УДК 519.95

Графи з заданою системою маршрутів і структурною стійкістю

Мирослав Притула

к. ф.-м. н., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, 79005, e-mail: prytula@cmm.lviv.ua

У роботі запропоновано алгоритми побудови графів із заданими системами маршрутів, ребра яких не перетинаються. Встановлено зв'язок між системою маршрутів і максимальним степенем вершин графу. Побудовано графи, які володіють заданою системою маршрутів, що не перетинаються, і мінімальним степенем його вершин. Досліджено структурну стійкість графів. Розроблено алгоритми забезпечення заданої структурної стійкості графу мінімальною кількістю додаткових ребер.

Ключові слова: інформаційний граф, комутаційна мережа, система маршрутів, стійкість графу.

Вступ. Багато задач дискретної математики [1-3], які мають важливе прикладне значення, приводять до необхідності побудови мереж, що володіють заданими системами маршрутів. Такими є задачі, які виникають у теорії автоматів, програмуванні, теорії алгоритмів, системах розподілу потоків, засобах комутації та в обчислювальній техніці. Перелічені задачі безпосередньо пов'язані зі зв'язністю графу. Поняття зв'язність є центральним під час дослідження структурних властивостей складних систем таких, як мережі зв'язку та системи зі змінною структурою, якими є інженерні мережі (електричні, гідравлічні). Ці проблеми є також близькими до цілого класу екстремальних задач на графах, а саме, побудови найкоротших комутаційних мереж, забезпечення мінімальними ресурсами структурної надійності різних типів мереж. Відзначимо, що задача перевірки зв'язності графу тісно пов'язана з проблемою визначення величини максимального потоку в транспортних мережах.

1. Основні поняття й огляд результатів

Системам маршрутів у графах присвячено відомі теореми в теорії графів, які належать Менгеру [4]. Вони стосуються вершинного та реберного поділу в неорієнтованих графах. Так, для двох σ-вершинно розділених множин A та B в неорієнтованому графі G існує сімейство $\{A_i\}$ з σ зв'язуючих простих шляхів (маршрутів), які не перетинаються. Аналогічна теорема справедлива і для реберно розділених простих маршрутів, які не мають спільних ребер. Для аналізу та синтезу графів на предмет існування в них множин шляхів, що не неперетинаються, теореми

ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології
2008, вип. 7, 154-160

Менгера є мало придатними внаслідок складності алгоритмів перевірки чи забезпечення умов теореми. Задачі, пов'язані з виділенням систем шляхів чи побудовою графів, у яких існують задані множини шляхів, найширше розглядалися в теорії інформаційних графів [5]. Основним об'єктом дослідження математичної теорії інформаційних графів є скінченні орієнтовані графи з двома виділеними множинами вершин, які називаються, відповідно, вхідними та вихідними вершинами.

Нехай у скінченному орієнтованому графі $G(V)$ виділено множини вхідних $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ і вихідних $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ вершин. Граф $G(V)$ реалізує відображення $\varphi = (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{ik} / y_{i1}, y_{i2}, ..., y_{jk})$ підмножини $(x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{ik}) \subseteq X$ на рівнопотужну їй підмножину $y_{i1}, y_{i2}, ..., y_{jk}) \subseteq Y$, якщо в $G(V)$ можна виділити такий набір шляхів S_1, S_2, ..., S_k, що S_i шлях, який починається у вершині x_{is} $(s = \overline{1,k})$ та закінчується у вершині y_{js} $(s = \overline{1,k})$ і ніякі два шляхи з цієї множини не мають жодної спільної дуги.

Граф $G(V)$ називають k-інформаційним, якщо множина його вхідних вершин співпадає з множиною вихідних і множиною всіх його вершин. k-інформаційний граф, який має n вершин, є повним, якщо він реалізує всі відображення множини з k своїх вершин на себе, тобто $C_n^k k!$ відображень. Степенем інформаційного графу назвемо максимальний степінь його вершин. k-інформаційний граф будемо називати p-стійким, якщо внаслідок вилучення з нього p $(p \geq n-k)$ вершин разом з інцидентними їм ребрами, граф, що залишився, буде k-інформаційним. Уведемо функцію $S_p(n, k)$, яка дорівнює мінімуму степеней k-інформаційних p-стійких графів. Для повних n-інформаційних графів справджується теорема [5], згідно якої $S_0(n, n) = C\log n / \log\log n$.

Орієнтований граф G з n вхідними й m вихідними вершинами ($n \geq m$) називають (n, m)-концентратором, якщо для будь-якої підмножини, яка містить m вхідних вершин, у G можна виділити систему m шляхів таку, що різні шляхи починаються у різних вершинах виділеної підмножини, закінчуються в різних вихідних полюсах графу G та не мають спільних дуг. Визначимо $Q(n, m)$, як мінімум кількості ребер у графах із множини всіх орієнтованих графів, які є (n, m)-концентраторами. У праці [6] показано, що $Q(n, m) \leq Cn + o(n)$.

Розглянемо орієнтований граф K, який складається з двох виділених множин вершин X і Y таких, що $X \cap Y = \varnothing$, $|X| = |Y| = n$. Граф K називаємо мережею комутації, якщо кожна вершина із множини X інцидентна одній вихідній дузі, а кожна вершина з множини Y інцидентна одній вхідній дузі. Всі інші вершини інцидентні двом вхідним і двом вихідним дугам. Відомо [6], що існують повні мережі комутації, які мають не більше, ніж $2n\log_2 n$ вершин.

Метою роботи є побудова алгоритмів синтезу графів (із мінімальною величиною максимальної степені вершин), які б одночасно володіли заданими множинами шляхів, що не неперетинаються, і заданою структурною надійністю.

2. Теорема про стійкість *k*-інформаційних графів

Теорема. Існують n-вершинні k-інформаційні графи ($k \leq n/\log_2 n + o(n/\log_2 n)$, де C — деяка константа), для яких $S_p(n, k) = Cp$.

Ідея доведення. Будуємо k-інформаційний граф $G(n, k)$, для якого $S_0(n, k) = C_1$ для всіх $k \le n/\log_2 n + o(n/\log_2 n)$. Далі будуємо спеціальний стійкий n-вершинний граф G_p, степінь вершин якого не перевищує Cp. При склеюванні (ототожненні відповідних вершин) його відповідним чином із k-інформаційним графом отримано граф $G(n, k) + G_p$, у якому шляхи, втрачені внаслідок вилучення вершин графу $G(n, k)$, відновлюються дугами графу G_p.

2.1. Побудова графу *G*(*n*, *k*). Знаходження верхньої оцінки величини $S(n, k)$ графу $G(n, k)$ вимагає побудови спеціального графу. Для цього описаний вище концентратор L, модифікуємо таким чином. Кожному вихідному полюсу i концентратора L ставимо у відповідність деяке кореневе дихотомічне дерево T_i, яке має стільки кінцевих вершин, скільки є суміжних вершин в i-го полюса. Видалимо всі дуги, інцидентні полюсу i, й ототожнимо корінь дерева T_i з полюсом i, а кожну з кінцевих вершин дерева T_i з однією з вершин, суміжних із полюсом i. Якщо в модифікованого (n, m) концентратора поміняти орієнтацію всіх дуг на протилежну, то отримаємо (m, n) розширювач. Для розширювачів також виконується *теорема 2*. Розглянемо конструкцію, зображену на рис. 1, де P_1 — модифікований (n, k)-концентратор, P_2 — модифікований (k, n)-розширювач, K — трикаскадна мережа комутації [7-8].

Бачимо, що дана конструкція дозволяє для будь-якої перестановки $l_1, l_2, ..., l_k$ номерів вихідних полюсів $j_1, j_2, ..., j_k$ встановити k шляхів, які починаються у будь-яких k вхідних полюсах і закінчуються в k вихідних полюсах $l_1, l_2, ..., l_k$ таким чином, що два довільні різні шляхи не мають жодної спільної дуги. Якщо тепер попарно ототожнити вхідні полюси з вихідними, то отримані таким чином вершини назвемо основними, а всі інші — допоміжними. Для такої множини вершин отримана мережа G_1 є k-інформаційним графом. У цьому випадку для довільних двох наборів k чисел $i_1, i_2, ..., i_k$ та $j_1, j_2, ..., j_k$ з множини $\{1, 2, ..., n\}$ і довільної перестановки $l_1, l_2, ..., l_k$ чисел $j_1, j_2, ..., j_k$ в мережі G_1 можна виділити k шляхів так, що перший шлях починається в i_1 основній вершині та закінчується в l_1 основній вершині, другий починається в i_2 основній вершині та закінчується в l_2 основній вершині і т. д., і жодних два різних шляхи не мають спільних дуг. Ці шляхи можуть проходити не тільки через основні вершини, але і через вершини модифікованого (n, k)-концентратора, мережу комутації K та модифікованого (k, n)-розширювача.

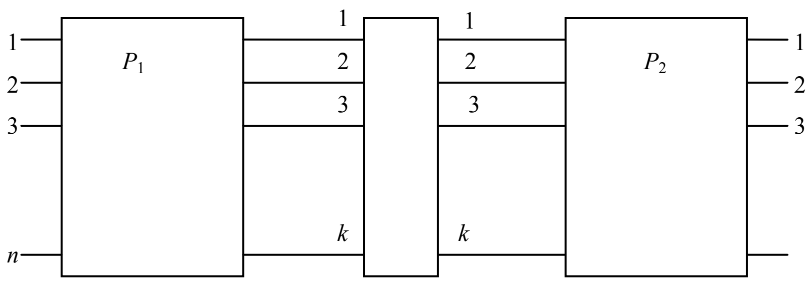

Рис. 1. Схема графу, на основі якого будується граф $G(n, k)$

Щоб перетворити мережу G_1 в k-інформаційний граф із n вершинами, потрібно розбити всі його вершини на n груп так, щоб у кожній групі була одна основна та деяка кількість допоміжних вершин, і стягнути кожну таку групу в одну вершину.

Отримана таким чином мережа складається з $2k\log_2 k$ вершин мережі комутацій (усі вони мають степінь 4), Cn вершин модифікованого концентратора та Cn вершин модифікованого розширювача, які мають степінь менший від деякої константи C_1. Якщо під час поділу на групи не застосовувати ніяких спеціальних засобів, то отримаємо, взагалі кажучи, інформаційний граф степені $8(k/n)\log_2 k + 2CC_1$. Бачимо, що основний вклад у степінь k-інформаційного графу дають вершини мережі комутацій. Якщо ж виділити групи вершин мережі G_1 так, щоб кожна група складалася не більше, ніж із C вершин модифікованого концентратора, C вершин модифікованого розширювача, а підмережа комутацій, яка входить у групу, була зв'язною підмережею такого ж виду, як і сама вихідна мережа комутацій, то степінь k-інформаційного графу можна зменшити. Справді, розділимо мережу комутацій на полоси висотою $\log_2 s$ і шириною s таким чином, щоб при $k \to \infty$ ($k \le n$) із точністю до деякої мультиплікативної константи виконувалася рівність $(k\log_2 k)/(s\log_2 s) = n$. Отже, кількість груп, на яку розбивається мережа, повинна бути пропорційною до числа n. Внаслідок стягування такої групи у вершину її степінь буде дорівнювати $2s$ [7-8]. Для спрощення будемо пропускати знаки цілої частини та константи, оскільки вони не впливають на головний член оцінки при $k \to \infty$. Якщо кількість вершин мережі комутацій пропорційна до числа n (тобто у разі виконання умови $n = k\log_2 k$), степінь k-інформаційного графу буде деякою константою. Це справджується, якщо $k = n/\log_2 n + o(n/\log_2 n)$.

2.2. Побудова мережі S_2. Нехай n і s — натуральні числа, які є степенями числа 2, і такі, що $r = (n - s^4)/s^2$ теж натуральне число. Розглянемо мережу S, схематично зображену на рис. 2. Вважаємо при цьому, що права частина схеми графу є симетрична лівій частині, яка зображена на цьому рисунку. Позначення в правій частині схеми відрізняються від позначень, прийнятих для лівої частини, рискою зверху. На цьому рисунку T та $\overline{T}$ — дихотомічні дерева висоти $\log_2 s$ (які мають

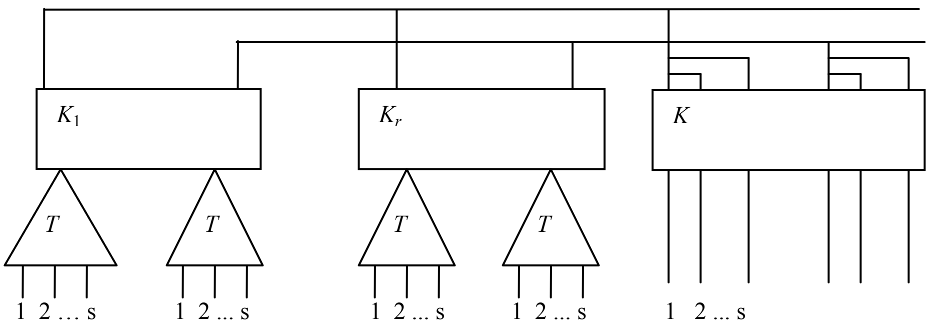

Рис. 2. Схема, використана для побудови графу $G(n, k)$

s кінцевих вершин), K_i та $\overline{K}$ — мережі комутацій, які мають s^4 вхідних і вихідних вершин. Вхідними вершинами мережі S будемо називати всі кінцеві вершини дерев T (які розташовані зліва) та вхідні вершини мережі комутацій K, вихідними — всі кінцеві вершини дерев $\overline{T}$ (що розташовані справа) та вихідні вершини комутаційної мережі $\overline{K}$. Будемо говорити, що вхідні (вихідні) вершини мережі S належать різним групам, якщо вони є кінцевими вершинами різних дерев T ($\overline{T}$) або різними полюсами мереж K $\left(\overline{K}\right)$. Очевидним є таке твердження: для довільних двох наборів вершин (вхідних і вихідних) $X = (x_1, x_2, ..., x_r)$ і $Y = (y_1, y_2, ..., y_r)$, де всі x_i й y_i $(i=\overline{1,r})$ належать різним групам і $|X| = |Y| \leq S$, можна виділити систему шляхів таку, що для кожного $x_i \in X$ в S знайдеться шлях, який має своїм початком x_i та кінцем $y_i \in Y$, і ніякі два шляхи не проходять вздовж однієї і тієї ж дуги.

Мережа S для $s \leq S(n, n)$ має не більше, ніж $8n$, вершин: $2n$ вхідних і $2n$ вихідних вершин, не більше, ніж $2n$, вершин мають всі мережі комутацій K_i, $\overline{K}_i$, K та $\overline{K}$ і не більше, ніж $2n$, використовується на з'єднання мереж комутацій у конструкцію. Степінь кожної вершини (включаючи вхідні та вихідні вершини) дорівнює 3 або 4.

На основі мережі S побудуємо мережу S_i, яка має n вершин. Для цього:

- пронумеруємо підряд (зверху вниз) вхідні та вихідні полюси мережі S числами 1, 2, ..., n і ототожнимо попарно вхідні та вихідні полюси, які мають однакові номери;
- поділимо множину всіх вершин отриманого графу на n підмножин так, щоб кожна з них містила одну ототожнену вершину та не більше, ніж 6 інших вершин. Стягнемо кожну таку підмножину до однієї вершини. Присвоїмо цій вершині номер ототожненої вершини. Отриманий граф і буде мережею S_1.

Таким чином, мережа S_1 має n пронумерованих вершин (полюсів). Будемо говорити, що вершини мережі S_1 із номерами i та j належать різним групам, якщо вхідні полюси мережі S із номерами i та j належать різним групам.

Справедливі наступні твердження:

- степінь кожної вершини мережі S_1 не перевищує 26 (і не залежить від n);
- для довільних двох упорядкованих наборів полюсів $X_1 = \left(x_1^1, ..., x_r^1\right)$ і $X_2 = \left(x_1^2, ..., x_r^2\right)$ мережі S_1 таких, що всі x_i^1 й x_i^2 $\left(i=\overline{1,r}\right)$ належать різним групам і $|X_1| = |X_2| \leq s$, можна виділити систему шляхів таку, що для кожного $x_i^1 \in X_1$ знайдеться шлях, який має своїм початком вершину x_i^1 і кінцем вершину $x_i^2 \in X_2$, та довільні два різних шляхи не мають жодної спільної дуги.

Модифікуємо мережу S_1 у мережу S_2, долучивши до неї нові дуги. Щоб у мережі S_2 відрізнити нові (додані) дуги від «старих» будемо вважати, що всі дуги вихідної мережі зафарбовані в «синій» колір, а дуги, які додаються, — у «червоний».

Кожній дузі (i, j) мережі S_1 (синьої дуги) ставлять у відповідність дві червоні дуги — $(i, j+1)$ та $(i+1, j)$.

Вважаємо, що $n+1$ відповідає 1. Якщо всі червоні дуги долучити до мережі S_1, то отримаємо мережу S_2. Можна показати, що степінь кожної вершини мережі S_2 не перевищує 78 (і не залежить від n). Для мережі S_2 виконується твердження 2, яке справедливе для мережі S_1 і до того ж мережа S_2 є I-стійка.

Доведемо друге твердження. Нехай система шляхів є такою, як вказано у другому твердженні, й α — деяка вершина, яка видаляється з мережі S_2. Припустимо, що α є в мережі S_2, і проведемо необхідну нам систему шляхів φ, використовуючи тільки сині дуги. Ділянки шляхів (довжини 2), які проходять через вершину α, замінимо ділянками, які складаються з відповідних їм червоних дуг, що проходять через вершину α + 1. Отримана система шляхів буде такою, як нам потрібно, що й доводить твердження.

Якщо застосувати цей спосіб забезпечення стійкості багаторазово, тобто за S_2 описанним вище способом будувати мережу S_3, за S_3 — мережу S_4 і т. д. (при цьому на кроці p «синій» дузі (i, j) ставимо у відповідність пару дуг $(i, j+p)$, $(i+p, j)$, то отримана мережа S_p буде p-стійкою та буде мати степінь не більший від Cp, а $n - s^2 > s$.

2.3. Побудова стійкого графу $G(n, k) + G_p$. Відомо [5], що існують n вершинні інформаційні графи степені $S(n) = c\log_2 n/\log_2\log_2 n$, де C — константа. Нехай G — інформаційних граф із цього класу, тобто має n вершин і степінь $S(n)$.

У довільній підмножині вершин цього інформаційного графу, який нараховує не менше за $S^4(n)$ вершин, знайдеться не менше, ніж $S(n)$ вершин, які розташовані попарно одна від іншої на відстані не меншій, ніж 3.

Вершини графу G нумеруємо наступним чином: вибираємо першу множину, яка складається з s вершин, що розташовані на відстані не меншій від 3, і нумеруємо ці вершини числами від 1 до s, потім другу та нумеруємо їх числами від $s+1$ до $2s$ т. д. до тих пір, поки не залишиться s^4 вершин, які нумеруємо підряд числами до n. Будуємо на n вершинах граф S_p так, щоб при побудові мережі S_1 значення s було не менше, ніж $S(n, n)$. Склеюємо графи G й S_p, ототожнюючи їх вершини, які мають однакові номери. Позначимо отриману мережу з n вершинами як $G + S_p$.

Покажемо, що мережа $G + S_p$ є інформаційним p-стійким графом.

Нехай $\pi = (i_1, i_2, ..., i_{n-1})$ деяка перестановка чисел $1, 2, ..., j-1, j+1, ..., n$. Оскільки граф G є інформаційним, то в ньому можна провести потрібні нам $n-1$ шляхів, але ці шляхи можуть проходити через вершину j. Щоб у графі $G + S_p$ з віддаленою вершиною j можна було провести такі шляхи, скористаємося тим, що всі вершини, суміжні вершині j, належать різним групам вершин мережі S_1 (оскільки вони розташовані на віддалі 2, а всі вершини мережі S_1, які належать одній групі, розташовані на віддалі не меншій, ніж 3) і їх не більше, ніж $S(n)$ штук. Тому ділянки шляхів довжиною 2, які проходять через вершину j, можуть замінити шляхами, які складаються з червоних дуг графу S_1. При видаленні другої вершини в мережі можна провести $n - 2$ шляхів також використовуючи дуги графу S_2 і т. д.

Таким чином ми показали, що існують n-вершинні k-інформаційні p-стійкі графи степені Cp, де C деяка константа, яка не перевищує 78.

Висновки. Запропоновані та реалізовані в роботі ідеї побудови графів із заданими властивостями можна застосувати для розв'язування багатьох практичних задач (розробки технічних пристроїв), які зводяться до екстремальних задач на графах.

Література

[1] *Седжвик Р.* Фундаментальные алгоритмы на *С*. — Санкт-Петербург: Техническая книга, 2003. — 672 с.
[2] *Нечепуренко М. И., Попков В. К., Майнагашев С. М.* и др. Алгоритмы и программы решения задач на графах. — Новосибирск: Наука, 1990. — 515 с.
[3] *Свами М., Тхуласираман К.* Графы, сети и алгоритмы. — М.: Мир, 1984. — 455 с.
[4] *Оре О.* Теория графов. — М.: Наука, 1980. — 336 с.
[5] *Кратко М. И.* Информационные графы // Сибирский математический журнал. — 1970. — Т. 11, № 5. — С. 1093-1097.
[6] *Бассалыго Л. А.* Асимптотически оптимальные коммутационные схемы // Проблемы передачи информации. — 1981. — № 3. — С. 46-53.
[7] *Kratko M. I., Pritula M. G.* Universal networks for informational exchanges // Four Formator Symposium. — Prague: Academia, 1983. — P. 303-314.
[8] *Кратко М. И., Притула М. Г.* О системах маршрутов на графах. В кн.: Архитектура ЭВМ и численные методы. — М., 1988. — С. 77-89.

Graphs with the set system of routes and structural stability

Myroslav Prytula

The algorithm of graph construction with the set systems of routes not crossed on edges is proposed. A connection between system of routes and the maximal degree of graph nods is established. Graphs that have the set system of non-crossed routes and the minimal degree of their nodes are constructed. The structural graph stability is investigated. Algorithms for providing the set structural stability of the graph are developed by a minimum quantity of additional edges.

Графы с заданною системой маршрутов и структурной устойчивостью

Мирослав Притула

В работе предложен алгоритм построения графов с заданными системами непересекающихся по ребрам маршрутов. Между системой маршрутов и максимальной степенью вершин графа установлена связь. Построены графы, владеющие заданной системой непересекающихся маршрутов и минимальной степенью его вершин. Рассмотрены вопросы структурной устойчивости графов. Разработаны алгоритмы обеспечения заданной структурной устойчивости графа минимальным количеством дополнительных ребер.

Отримано 07.02.08