1 - v(\gamma) \right] B_{11}^k(\gamma), & \gamma_{33}^k &= \varepsilon_{33}^k \left[ 1 - k_p^2(\gamma) \right], \\ \gamma_{31}^k &= d_{31}^k(\gamma) / S_{11}^k(\gamma) \left[ 1 - \left( v(\gamma) \right)^2 \right], & k_p^2 &= 2d_p^2(\gamma) / \varepsilon_{33}^k(\gamma) S_{11}^k \left[ 1 - v(\gamma) \right]. \end{aligned}$$

Нехай оболонка складена по висоті з  $\bar{N}$  пакетів п'єзоактивних шарів із  $\bar{n}_m$  шарів у кожному пакеті та з  $\tilde{N}$  пакетів пасивних шарів із  $\tilde{n}_k$  шарів у кожному пакеті. Вважаємо, що пакети розділені нескінченно тонкими електродами, до яких може бути підведена різниця потенціалів. Відповідно до зроблених вище гіпотез для кожного п'єзоактивного шару маємо

$$D_3^1 = D_3^2 = \dots = D_3^{n_m} = D_3^m = C, \quad (m = \overline{1, \overline{N}}). \quad (15)$$

Останнє рівняння системи (14) дає

$$C^m * \left( \gamma_{33}^k \right)^{-1} = E_3^k + \left( \gamma_{33}^k \right) * \left( \gamma_{33}^k \right)^{-1} \left[ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \gamma(\kappa_1 + \kappa_2) \right] \quad (m = \overline{1, \overline{N}}; k = \overline{1, \overline{n_m}}). \quad (16)$$

Інтегруючи співвідношення (16) по пакету  $m$  ( $m = \overline{1, \overline{N}}$ ), знайдемо

$$C^m = C_{0m} * V_m + C_{0m} * C_{1m} * (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + C_{0m} * C_{2m} * (\kappa_1 + \kappa_2). \quad (17)$$

Із використанням (14)-(16) отримаємо

$$\int_{(m)} \gamma_{31}(\gamma) * E_3(\gamma) d\gamma = -e_{0m}^0 * V_m + e_{1m}^0 * (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + e_{2m}^0 * (\kappa_1 + \kappa_2), \quad (18)$$

$$\int_{(m)} \gamma_{31}(\gamma) * E_3(\gamma) \gamma d\gamma = -e_{0m}^1 * V_m + e_{2m}^1 * (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + e_{2m}^1 * (\kappa_1 + \kappa_2). \quad (19)$$

Тут

$$\begin{aligned} e_{0m}^0 &= C_{0m} * C_{1m}, & e_{1m}^0 &= C_{0m} * C_{1m}^2 - C_{3m}, & e_{0m}^1 &= C_{0m} * C_{2m}, \\ e_{2m}^1 &= C_{0m} * C_{2m}^2 - C_{5m}, & e_{2m}^0 &= C_{0m} * C_{1m} * C_{2m} - C_{4m}; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} C_{0m}^{-1} &= \int_{(m)} \left\{ \varepsilon_3^T(\gamma) * [1 - k_p^2(\gamma)] \right\}^{-1} d\gamma, \\ C_{3m} &= \int_{(m)} \left\{ S_{11}^E(\gamma) * [1 - v^2(\gamma)] * [1 - k_p^2(\gamma)] \right\}^{-1} * d_{31}^2(\gamma) d\gamma, \\ C_{4m} &= \int_{(m)} \left\{ S_{11}^E(\gamma) * [1 - v^2(\gamma)] * [1 - k_p^2(\gamma)] \right\}^{-1} * d_{31}^2(\gamma) \gamma d\gamma, \\ C_{5m} &= \int_{(m)} \left\{ S_{11}^E(\gamma) * [1 - \gamma^2(\gamma)] * [1 - k_p^2(\gamma)] \right\}^{-1} * d_{31}^2(\gamma) \gamma^2 d\gamma, \end{aligned} \quad (21)$$

$V_m$  — різниця потенціалів, яка підведена до електродів, що обмежують пакет.

У результаті складники рівнянь стану для шаруватих п'єзоелектричних оболонок, які вносяться п'єзоактивними пакетами, матимуть вигляд

$$\begin{aligned} \overline{T}_1 &= \overline{C}_{11} * \varepsilon_1 + \overline{C}_{12} * \varepsilon_2 + \overline{K}_{11} * \kappa_1 + \overline{K}_{12} * \kappa_2 + T_0, \\ \overline{T}_2 &= \overline{C}_{12} * \varepsilon_1 + \overline{C}_{22} * \varepsilon_2 + \overline{K}_{12} * \kappa_1 + \overline{K}_{22} * \kappa_2 + T_0, \\ \overline{S} &= \overline{C}_{66} * \varepsilon_{12} + \overline{K}_{66} * \kappa_{12}, \\ \overline{M}_1 &= \overline{K}_{11} * \varepsilon_1 + \overline{K}_{12} * \varepsilon_2 + \overline{D}_{11} * \kappa_1 + \overline{D}_{12} * \kappa_2 + M_0, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}\bar{M}_2 &= \bar{K}_{12} * \varepsilon_1 + \bar{K}_{22} * \varepsilon_2 + \bar{D}_{12} * \kappa_1 + \bar{D}_{22} * \kappa_2 + M_0, \\ \bar{H} &= \bar{K}_{66} * \varepsilon_{12} + \bar{D}_{66} * \kappa_{12}.\end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned}\bar{C}_{11} &= \sum_m \int \left\{ S_{11}^E(\gamma) * [1 - v^2(\gamma)] \right\}^{-1} d\gamma - \sum_m^0 e_{1m}, \quad \bar{C}_{11} = \bar{C}_{22}, \\ \bar{C}_{12} &= \sum_m \int \left\{ S_{11}^E(\gamma) * [1 - v^2(\gamma)] \right\}^{-1} * v(\gamma) d\gamma - \sum_m^0 e_{1m}, \\ \bar{K}_{11} &= \bar{K}_{22} = \sum_m \int \left\{ S_{11}^E(\gamma) * [1 - v^2(\gamma)] \right\}^{-1} \gamma d\gamma - \sum_m^0 e_{2m}, \\ \bar{K}_{12} &= \sum_m \int \left\{ S_{11}^E(\gamma) * [1 - v^2(\gamma)] \right\}^{-1} * v(\gamma) \gamma d\gamma - \sum_m^0 e_{2m}, \\ \bar{K}_{66} &= \sum_m \int \left\{ 2S_{11}^E(\gamma) * [1 + v(\gamma)] \right\}^{-1} \gamma d\gamma; \tag{23}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{D}_{11} &= \sum_m \int \left\{ S_{11}^E(\gamma) * [1 - v^2(\gamma)] \right\}^{-1} \gamma^2 d\gamma - \sum_m^1 e_{2m}, \quad \bar{D}_{11} = \bar{D}_{22}, \\ \bar{D}_{12} &= \sum_m \int \left\{ S_{11}^E(\gamma) * [1 - v^2(\gamma)] \right\}^{-1} * v(\gamma) \gamma^2 d\gamma - \sum_m^1 e_{2m}, \\ \bar{D}_{66} &= \sum_m \int \left\{ 2S_{11}^E(\gamma) * [1 + v(\gamma)] \right\}^{-1} \gamma^2 d\gamma; \tag{24}\end{aligned}$$

$$T_0 = \sum_m^0 e_{0m} * V_m, \quad M_0 = \sum_m^1 e_{0m} * V_m, \quad \sum_m = \sum_{m=1}^N.$$

Рівняння стану для оболонки, яка складається з пасивних і п'єзоактивних пакетів, мають вигляд

$$\begin{aligned}T_1 &= C_{11} * \varepsilon_1 + C_{12} * \varepsilon_2 + K_{12} * \kappa_1 + K_{22} * \kappa_2 + T_0, \\ T_2 &= C_{12} * \varepsilon_1 + C_{22} * \varepsilon_2 + K_{12} * \kappa_1 + K_{22} * \kappa_2 + T_0, \\ S &= C_{66} * \varepsilon_{12} + K_{66} * \kappa_{12}, \\ M_1 &= K_{11} * \varepsilon_1 + K_{12} * \varepsilon_2 + D_{11} * \kappa_1 + D_{12} * \kappa_2 + M_0, \\ M_2 &= K_{12} * \varepsilon_1 + K_{22} * \varepsilon_2 + D_{12} * \kappa_1 + D_{22} * \kappa_2 + M_0, \\ H &= K_{66} * \varepsilon_{12} + D_{66} * \kappa_{12}, \tag{25}\end{aligned}$$

де

$$C_{kl} = \tilde{C}_{kl} + \bar{C}_{kl}, \quad K_{kl} = \tilde{K}_{kl} + \bar{K}_{kl}, \quad D_{kl} = \tilde{D}_{kl} + \bar{D}_{kl}.$$

До наведених вище рівнянь потрібно додати рівняння руху [1, 4, 6, 10, 11]



$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha}(BT_1) - \frac{\partial B}{\partial \alpha}T_2 + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta}(A^2S) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha}(BQ_1) + \frac{\partial}{\partial \beta}(AQ_2) - AB \left( q_3 + c_p \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha}(BM_1) + \frac{\partial}{\partial \beta}(AH) + \frac{\partial A}{\partial \beta}H - \frac{\partial B}{\partial \alpha}M_2 - \\ -ABQ_1 - ABS\omega_2 - ABT\omega_1 &= 0 \quad (1 \leftrightarrow 2, \quad A \leftrightarrow B, \quad u \leftrightarrow v). \end{aligned} \quad (26)$$

Тут використано позначення, прийняті у монографіях [1, 2, 10, 11].

Граничні та початкові умови мають стандартний для теорії пластин вигляд і на контурі  $\alpha = const$  можуть бути подані за допомогою комбінацій величин

$$T_1, M_1, S_1 = S, \quad \hat{Q}_1 = Q_1 + \frac{1}{B} \frac{\partial H}{\partial \beta}. \quad (27)$$

Кінематичні граничні умови на контурі  $\alpha = const$  можна записати через переміщення, як комбінації величин  $u, v, w, \partial w / \partial \alpha$ . Наприклад, якщо на контурі  $\alpha = const$  задано

зусилля  $T_1 = T_1^1 \cos(\omega t)$ , то задача повинна розв'язуватися за такої граничної умови на контурі

$$T_1 = T_1^1 \cos \omega t \quad \text{при } \alpha = const. \quad (28)$$

У разі однорідної граничної умови на контурі  $\alpha = const$  та заданих різницях потенціалів, підведених до зовнішніх або внутрішніх електродів, граничні умови все ж будуть неоднорідні, оскільки у вирази (25) для зусиль і моментів входять величини  $T_0$  і  $M_0$ .

Таким чином, для дослідження вимушених коливань п'єзоелектричних пластин із розподіленими актуаторами необхідно розв'язувати нелінійну крайову задачу у разі задання на поверхні чи на торцях пластинки періодичного за часом навантаження (силового чи кінематичного).

Згідно [1, 4, 10, 11] подамо рівняння стану в змішаній формі

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= A_{11} * T_1 + A_{12} * T_2 + P_{11} * \kappa_1 + P_{12} * \kappa_2 + \varepsilon_0, \\ \varepsilon_2 &= A_{12} * T_1 + A_{12} T_2 + P_{12} * \kappa_1 + P_{22} * \kappa_2 + \varepsilon_0, \quad \varepsilon_{12} = A_{66} * S + P_{66} * \kappa_{12}; \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} M_1 &= R_{11} * N_1 + R_{12} * N_2 + Q_{11} * \kappa_1 + Q_{12} * \kappa_2 + \overset{0}{M}, \\ M_2 &= R_{12} * N_1 + R_{22} * N_2 + Q_{12} * \kappa_1 + Q_{22} * \kappa_2 + \overset{0}{M}, \quad H = R_{66} * S + Q_{66} * \kappa_{12}. \end{aligned} \quad (30)$$

Тут

$$\begin{aligned} A_{11} &= C_{11} * \Delta^{-1}, \quad A_{12} = -C_{12} * \Delta^{-1}, \quad A_{66} = C_{66}^{-1}, \quad \Delta = C_{11}^2 - C_{12}^2, \\ P_{11} &= (B_{12} * C_{12} - B_{11} * C_{11}) * \Delta^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{12} &= (B_{11} * C_{12} - B_{12} * C_{11}) * \Delta^{-1}, & P_{66} &= -B_{66} * A_{66}, \\
 R_{11} &= A_{11} * B_{11} + A_{12} * B_{12}, & R_{12} &= A_{11} * B_{11}, & R_{66} &= A_{66} * B_{66}, \\
 Q_{11} &= B_{11} * P_{11} + B_{12} * P_{12} + D_{11}, & Q_{12} &= B_{11} * P_{12} + B_{12} * P_{11} + D_{12}, \\
 Q_{66} &= R_{66} * P_{66} + D_{66}, & \varepsilon_0 &= -(C_{11} - C_{12}) * \Delta^{-1} * T_0, \\
 M &= M_0 - (B_{11} + B_{12}) * \varepsilon_0.
 \end{aligned} \tag{31}$$

Відповідно до співвідношень (7), (8)

$$\kappa_1 = -L_2 w, \quad \kappa_2 = -L_1 w, \quad \kappa_{12} = L_3 w, \tag{32}$$

де

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha}, & L_2 &= \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial \beta}, \\
 L_3 &= -\frac{1}{AB} \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \right).
 \end{aligned} \tag{33}$$

При цьому два з трьох нелінійних рівнянь сумісності деформацій задовольняються тотожно [1, 4, 10, 11].

Якщо ввести функцію зусиль

$$T_1 = L_1 \Phi, \quad T_2 = L_2 \Phi, \quad S = L_3 \Phi, \tag{34}$$

то два перших рівняння рівноваги будуть задовольнятися тотожно.

Якщо співвідношення (29), (31) підставити в спрощені рівняння руху та нерозривності деформацій, то для визначення функцій  $\Phi$  та  $w$  одержимо

$$(A_{11} * \Delta \Delta + A_6 * L_4) * \Phi - (P_{12} * \Delta \Delta + B_6 * L_4) * \Phi + \kappa_1 \kappa_2 - \kappa_{12}^2 + \Delta \varepsilon_0 = 0; \tag{35}$$

$$(D_{11} * \Delta \Delta + D_6 * L_4) * w - (R_{12} * \Delta \Delta + \bar{A}_6 * L_4) * \Phi + L(\Phi, w) = \bar{q} - R \dot{w}, \tag{36}$$

де

$$L_4 = \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{1}{A} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} (BL_1) - \frac{\partial}{\partial \beta} L_2 \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \frac{1}{B} \left[ \frac{\partial}{\partial \beta} (AL_2) - \frac{\partial A}{\partial \beta} L_1 \right] \right\}; \tag{37}$$

$$\Delta = \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right]; \tag{38}$$

$$L(\Phi, w) = \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} [B(T_1 \omega_1 + S \omega_2)] + \frac{\partial}{\partial \beta} [A(T_2 \omega_2 + S \omega_1)] \right\}; \tag{39}$$

$$A_6 = \frac{1}{2} A_{66} + A_{12} - A_{11}, \quad \bar{A}_6 = R_{11} - R_{12} - R_{66}, \quad \bar{q} = q + \Delta M^0,$$

$$B_6 = P_{11} - P_{12} - P_{66}, \quad D_{11} = Q_{11}, \quad D_6 = 2Q_{66} - Q_{11} + Q_{12}; \tag{40}$$

$$M_1 = R_{11} * (L_1 + v_1 * L_2) * \Phi - Q_{11} * (L_2 + v_2 * L_1) * w + M^0,$$

$$\begin{aligned}
 M_2 &= R_{11} * (v_1 * L_1 + L_2) * \Phi - Q_{11} * (v_2 * L_2 + L_1) * w + \overset{0}{M}, \\
 v_1 &= R_{12} * R_{11}^{-1}, \quad v_2 = Q_{12} * Q_{11}^{-1}, \quad R = \sum_k \rho_k (\gamma_k - \gamma_{k-1}).
 \end{aligned}
 \tag{41}$$

Граничні умови мають стандартний для теорії пластин вигляд [1, 2, 6, 10, 11].

## 2. Постановка задачі про вимушені коливання гнучких тришарових в'язкопружних пластин із розподіленими актуаторами

Тришарові п'єзопластини різної структури широко використовуються в сучасній техніці [19, 20, 22, 23]. Так, наприклад, за контролювання коливань пасивних тонкостінних елементів найчастіше маємо справу саме з такою структурною неоднорідністю, коли середній шар виготовлено з пасивного металевого, полімерного чи композитного матеріалу, а зовнішні — з полімерного чи керамічного п'єзома матеріалу, до того ж ці шари поляризовані в товщинному напрямку. Між п'єзоактивними та пасивними шарами може бути розміщено нескінченно тонкий електрод, до якого підводиться гармонічна за часом різниця потенціалів. На такий п'єзоелемент може діяти механічне навантаження.

Розглянемо тришарові пластини різної будови. У першому випадку приймемо, що між пасивним і п'єзоактивним шарами нанесено нескінченно тонкі електроди, до яких підведено різницю потенціалів, що змінюється з часом за гармонічним законом. Такі ж електроди нанесено і на зовнішні поверхні. Будемо також вважати, що середній шар — діелектричний і різниця потенціалів на ньому дорівнює нулю. Індукція в такому шарі постійна по товщині кожного шару, зокрема,

$$D_3 = C(\alpha, \beta). \tag{42}$$

Використовуючи записані вище формули (22)-(25), одержимо, що у визначальних рівняннях (25) слід покласти

$$\begin{aligned}
 C_{ij} &= \int_{(h)} B_{ij}(\gamma) d\gamma + v_3 + v_3 - \frac{\left(\overset{1}{v_1}\right)^2}{v_0} - \frac{\left(\overset{2}{v_2}\right)^2}{v_0}, \\
 K_{ij} &= \int_{(h)} B_{ij}(\gamma) \gamma d\gamma + v_4 + v_4 - \frac{v_1^1 v_2^2}{v_0} - \frac{v_1^2 v_2^1}{v_0}, \quad i, j = 1, 2, \\
 D_{ij} &= \int_{(h)} B_{ij}(\gamma) \gamma^2 d\gamma + v_5 + v_5 - \frac{\left(\overset{1}{v_2}\right)^2}{v_0} - \frac{\left(\overset{2}{v_2}\right)^2}{v_0},
 \end{aligned}$$

$$(C_{66}, K_{66}, D_{66}) = \int_{(h)} B_{66}(1, \gamma, \gamma^2) d\gamma,$$

$$T = \frac{1}{v_0} \frac{v_1}{1} V_0 + \frac{2}{v_0} \frac{v_1}{2} V_0, \quad M = \frac{1}{v_0} \frac{v_2}{1} V_0 + \frac{2}{v_0} \frac{v_2}{2} V_0, \quad (43)$$

де

$$v_0^i = \int_{(h_i)} \frac{1}{\gamma_{33}^i} d\gamma, \quad v_{(1,2)}^i = \int_{(h_i)} \frac{\gamma_{31}^i(1, \gamma)}{\gamma_{33}^i} d\gamma, \quad v_{(3,4,5)}^i = \int_{(h_i)} \frac{(\gamma_{31}^i)^2(1, \gamma, \gamma^2)}{\gamma_{33}^i} d\gamma. \quad (44)$$

Тут слід пам'ятати, що для пасивного діелектрика  $v_i = 0$  ( $i = 1, 5$ ). Якщо ж середній пасивний шар — металевий, то додатково покладаємо також, що  $\gamma_{33}^0 \rightarrow 0$ .

Аналіз співвідношень (43) показує, що тип симетрії пластини повністю визначається характером симетрії пасивного шару, бо поляризований по товщині п'єзоактивний шар формально є ізотропний.

Розглянемо другий випадок, коли середній шар — діелектричний, внутрішні електроди відсутні, а до зовнішніх електродів підведена різниця потенціалів  $V_0$ . На відміну від співвідношення (42) у цьому випадку індукція постійна по товщині всієї пластини

$$D_3^k = C(\alpha, \beta). \quad (45)$$

При цьому напруженість електричного поля визначається формулою

$$E_3^k = C(\alpha, \beta) / \gamma_{33}^k(\gamma) - \gamma_{31}^k(\gamma) [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \gamma(\kappa_1 + \kappa_2)] / \gamma_{33}^k(\gamma). \quad (46)$$

Тоді у визначальних рівняннях (25) слід покласти

$$C_{ij} = \int_{(h)} B_{ij}(\gamma) d\gamma - v_1^2 / v_0, \quad K_{ij} = \int_{(h)} B_{ij}(\gamma) \gamma d\gamma + v_4 - v_1 v_2 / v_0,$$

$$D_{ij} = \int_{(h)} B_{ij}(\gamma) \gamma^2 d\gamma + v_5 - v_2^2 / v_0, \quad T = v_1 V_0 / v_0, \quad M = v_2 V_0 / v_0, \quad (47)$$

де

$$v_0 = \int_{(h)} 1 / \gamma_{33}(\gamma) d\gamma, \quad v_{(1,2)} = \int_{(h)} \gamma_{31}(\gamma) (1, \gamma) / \gamma_{33}(\gamma) d\gamma,$$

$$v_{(3,4,5)} = \int_{(h)} [\gamma_{31}(\gamma)]^2 (1, \gamma, \gamma^2) / \gamma_{33}(\gamma) d\gamma. \quad (48)$$

Надалі обмежимося розглядом п'єзоактивних шарів, які мають однакові товщину й властивості, за винятком того, що поляризація їх протилежна, тобто

$\gamma_{31}^2 = -\gamma_{31}^1$ . Тоді у рівняннях стану (25) для визначення електромеханічних характеристик матимемо такі вирази:

— за наявності внутрішніх електродів, до яких підведені різниці потенціалів  $V_1^0 = V_2^0, V^0 = 0$

$$C_{ij} = h_0^0 B_{ij} + 2h_1^1 B_{ij}, \quad K_{ij} = 0, \quad T_0 = 0, \quad M_0 = \frac{1}{2} \gamma_{31}^1 (h_1 + h_0)^0 V_1^0,$$

$$D_{ij} = \frac{h_3^0}{12} B_{ij}^0 + \frac{2}{3} \left\{ B_{ij}^1 + B_{11}^1 \frac{1+\nu^1}{2} \cdot \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \times \left[ 1 - \frac{3}{4h_1} \frac{\left( (0,5h_0 + h_1)^2 - (0,5h_0)^2 \right)^2}{(0,5h_0 + h_1)^3 - (0,5h_0)^3} \right] \right\} \times$$

$$\times \left[ (0,5h_0 + h_1)^3 - (0,5h_0)^3 \right]; \quad (49)$$

— за відсутності внутрішніх електродів

$$C_{ij} = h_0^0 B_{ij} + 2h_1^1 \left( B_{ij}^1 + B_{11}^1 \frac{1+\nu^1}{2} \cdot \frac{\left( \frac{1}{k_p} \right)^2}{1 - \left( \frac{1}{k_p} \right)^2} \right), \quad K_{ij} = 0, \quad T_0 = 0,$$

$$D_{ij} = \frac{h_3^0}{12} B_{ij}^0 + \frac{2}{3} \left( B_{ij}^1 + B_{11}^1 \frac{1+\nu^1}{2} \cdot \frac{\left( \frac{1}{k_p} \right)^2}{1 - \left( \frac{1}{k_p} \right)^2} \left[ 1 - \frac{3}{4h_1} \frac{\left( (0,5h_0 + h_1)^2 - (0,5h_0)^2 \right)^2}{(0,5h_0 + h_1)^3 - (0,5h_0)^3} \right] \right) \times$$

$$\times \frac{2h_1^0 \gamma_{33}^0}{h_0^1 \gamma_{33}^0 + 2h_1^1 \gamma_{33}^1} (0,5h_0 + h_1)^3, \quad M_0 = \frac{\gamma_{31}^1 h_1 (h_0 + h_1) \gamma_{33}^0}{h_0^1 \gamma_{33}^0 + 2h_1^1 \gamma_{33}^1} V_0. \quad (50)$$

У декартовій системі координат  $x, y, z$ , осі  $Ox, Oy$  якої співпадають із лініями кривизни середньої поверхні, а вісь  $Oz$  направлена вздовж нормалі до оболонки, кінематичні співвідношення мають вигляд

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2,$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\kappa_x = \kappa_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = \kappa_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = \kappa_{12} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (51)$$

Рівняння сумісності деформацій має вигляд

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (52)$$

а рівняння руху ( $T_x = T_1$ ,  $T_y = T_2$ ,  $M_x = M_1$ ,  $M_y = M_2$ ,  $M_{xy} = H$ )

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left( T_x \frac{\partial w}{\partial x} + S \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( S \frac{\partial w}{\partial x} + T_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \bar{q} + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \end{aligned} \quad (53)$$

Тип симетрії рівнянь стану визначається типом симетрії матеріалів пасивного шару. Так, наприклад, якщо пасивний шар ортотропний, то нелінійні рівняння (35), (36) набувають вигляду

$$\begin{aligned} D_{11} * \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) * \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} * \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - L(\Phi, w) + \tilde{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \bar{q}(x, y, t) = 0, \\ A_{11} * \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + (-2A_{12} + A_{66}) * \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{22} * \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + L(\Phi, w) - \varepsilon_0 = 0, \end{aligned} \quad (54)$$

де

$$\begin{aligned} L(\Phi_1, \Phi_2) = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial y}, \\ A_{11} = C_{22}/\Delta, \quad A_{22} = C_{11}/\Delta, \quad A_{66} = 1/C_{66}, \\ A_{12} = C_{12}/\Delta, \quad \Delta = C_{11}C_{22} - C_{12}^2, \quad \varepsilon_0 = \frac{C_{22} - C_{12}}{\Delta} \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} + \frac{C_{11} - C_{12}}{\Delta} \frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (55)$$

Рівняння (54) мають такий же вигляд, як і класичні рівняння для пружного анізотропного матеріалу при заміні відповідних характеристик на оператори.

### 3. Рівняння енергії

Вважаємо, що в'язкість і геометрична нелінійність мають однаковий кількісний вплив. Приймаючи температуру постійною по товщині пластини, матимемо таке рівняння енергії [10, 11]

$$\bar{\lambda}_{11} \theta_{,xx} + \bar{\lambda}_{22} \theta_{,yy} - (2\delta/h)\theta + W/h = 0, \quad (56)$$

де  $\bar{\lambda}_{11,22} = \sum_k \lambda_{11,22}^{(k)} h_k / h$  — усереднені по всіх шарах пластини коефіцієнти теплопровідності;  $h$  — сумарна товщина пластини;  $\theta = T - T^0$ ,  $\delta = (\alpha_3 + \alpha_4)/2$ ,  $T^0 = (\alpha_3 \theta_3 + \alpha_4 \theta_4) / (\alpha_3 + \alpha_4)$ ;  $\alpha_3, \alpha_4$  — коефіцієнти теплообміну на поверхнях  $z = \pm h/2$

контакту з зовнішнім середовищем із температурами  $\theta_3, \theta_4$ ;  $\lambda_{ij}^{(k)}$  — коефіцієнти теплопровідності шарів. У рівнянні (56) дисипативна функція  $W$  визначається за формулою [10, 11]

$$W = \frac{\Omega}{2} [(T_1'' \varepsilon_1' - T_1' \varepsilon_1'') + (T_2'' \varepsilon_2' - T_2' \varepsilon_2'') + 2(S'' \varepsilon_{12}' - S' \varepsilon_{12}'') + (M_1'' \kappa_1' - M_1' \kappa_1'') + (M_2'' \kappa_2' - M_2' \kappa_2'') + 2(H_1'' \kappa_{12}' - H_1' \kappa_{12}'')]. \quad (57)$$

З огляду на прийняту вище гіпотезу про однакову величину впливу в'язкості та геометричної нелінійності, у випадку згинних коливань пластини у виразі (57) слід залишити лише моменти та згинні деформації.

#### 4. Розв'язок задачі для тришарової пластини

Для прикладу, розглянемо тришарову пластину, яка складається з середнього ізо-тропного пасивного шару та двох активних протилежно поляризованих шарів. Ці активні шари можуть бути розміщені плямами на поверхнях пластини або покривати їх повністю. На пластину діє рівномірний поверхневий тиск, який змінюється за гармонічним у часі законом. Торці пластини шарнірно оперті. Тоді задача електромеханіки зводиться до розв'язування такої системи інтегрально-диференціальних рівнянь

$$D * \Delta \Delta w - L(\Phi, w) + \tilde{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \bar{q}(x, y, t) - \Delta M_0 = 0, \\ \Delta \Delta \Phi - \frac{h}{2} L(w, w) = 0. \quad (58)$$

Тут  $M_0 = \frac{1}{2} \gamma_{31} (h_0 + h_1) V_A$ ,  $\gamma_{31} = \frac{d_{31}}{s_{11} (1 - \nu)}$ ,  $\nu = -\frac{s_{12}}{s_{11}}$ , де  $V_A$  — підведена до актуатора різниця потенціалів, а позначення електромеханічних характеристик такі, як у монографіях [7, 10, 11]. У праці [12] показано, що під час коливань для першої моди ефективність актуатора максимальна за повного покриття пластини актуатором. Розв'язок задачі для пластин із шарнірно опертими торцями будемо шукати у загальноприйнятому для такого типу граничних умов вигляді

$$w = w_{mns}(t) \sin k_m x \sin p_n y, \quad \Phi = \Phi_{mns}(t) \sin k_m x \sin p_n y, \\ q = q_{mns}(t) \sin k_m x \sin p_n y, \quad M_0 = M_{mns}(t) \sin k_m x \sin p_n y. \quad (59)$$

Для знаходження коефіцієнтів  $w_{mn}(t)$ ,  $\Phi_{mn}(t)$  використаємо метод Бубнова-Гальоркіна [1, 4]. Після громіздких викладок одержимо таке інтегрально-диференціальне рівняння для  $w_{mn}(t)$

$$\ddot{w}_{mn} + \frac{(k_m^2 + p_n^2)^2}{c_p} D * w_{mn} + \frac{512 k_m^2 p_n^2 h}{9 c_p a^2 b^2 (k_m^2 + p_n^2)^2} (E * w_{mn}^2) w_{mn} =$$

$$= \frac{1}{c_p} \left[ q_{mn} - (k_m^2 + p_n^2) M_{mn} \right]. \quad (60)$$

При цьому функція зусиль  $\Phi_{mn}(t)$  визначається за формулою

$$\Phi_{mn} = - \frac{16k_m p_n h}{3c_p ab (k_m^2 + p_n^2)^2} (E * w_{mn}^2). \quad (61)$$

Враховуючи припущення про однаковий порядок впливу геометричної нелінійності та в'язкості, можемо замінити величину  $(E * w_{mn}^2)$  на  $(E w_{mn}^2)$ .

Для розв'язування нелінійного інтегрально-диференціального рівняння (60) застосуємо метод гармонічного балансу [3]. Для цього вираз  $D * w_{mn} = D_0 w_{mn} - \int_{-\infty}^t D_1(t - \tau) w_{mn}(\tau) d\tau$  замінимо виразом  $A w_{mn} + B w_{mn}$  згідно з вказаним методом.

При цьому матимемо  $A = D' = D_0 - D_{1C}, B = D''/\omega_{mn} = D_{1S}/\omega_{mn}$ . Тут  $D_{1C}, D_{1S}$  — cos- і sin-перетворення Фур'є ядра  $D_1(t)$ , тобто

$$D_{1C} = \int_0^{\infty} D_1(t) \cos \omega t dt, \quad D_{1S} = \int_0^{\infty} D_1(t) \sin \omega t dt.$$

Тоді інтегрально-диференціальне рівняння (60) стає нелінійним диференціальним рівнянням другого порядку

$$\ddot{w} + 2\varepsilon \dot{w} + \omega_0^2 w + \alpha w^3 = p \cos \omega t. \quad (62)$$

Тут опущено індекси після букв, а

$$2\varepsilon = \frac{(k_m^2 + p_n^2)^2 B}{C_p}, \quad \omega_0^2 = \frac{(k_m^2 + p_n^2)^2 A}{C_p},$$

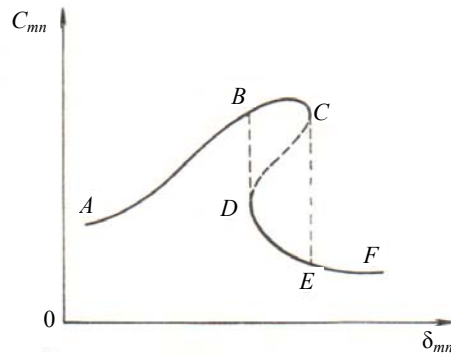


Рис.



$$\alpha = \frac{512}{9} \frac{k_m^2 p_n^2 E}{C_p (k_m^2 + p_n^2)^2 a^2 b^2}, \quad p = \frac{q_{mn} - (k_m^2 + p_n^2) M_{mn}}{C_p}. \quad (63)$$

Скористаємося результатами роботи [1], у якій проаналізовано розв'язок цього рівняння. Нехай частота коливань є близька до резонансної:  $\omega = \omega_0 + \delta$ , де  $\delta$  — мала величина. Розв'язок однорідного рівняння (62) шукаємо у вигляді  $w = C \cos(\tilde{\omega}t)$ . Тоді

$$\tilde{\omega}^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4} \alpha C^2 \quad \text{або} \quad \tilde{\omega} = \omega_0 + \frac{3\alpha}{8\omega} C^2. \quad (64)$$

Розв'язок задачі про вимушені коливання має вигляд [1]

$$C^2 \left[ \left( \delta - \frac{3\alpha}{8\omega_0} C^2 \right)^2 + \varepsilon^2 \right] = \frac{p^2}{4\omega_0^2}. \quad (65)$$

Рівняння (65) є кубічне відносно амплітуди  $C^2$  та, починаючи з навантаження  $(p^*)^2 = 64\omega_0^3 \varepsilon^3 / 3\alpha$ , має три дійсні корені (область неоднозначності). Границі цієї області визначаються з квадратного рівняння

$$\delta^2 + \varepsilon^2 - \frac{3\alpha\delta}{\omega_0} C^2 + \frac{27\alpha^2}{64\omega_0^2} C^4 = 0. \quad (66)$$

Розв'язуючи рівняння (65) і (66), можна вказати області, так званого, нелінійного гістерезису на амплітудно-частотній характеристиці, яка зображена на рисунку. Ділянка  $CD$  відповідає нестійким коливанням пластини. У точці  $C$  є зрив амплітуди, яка стрибком зменшується до точки  $E$ . У точці  $D$  амплітуда стрибком зростає до точки  $B$ .

Розглянемо тепер рівняння енергії (62). У випадку шарнірно опертих торців пластини дисипативна функція визначається формулою

$$W = [W_0 + W_1(\cos 2k_1x + \cos 2p_1y) + W_1(\cos 2k_1x \cos 2p_1y)], \quad (67)$$

де

$$W_0 = W_2 = \frac{\omega}{8} D'' |C|^2 (k_1^2 + p_1^2)^2, \quad W_1 = -\frac{\omega}{8} D'' |C|^2 [(k_1^2 - p_1^2)^2 + 4\nu k_1^2 p_1^2].$$

Розглянемо випадок теплоізованих торців пластини. Розв'язок задачі шукаємо у вигляді

$$\theta = \theta_0 + \theta_1 \cos(2k_1x) + \theta_2 \cos(2p_1y) + \theta_3 \cos(2k_1x) \cos(2p_1y). \quad (68)$$

Підставляючи подання (67), (68) у рівняння енергії (56), одержимо такі вирази для коефіцієнтів

$$\begin{aligned}\theta_0 &= W_0 / (2\alpha), \quad \theta_1 = W_1 / (2\alpha + 4h\bar{\lambda}_{11}k_1^2), \quad \theta_2 = W_1 / (2\alpha + 4h\bar{\lambda}_{11}p_1^2), \\ \theta_3 &= W_2 / (2\alpha + 4h\bar{\lambda}_{11}k_1^2 + 4h\bar{\lambda}_{11}p_1^2).\end{aligned}\quad (69)$$

Максимальна температура дисипативного розігріву досягається в центрі пластини ( $a/2, b/2$ ) та дорівнює

$$\theta_{\max} = \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3. \quad (70)$$

За досягнення цієї температурою точки Кюрі актуатор перестає виконувати своє функціональне призначення внаслідок втрати п'єзоелектричних властивостей. Тому будемо вважати, що досягнення точки Кюрі недопустиме. З цієї умови знайдемо те критичне значення механічного навантаження, після досягнення якого керувати коливаннями пластини за допомогою актуатора неможливо. З умови  $\theta = \theta_K$  та з рівняння (70) знайдемо квадрат критичної амплітуди коливань  $C_K^2$ , після перевищення якої актуатор перестає виконувати своє функціональне призначення

$$C_K^2 = \theta_K / \left\{ \frac{\omega}{2} D'' \left[ 2(k_1^2 + p_1^2)^2 + (k_1^2 - p_1^2)^2 + 4vk_1^2 p_1^2 \right] \right\}.$$

Підставляючи останнє співвідношення в рівняння (65), одержимо критичне значення механічного навантаження, після досягнення якого актуатор перестає виконувати своє функціональне призначення

$$P_K = 2\omega C_K \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{1}{4\omega} \left[ (\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{3}{4}\alpha C_K^2 \right]^2}.$$

Бачимо, що геометрична нелінійність може суттєво вплинути на критичні значення механічного навантаження. Величина  $P_K$  залежить від положення точки  $(C_K, \omega)$  на амплітудо-частотній характеристиці. В області нелінійного гістерезису  $P_K$  є неоднозначна функція частоти.

Аналіз рівняння (62) показує, що амплітуда вимушених коливань для будь-якої моди буде дорівнювати нулю у разі виконання умови

$$q_{mn} = (k_m^2 + p_n^2) M_{mn}. \quad (71)$$

Для рівномірного тиску величини  $q_{mn}$ ,  $M_{mn}$  потрібно замінити відповідно на  $q_0$ ,  $M_0$ . За наявності чи відсутності внутрішніх електродів величина  $M_0$  визначається виразами (49) або (50) відповідно. З виразу (71) бачимо, що різниця потенціалів, яку потрібно прикласти до актуатора для компенсації механічного навантаження, в одномодовому наближенні не залежить від геометричної нелінійності, оскільки в цей вираз не входять ані амплітуда коливань, ані параметр нелінійності. Аналіз системи рівнянь (52) свідчить, що при знаходженні її розв'язку варіаційним методом чи методом Бубнова-Гальоркіна з використанням одномодового наближення такий висновок справедливий не тільки для випадку шарнірного опирання торців, а й для інших типів граничних умов. Це значно спрощує

розрахунок згаданої різниці потенціалів, бо можна використати лінійну теорію пластин. При цьому справджуються наведені в роботі [12] результати про залежність величини різниці потенціалів від моди коливань, місця розташування актуатора та його розмірів.

### **Література**

- [1] *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. — Москва: Наука, 1967. — 266 с.
- [2] *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. — Москва: Наука, 1974. — 446 с.
- [3] *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — Москва: Наука, 1974. — 504 с.
- [4] *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. — Москва: Наука, 1972. — 432 с.
- [5] *Григоренко Я. М., Василенко А. Т.* Теория оболочек переменной жесткости. — Киев: Наук. думка, 1981. — 544 с.
- [6] *Григоренко Я. М., Крюков Н. Н.* Численное решение задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами. — Киев: Наук. думка, 1988. — 264 с.
- [7] *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А.* Механика связанных полей в элементах конструкций. Электроупругость. Т. 5. — Киев: Наук. думка, 1989. — 290 с.
- [8] *Дубенец В. Г., Хильчевский В. В.* Колебания демпфированных композитных конструкций. Т.1. — Киев: Вища школа, 1995. — 226 с.
- [9] *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. — Москва: Наука, 1970. — 280 с.
- [10] *Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф.* Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. — Киев: Наук. думка, 1986. — 222 с.
- [11] *Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф.* Механика связанных полей в элементах конструкций. Электротермовязкоупругость. Т.4. — Киев: Наук. думка, 1988. — 320 с.
- [12] *Карнаухов В. Г., Козлов А. В., Пятецкая Е. В.* Демпфирование колебаний вязкоупругих пластин при помощи распределенных пьезоэлектрических включений // Акустический вестник. — 2002. — Т. 5, № 4. — С. 15-32.
- [13] *Карнаухов В. Г.* Тепловое разрушение полимерных элементов конструкций при моногармоническом деформировании // Прикладная механика. — 2004. — Т. 40, № 6. — С. 30-70.
- [14] *Карнаухов В. Г., Михайленко В. В.* Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. — Житомир: ЖТТУ, 2005. — 428 с.
- [15] *Корнев Б. Г., Резников Л. М.* Динамические гасители колебаний. Теория и приложения. — Москва: Наука, 1988. — 304 с.
- [16] *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости. — Москва: Мир, 1974. — 338с.
- [17] *Матвеев В. В.* Демпфирование колебаний деформируемых тел. — Киев: Наук. думка, 1985. — 264 с.
- [18] *Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж.* Демпфирование колебаний. — Москва: Мир, 1988. — 448 с.

- [19] *Методы расчета оболочек*: в 5 т.; под ред. Гузя А. Н. — Киев: Наук. думка, 1980-1982. — 2444 с.
- [20] *Механика композитных материалов и элементов конструкций*: в 3 т.; под ред. Гузя А. Н. — Киев: Наук. думка, 1982-1983. — 1096 с.
- [21] *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. — Москва: Наука, 1977. — 384 с.
- [22] *Gabber U. and Tzou H. S.* Smart Structures and Structronic Systems. — Kluwer Academic Pub.: Dordrecht / Boston / London, 2001. — 384 p.
- [23] *Gopinathan S., Varadan V. V., Varadan V. K.* A review and critique of theories for piezoelectric laminates // Smart Mater. Struct. — 2000. — Vol. 9. — P. 24-48.
- [24] *Karnaukhov V. G.* Thermomechanics of coupled fields in passive and piezoactive inelastic bodies under harmonic deformations // Journal of Thermal Stresses. — Vol. 28, № 6-7. — P. 783-815.
- [25] *Lazan B.* Damping of materials and members in structural mechanics. — Oxford etc.: Pergamon Press, 1968. — 318 p.
- [26] *Lu X., Hanagud S. V.* Extended irreversible thermodynamics modeling for self-heating and dissipation in piezoelectric ceramics // IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control. — 2004. — Vol. 31, No 12. — P. 1582-1592.
- [27] *Mauk L. D., Lynch C. S.* Thermo-electro-mechanical behavior of ferroelectric materials. Part I: Computational micromechanical model versus experimental results // J. Int. Mat. Sys. Struct. — 2003. — Vol. 14. — P. 587-602.
- [28] *Rao S. S., Sunar M.* Piezoelectricity and its use in disturbance sensing and control of structure: A survey // Applied mechanics reviews. — 1994. — Vol. 47, No 44. — P. 113-123.
- [29] *Tani J., Takagi T., Qiu J.* Intelligent material systems: Applications of functional materials // Applied mechanic reviews. — 1998. — Vol. 51, No 8. — P. 505-521.
- [30] *Tzou H. S.* Piezoelectric shells (Distributed Sensing and Control of Continua). — Kluwer Academic Pub.: Dordrecht / Boston / London, 1993. — 400 p.
- [31] *Tzou H. S., Bergman L. A.* Dynamics and control of distributed systems. — Cambridge: Cambridge University Press, 1998. — 400 p.
- [32] *Weiland L. M., Lynch C. S.* Thermo-electro-mechanical behavior of ferroelectric materials. Part II: Introduction of Rate and Self-heating Effects // J. Int. Mat. Sys. Struct. — 2003. — Vol. 14. — P. 602-621.

## **Modelling of forced resonance vibrations and dissipative heating of the flexible viscoelastic plates with distributed actuators**

Vasyl Karnaukhov, Volodymyr Kozlov, Tatiana Karnaukhova

*Problem about forced resonance vibrations and dissipative heating of flexible composite orthotropic plates with distributed actuators is considered. These vibrations are damped by the actuators. It is supposed that the electromechanical material characteristics do not depend on the temperature. Then the coupled problem is reduced to the problem of mechanics about forced nonlinear vibrations of a plate and the problem on calculation of dissipative heating temperature. The problem of mechanics is solved by the Bubnov-Galerkin method. As a result the ordinary nonlinear integro-differential equation is obtained, which is solved by the harmonic balance method. The influence of geometric nonlinearity and dissipative heating temperature on the effectiveness of active damping vibrations of a rectangular plate with supported edges by the piezoelectric actuators is studied.*

## **Моделирование вынужденных резонансных колебаний и диссипативного разогрева гибких вязкоупругих пластин с распределенными актуаторами**

Василий Карнаухов, Владимир Козлов, Татьяна Карнаухова

*Рассматривается задача о резонансных колебаниях и диссипативном разогреве гибких композитных ортотропных пластин с распределенными актуаторами. При помощи актуаторов демпфируются указанные колебания. Зависимость свойств материалов от температуры не учитывается. В этом случае связанная задача сводится к задаче механики о вынужденных резонансных нелинейных колебаниях пластины и задаче расчета температуры диссипативного разогрева. Для решения задачи механики используется метод Бубнова-Галёркина. В результате получено обыкновенное нелинейное интегро-дифференциальное уравнение. Его решение находится методом гармонического баланса. Исследовано влияние геометрической нелинейности и температуры диссипативного разогрева на эффективность активного демпфирования вынужденных резонансных колебаний прямоугольной пластины с шарнирным закреплением торцов.*

Отримано 15.05.08