[Чинний від 2003 – 09 – 01]. – К. : Держспоживстандарт України, 2003. – ІІІ. 42 с. – (Національний стандарт України).
2. Технічний захист інформації. Комп'ютерні системи. Порядок створення, впровадження, супроводження та модернізації засобів технічного захисту інформації від несанкціонованого доступу : НД ТЗІ 3.6-001-2000. – Офіц. вид. – К. : НікС : Департамент спеціальних телекомунікаційних систем та захисту інформації Служби безпеки України, 1999. – ІІІ. 5 с. (Нормативний документ системи технічного захисту інформації).
3. Примірна інструкція з діловодства у міністерствах, інших центральних органах виконавчої влади, Раді міністрів Автономної Республіки Крим, місцевих органах виконавчої влади. Затверджена постановою Кабінету Міністрів України від 17 жовтня 1997 р. за № 1153.– Офіц. вид. – К.: Офіційний вісник України. – 1997.– № 43.–Ст. 50.

Поступила 27.09.2010р.

УДК 519.6

Л.В. Мосенцова, аспирант
Институт проблем моделирования в энергетике
им. Г. Е. Пухова НАН Украины, Киев

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ В СРЕДЕ MATLAB ИТЕРАЦИОННОГО АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ УРЫСОНА I РОДА

Введение. Среди современных программных средств выделяют среду MATLAB, как наиболее универсальную и мощную. Она является одной из старейших, тщательно проработанных и проверенных временем систем автоматизации математических расчетов, построенная на расширенном представлении и применении матричных операций.

Модифицируемость системы Matlab и возможность ее адаптации к решению специфических задач науки и техники привели к созданию пакетов прикладных программ (toolbox), что расширило область применения системы. Достоинство состоит в том, что это расширение достигается естественным путем и реализуется в виде так называемых m-файлов. Однако, несмотря на то, что среда развита в разных направлениях вычислений, при этом практически не реализован аппарат интегральных уравнений, в частности, нелинейных. Нелинейные интегральные уравнения типа Фредгольма I рода описывают различные физические явления, такие как задача определения поверхности раздела двух сред по результатам гравиметрических измерений, задача акустического рассеяния, задача определения формы аномалиеобразующего тела по результатам гравиметрических измерений.

В связи с этим в данной работе предлагается программная реализация в системе Matlab одного из итерационных алгоритмов решения нелинейных интегральных уравнений типа Фредгольма I рода путем создания дополнительных модулей.

Постановка задачи. Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение Урысона I рода [2]

$$A(x) \equiv \int_a^b K(t,s,x(s))ds = y(t), \;\; a \le t \le b\,, \tag{1}$$

где $K(t,s,x(s)), \, y(t)$ - непрерывные функции.

Так как задача (1) некорректно поставлена, то для применения итерационных методов типа Ньютона необходима предварительная регуляризация. Для монотонных на всем пространстве операторов A применима регуляризация в форме сдвига [1].

$$A(x) + \alpha x = y\,, \tag{2}$$

А для монотонных на некотором выпуклом замкнутом множестве D операторов A - регуляризация в форме вариационного неравенства

$$< A(x) + \alpha x - y, u - x >_{L_2} \ge 0 \;\forall u \in D. \tag{3}$$

Численный алгоритм. Используем квадратурную форму с равномерным разбиением и перейдем от уравнения (1) к системе нелинейных уравнений

$$\begin{cases} A_n(x_n)_1 = \sum\limits_{j=0}^{n} \beta_j K(t_1, s_j, x(s_j)) = y(t_1) \\ A_n(x_n)_2 = \sum\limits_{j=0}^{n} \beta_j K(t_2, s_j, x(s_j)) = y(t_2) \\ \ldots \\ A_n(x_n)_n = \sum\limits_{j=0}^{n} \beta_j K(t_n, s_j, x(s_j)) = y(t_n). \end{cases} \tag{4}$$

На основании схемы регуляризации (2) перейдем к регуляризированной системе уравнений

$$\begin{cases} A_n(x_n)_1 + \alpha(x_n)_1 = \sum\limits_{j=0}^{n} \beta_j K(t_1, s_j, x(s_j)) + \alpha(x_n)_1 = y(t_1) \\ A_n(x_n)_2 + \alpha(x_n)_2 = \sum\limits_{j=0}^{n} \beta_j K(t_2, s_j, x(s_j)) + \alpha(x_n)_2 = y(t_2) \\ \ldots \\ A_n(x_n)_n + \alpha(x_n)_n = \sum\limits_{j=0}^{n} \beta_j K(t_n, s_j, x(s_j)) + \alpha(x_n)_n = y(t_n). \end{cases} \tag{5}$$

Для решения нелинейной системы (5) в качестве базового применяется метод Ньютона [3]

$$x_n^{k+1} = x_n^k - \left[F'\left[x_n^k\right]\right]^{-1}\left(F\left(x_n^k\right)\right) \equiv T\left(x_n^k\right), \tag{6}$$

где $F\left[x_n^k\right] = A_n(x_n) + \alpha(x_n) - y_n$.

На основе (6) рассмотрим итерационную схему

$$x_n^{k+1} = \gamma_{k+1} U\left(x_n^k\right) + \left(1 - \gamma_{k+1}\right) v_0, \; k = 0,1,..., \tag{7}$$

где $U = 0{,}5I + 0{,}5T$, . $0 < \gamma_k < 1$ T – оператор шага в методе Ньютона (6). Переход от оператора T к U обусловлен лучшим свойством сжимаемости оператора U [1].

Регуляризация базового уравнения задачи гравиметрии. Пусть в области $D = \{-l \le t \le l, -H \le x \le -H + x(t)\}$ распределены источники гравитационного поля с плотностью ρ, возмущающего поля тяготения Земли. Потенциал V такого поля выражается двойным интегралом

$$\begin{aligned} V(t,x) &= \frac{1}{2\pi} \iint_D \rho \ln\left(\frac{1}{\sqrt{(t-\xi)^2 + (x-\zeta)^2}} \right) ds = \\ &= -\frac{\rho}{4\pi} \int_{-l}^{l} d\xi \int_{-H}^{-H+x(\xi)} \ln\left[(t-\xi)^2 + (x-\zeta)^2 \right] d\zeta \end{aligned} \tag{8}$$

Отсюда для х-компоненты гравитационного поля имеем

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V(t,x)}{\partial x} &= -\frac{\rho}{4\pi} \int_{-l}^{l} d\xi \int_{-H}^{-H+x(\xi)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \ln\left[(t-\xi)^2 + (x-\zeta)^2 \right] d\zeta = \\ &= \frac{\rho}{4\pi} \int_{-l}^{l} \ln \frac{(t-\xi)^2 + (x+H)^2}{(t-\xi)^2 + (x+H-x(\xi))^2} \end{aligned} \tag{9}$$

В частности, на дневной поверхности $x = 0$ имеем

$$A(x)(t) \equiv \frac{\rho}{4\pi} \int_{-l}^{l} \ln \frac{(t-\xi)^2 + H^2}{(t-\xi)^2 + (H - x(\xi))^2} d\xi = y(t), \tag{10}$$

где $y(t) = -\dfrac{\partial V(t,0)}{\partial x}$ - аномалия напряжения силы тяжести, экспериментально определяемая величина.

Операторное уравнение $A(x) = y$, определяемое соотношением (10), рассматривается на паре гильбертовых пространств $X = W_2^1[-1,1]$, $Y = L_2[-1,1]$, причем нелинейный оператор A из (1.9) не является монотонным в L_2. Действительно, положив $x_1(t) = 0$, $x_2(t) = 3H$, имеем

$$< A(x_2) - A(x_1), x_2 - x_1 >_{L_2(W_2^1)} = \frac{3H\rho}{4\pi}\int_{-l}^{l} \ln\frac{H^2 + (t-\xi)^2}{(t-\xi)^2 + 4H_2} d\xi dt < 0 .$$

Таким образом, задача определения поверхности раздела между двумя средами с разными постоянными плотностями $\rho_1 > \rho_2$ по аномалии силы тяжести сводится к решению нелинейного интегрального уравнения (10), где $\rho = \rho_{1-}\rho_2$.

Применяя (4) к (10) получим систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} A_n(x_n)_1 = \sum_{j=0}^{n} \beta_j \ln\frac{H^2 + (t_1 - s_j)^2}{(t_1 - s_j)^2 + (x_{n_j} - H)^2} = y(t_1) \\ A_n(x_n)_2 = \sum_{j=0}^{n} \beta_j \ln\frac{H^2 + (t_2 - s_j)^2}{(t_2 - s_j)^2 + (x_{n_j} - H)^2} = y(t_2) \\ \ldots \\ A_n(x_n)_n = \sum_{j=0}^{n} \beta_j \ln\frac{H^2 + (t_n - s_j)^2}{(t_n - s_j)^2 + (x_{n_j} - H)^2} = y(t_n). \end{cases} \quad (11)$$

Исходя из (5) имеем

$$\begin{cases} A_n(x_n)_1 + \alpha(x_n)_1 = \sum_{j=0}^{n} \beta_j \ln\frac{H^2 + (t_1 - s_j)^2}{(t_1 - s_j)^2 + (x_{n_j} - H)^2} + \alpha(x_n)_1 = y(t_1) \\ A_n(x_n)_2 + \alpha(x_n)_2 = \sum_{j=0}^{n} \beta_j \ln\frac{H^2 + (t_2 - s_j)^2}{(t_2 - s_j)^2 + (x_{n_j} - H)^2} + \alpha(x_n)_2 = y(t_2) \\ \ldots \\ A_n(x_n)_n + \alpha(x_n)_n = \sum_{j=0}^{n} \beta_j \ln\frac{H^2 + (t_n - s_j)^2}{(t_n - s_j)^2 + (x_{n_j} - H)^2} + \alpha(x_n)_n = y(t_n). \end{cases} \quad (12)$$

В силу немонотонности оператора A в задаче гравиметрии (10) возникает вопрос о сходимости метода регуляризации (2).В [1] получено обоснование алгоритма регуляризации на дискретном уровне.

Алгоритм решения задачи релизован в программе Solt_Ur, составленной в среде моделирования Матлаб и реализован на ЭВМ типа IBM PC.

Восстановление модельного решения. Таким образом, решается практическая задача (10), с точным решением $x_M(t) = (1-t^2)^2$ и исходными данными: $l = 1$; $t \in [-1,1]$; $\rho = 1$; $n = 100$; $h = 2/100$; $s_j = -1 + 2j/100$; $t_i = -1 + 2i/100$; $i, j = 0,1,...,100$.

Аппроксимация интеграла осуществляется на основании формулы Симпсона.

В качестве начальных служат функции:

$$x_0 = 0{,}95(1-|t|),\ x_0 = 0{,}5(1-|t|),\ x_0 = 0{,}5,\ x_0 = 1.$$

Результаты численного эксперимента по схеме (7) при различных значениях α после пяти итераций приведены в табл. 1-4. При этом качество итерационного решения характеризуется величинами

$$\Delta_1 = \left\| x_n^k - x_M \right\|_{l_2^n},\ \Delta_2 = \Delta_1 / \left\| x_M \right\|_{l_2^n},\ \Delta_3 = \max_i | x_{ni}^k - x_M(t_i) |,$$

$$\Delta_4 = \left\| F_n(x_n^k) \right\|_{l_2^n},\ \left\| x_n^k \right\|_{l_2^n} = \sum_{i=1}^{n} h \left| x_{ni} \right|^2 .$$

Таблица 1

Значения величин погрешностей при $\alpha = 10^{-2}$,

$\gamma_k = (1 - k^{-0.9} * 0{,}01)$, $v_0 = x_M$

$\alpha = 10^{-2}$	$\gamma_k = (1 - k^{-0.9} * 0{,}01)$			$v_0 = x_M$
Δ \ x_0	0,95(1-|t|)	0,5(1-|t|)	0,5	1,0
Δ_1	0.2151	0.2147	0.2204	0.2223
Δ_2	0.2386	0.2381	0.2445	0.2466
Δ_3	0.2055	0.2049	0.2116	0.2199
Δ_4	0.0083	0.0081	0.0084	0.0042

Таблица 2

Значения величин погрешностей при $\alpha = 10^{-2}$,

$\gamma_k = (1 - k^{-0.9} * 0{,}01)$, $v_0 = 0{,}5 x_M$

$\alpha = 10^{-2}$	$\gamma_k = (1 - k^{-0.9} * 0{,}01)$			$v_0 = 0{,}5 x_M$
Δ \ x_0	0,95(1-|t|)	0,5(1-|t|)	0,5	1,0
Δ_1	0.2163	0.2176	0.2215	0.2236
Δ_2	0.2400	0.2414	0.2457	0.2237
Δ_3	0.2080	0.2131	0.2140	0.2238
Δ_4	0.0088	0.0104	0.0088	0.2239

Таблица 3

Значения величин погрешностей при $\alpha = 10^{-3}$,
$\gamma_k = (1 - k^{-0.9} * 0{,}01)$, $v_0 = 0{,}5 x_M$

$\alpha = 10^{-3}$	$\gamma_k = (1 - k^{-0,9} * 0{,}01)$		$v_0 = 0{,}5 x_M$	
Δ \ x_0	0,95(1-|t|)	0,5(1-|t|)	0,5	1,0
Δ_1	0.0414	0.0393	0.0433	0.0557
Δ_2	0.0460	0.0436	0.0480	0.0618
Δ_3	0.0454	0.0462	0.0478	0.0659
Δ_4	0.0019	0.0033	0.0018	0.0030

Таблица 4

Значения величин погрешностей при $\alpha = 10^{-3}$,
$\gamma_k = (1 - k^{-0.9} * 0{,}01)$, $v_0 = 0{,}5(1 - |t|)$

$\alpha = 10^{-3}$	$\gamma_k = (1 - k^{-0,9} * 0{,}01)$		$v_0 = 0{,}5(1 - \|t\|)$	
Δ \ x_0	0,95(1-|t|)	0,5(1-|t|)	0,5	1,0
Δ_1	0.0416	0.0395	0.0435	0.0559
Δ_2	0.0462	0.0438	0.0482	0.0620
Δ_3	0.0456	0.0462	0.0480	0.0661
Δ_4	0.0019	0.0033	0.0018	0.0029

Таблица 5

Значения величин погрешностей при $\alpha = 10^{-3}$,
$\gamma_k = (1 - k^{-0,5} * 0{,}01)$, $v_0 = 0{,}5 x_M$

$\alpha = 10^{-3}$	$\gamma_k = (1 - k^{-0,5} * 0{,}01)$		$v_0 = 0{,}5 x_M$	
Δ \ x_0	0,95(1-|t|)	0,5(1-|t|)	0,5	1,0
Δ_1	0.0421	0.0401	0.0439	0.0557
Δ_2	0.0467	0.0445	0.0487	0.0618
Δ_3	0.0449	0.0460	0.0473	0.0651
Δ_4	0.0022	0.0035	0.0021	0.0026

Табл. 1 и 2 показывают влияние пробной функции на качество решения. Наиболее благоприятный вариант $v_0 = x_M$ дает и наилучшее по точности решение при параметре $\alpha = 10^{-2}$.

Так как решается уравнение с невозмущенными данными, то уменьшение α приводит к уменьшению погрешности. Это следует из сравнения табл. 2 и 3. Значения величин Δ_i, приведенные в табл. 4 , показывают, что при достаточно грубой функции $x(t) = 0{,}5(1-|t|)$ уже после пяти итераций схема (7) дает вполне удовлетворительный результат. Из табл. 3-5 видно, что γ_k можно выбирать в широком диапазоне.

Заключение. Полученные результаты свидетельствуют о том, что данный алгоритм является эффективным, быстро сходящимся, позволяет получить высокую точность данных даже при достаточно грубых начальных функциях.

1. *Васин В. В, Агеев А.Л.*. Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеренбург.: УИФ «Наука», 1993.-263с.

2. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. - К.: Наукова думка, 1986. - 544 с.

3. *Ортега Дж.*, *Рейнболдт В*. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. - М.: Мир, 1975.-560с.

Поступила 20.09.2010р.

УДК 621.372

А.М. Корнеев

ДВА СПОСОБА ПРИМЕНЕНИЯ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА ПРИ РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЯЗКОУПРУГИХ СИСТЕМ

Введение. Достаточно эффективным методом численного решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений многих задач наследственной теории вязкоупругости является метод последовательных приближений [1]. Важным свойством метода является то, что в ряде случаев он позволяет построить приближенное аналитическое решение. Метод применим к линейным, и нелинейным интегральным уравнениям. В работе предлагается модификация вычислительной схемы при выполнении традиционного итерационного алгоритма, а также применение усовершенствованной