

людиною, неминуче зіштовхується з необхідністю формального представлення нечітких понять, параметрів і механізмів їх взаємного впливу. При використанні існуючого операторного різноманіття теорії нечітких множин варто ретельно співвідносити вигляд оператора з характером завдання (що у переважній більшості практичних додатків зараз не робиться).

Модель процесу синтезу рішень може бути створена на основі нечіткого структурного графу, що формується при опитуванні компетентного експерта. Така модель застосовувана для підтримки прийняття рішень менш кваліфікованої ЛПР чи в умовах гострого дефіциту часу.

У відносно складних задачах, якщо потужність множини вихідних вершин нечіткого структурного графу Q перевищує 6–10, варто використовувати методику виділення автономних підграфів для зниження розмірності системи розв'язуваних лінійних рівнянь.

- 1 Ларичев О.М. Принятие решений как научное направление: методологические проблемы. Системные исследования (Ежегодник). –М.: Наука, –1982.
- 2 Емельянов С.В., Ларичев О.И. Многокритериальные методы принятия решений. – М.: Знание, –1985. –32 с.
- 3 Шапиро Д.И. Принятие решений в системах организационного управления. –М.: Энергоатомиздат, –1983. –184 с.
- 4 Поспелов Д.А. Ситуационное управление: теория и практика. –М.: Наука, –1986.

Поступила 22.02.2010р.

УДК 517.958:536.72

О.Ю.Чернуха, В.Є.Гончарук, Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С.Підстригача НАН України; Національний університет «Львівська політехніка»

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МІГРАЦІЇ ЗАБРУДНЕННЯ У ГРУНТІ З ОБМЕЖЕНОГО ДЖЕРЕЛА

Вступ. При розв'язанні ряду прикладних задач технічної екології, пов'язаних зокрема з оцінкою захищеності ґрунтових вод від поверхневих забруднень, необхідно використовувати певні розрахункові дані про розподіл домішкової речовини у верхніх приповерхневих шарах ґрунту. Такі розподіли визначаються умовами на вільній поверхні шару і особливостями кінетики процесу переносу домішки, які обумовлені впливом структури середовища. До них у першу чергу відносять ті особливості, що зв'язані з можливістю міграції частинок різними шляхами [1, 2].

У даній роботі знайдено розв'язок задачі вертикальної гетеродифузії

забруднюючої речовини одного хімічного сорту двома шляхами [3] для шару при врахуванні обмеженості джерела маси на вільній поверхні.

Постановка задачі. Позначимо через $c_1(t, x)$ концентрацію забруднюючої речовини, що мігрує у водному поровому розчині, $c_2(t, x)$ - концентрацію частинок, які дифундують в адсорбованих на скелеті ґрунту шарах води (t - час [с], x - глибина [м]). При цьому коефіцієнти дифузії частинок одного і того ж хімічного сорту в розчині та в сорбованій воді можуть різнитися на порядок або й більше [4, 5]. Тому розрізняють різні шляхи міграції домішкової речовини, а коли такий процес супроводжується взаємними переходами частинок між різними шляхами міграції (сорбція-десорбція), то його називають гетеродифузією [2].

Процес гетеродифузії домішки двома шляхами описується наступною системою диференціальних рівнянь [3, 6] в безрозмірній формі [2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_1}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 c_1}{\partial \xi^2} + d_1 \frac{\partial^2 c_2}{\partial \xi^2} - ac_1 + c_2, \\ \frac{\partial c_2}{\partial \tau} &= d_2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial \xi^2} + d \frac{\partial^2 c_2}{\partial \xi^2} + ac_1 - c_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут d , d_1 , d_2 - коефіцієнти дифузії забруднюючої домішки в адсорбованих шарах води та перехресні коефіцієнти дифузії, нормовані до коефіцієнта дифузії D_1 частинок у водному розчині; a - відношення інтенсивності процесу переходу частинок з розчину в адсорбовану воду до інтенсивності k_2 зворотного переходу. Змінні $\tau = k_2 t$, $\xi = (k_2/D_1)^{1/2} x$ - безрозмірні час та просторова координата.

Приймемо, що сумарна концентрація домішки, яка поступає з поверхні у ґрунт, є c_0 ($c_0 \equiv const$), при цьому між водним розчином і адсорбованою водою вона розподіляється наступним чином

$$c_1(\tau, \xi)|_{\xi=0} = \alpha c_0, \quad c_2(\tau, \xi)|_{\xi=0} = (1 - \alpha)c_0, \quad (2)$$

де α - додатний параметр ($0 \leq \alpha \leq 1$), який визначає долю домішкової речовини, що з поверхні ґрунту потрапляє у розчин. На нижній границі шару забруднення відсутнє, тобто

$$c_1(\tau, \xi)|_{\xi=\xi_0} = c_2(\tau, \xi)|_{\xi=\xi_0} = 0. \quad (3)$$

Початкові умови також прийняті нульовими (тобто до моменту часу $\tau = 0$ ґрунт був незабруднений)

$$c_1(\tau, \xi)|_{\tau=0} = c_2(\tau, \xi)|_{\tau=0} = 0. \quad (4)$$

Задача (1)-(4) описує міграцію домішкової речовини доки через поверхню в ґрунт не поступить кількість речовини Q :

$$\int_0^{\tau_0} J(0, \tau) d\tau = Q. \quad (5)$$

Тут τ_0 – момент часу, за який кількість домішкової речовини Q проникне у ґрунт, як правило, є невідомим і підлягає визначенню.

Для часів $\tau > \tau_0$ процес перенесення домішки залишається тим самим, тобто і далі описується системою диференціальних рівнянь (1). При цьому приймається відсутність потоку забруднення як через поверхню ґрунту, так і через нижню границю шару, тобто

$$\left. \frac{\partial c_1(\tau, \xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = \left. \frac{\partial c_2(\tau, \xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = \left. \frac{\partial c_1(\tau, \xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_0} = \left. \frac{\partial c_2(\tau, \xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_0} = 0. \quad (6)$$

За початкові умови приймаються значення відповідних концентрацій в момент часу τ_0

$$c_1(\tau, \xi)|_{\tau=\tau_0} = c_1^*(\tau_0), \quad c_2(\tau, \xi)|_{\tau=\tau_0} = c_2^*(\tau_0), \quad (7)$$

де $c_1^*(\tau_0)$, $c_2^*(\tau_0)$ – розв'язки задачі (1)-(4) при $\tau = \tau_0$.

Побудова розв'язку задачі гетеродифузії з обмеженого джерела. Для крайової задачі (1)-(4) при $\tau \leq \tau_0$ розв'язок шукаємо з допомогою інтегральних перетворень Лапласа за часом та \sin -перетворення Фур'є за просторовою координатою. Тоді отримаємо вирази для концентрацій [2]: у водному розчині

$$\begin{aligned} c_1(\tau, \xi) = & \alpha c_0 \left(1 - \frac{\xi}{\xi_0} \right) - A \left(1 - \frac{\xi}{\xi_0} - \frac{\text{sh } k(\xi_0 - \xi)}{\text{sh } k\xi_0} \right) - \\ & - 2c_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin y_n \xi}{n\pi(s_1 - s_2)} [A_{11}e^{s_1\tau} - A_{12}e^{s_2\tau}], \end{aligned} \quad (8a)$$

в адсорбованій воді

$$\begin{aligned} c_2(\tau, \xi) = & (1 - \alpha)c_0 \left(1 - \frac{\xi}{\xi_0} \right) - B \left(1 - \frac{\xi}{\xi_0} - \frac{\text{sh } k(\xi_0 - \xi)}{\text{sh } k\xi_0} \right) - \\ & - 2c_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin y_n \xi}{n\pi(s_1 - s_2)} [B_{11}e^{s_1\tau} - B_{12}e^{s_2\tau}], \end{aligned} \quad (8б)$$

сумарна концентрація забруднення в ґрунті

$$\begin{aligned} c(\tau, \xi) = & c_0 \left(1 - \frac{\xi}{\xi_0} \right) - (A + B) \left(1 - \frac{\xi}{\xi_0} - \frac{\text{sh } k(\xi_0 - \xi)}{\text{sh } k\xi_0} \right) - \\ & - 2c_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin y_n \xi}{n\pi(s_1 - s_2)} [(A_{11} + B_{11})e^{s_1\tau} - (A_{12} + B_{12})e^{s_2\tau}], \end{aligned} \quad (8в)$$

ТУТ $y_n = n\pi/\xi_0$, $A = \frac{c_0\alpha_a}{d_a}d_1^*$, $B = \frac{c_0\alpha_a}{d_a}d_2^*$, $k = \sqrt{d_a/d^*}$, $\alpha_a = \alpha a + \alpha - 1$,

$A_1 = \alpha(1 + a) + d_{1a}y_n^2$, $A_2 = \alpha_a d_1^* y_n^2$, $d_1^* = d + d_1$, $B_1 = (1 - \alpha)(1 + a) + d_{2a}y_n^2$,

$B_2 = \alpha_a d_2^* y_n^2$, $d_2^* = 1 + d$, $d_{1\alpha} = \alpha d - (1 - \alpha) d_1$, $d_{2\alpha} = \alpha d_2 - (1 - \alpha)$; s_1 , s_2 - розв'язки рівняння $s^2 + \eta_1 s + \eta_2 = 0$, де коефіцієнти визначаються так: $\eta_1 = 1 + a + (1 + d) y_n^2$, $\eta_2 = d_a + d^* y_n^2$, тут $d^* = d - d_1 d_2$, $d_a = a d_1^* + d_2^*$.

Шукаємо сумарний потік через поверхню $\xi = 0$:

$$\begin{aligned} -J_0(k_2 / D_1)^{-1/2} &= d_2^* \frac{\partial c_1(\tau, \xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} + d_1^* \frac{\partial c_2(\tau, \xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = \\ &= -\frac{c_0 d_\alpha^*}{\xi_0} + \frac{c_0}{\xi_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{s_1 - s_2} \left[(A_n - d_\alpha^* s_1) e^{s_1 \tau} - (A_n - d_\alpha^* s_2) e^{s_2 \tau} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Тут $A_n = y_n^2 (\alpha d_2 (d - 1) - d^*) - (1 + a) d_\alpha^*$, $d_\alpha^* = \alpha d_2^* + (1 - \alpha) d_1^*$.

Проінтегруємо вираз для потоку (9) від 0 до τ_0

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_0} J_0(\tau) d\tau &= (k_2 / D_1)^{1/2} \left\{ \frac{c_0 d_\alpha^*}{\xi_0} \tau_0 - \frac{c_0 d_\alpha^*}{\xi_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{s_1 - s_2} \left[\frac{1}{s_1} (e^{s_1 \tau_0} - 1) (A_n - d_\alpha^* s_1) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{s_2} (e^{s_2 \tau_0} - 1) (A_n - d_\alpha^* s_2) \right] \right\} = Q. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким чином для визначення τ_0 отримано нелінійне алгебраїчне рівняння. Це рівняння розв'язувалось чисельно за допомогою Regular falsi методу [7], тобто послідовні наближення будуємо за формулою

$$\tau^{[j+1]} = \tau^{[j]} - \frac{\tau^{[j]} - \tau^{[j-1]}}{f(\tau^{[j]}) - f(\tau^{[j-1]})} f(\tau^{[j]}). \quad (11)$$

За початкове наближення вибрано $\tau^{[0]} = 1$; розрахунки проводились з точністю $\varepsilon = 10^{-2}$. Функція $f(\tau)$ в даному випадку має вигляд

$$\begin{aligned} f(\tau) &= (k_2 / D_1)^{-1/2} \frac{\xi_0}{c_0 d_\alpha^*} Q + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{s_1 - s_2} \left[\frac{1}{s_1} (e^{s_1 \tau} - 1) (A_n - d_\alpha^* s_1) - \frac{1}{s_2} (e^{s_2 \tau} - 1) (A_n - d_\alpha^* s_2) \right]. \end{aligned}$$

Розв'язок задачі (1), (6), (7), де значення концентрацій в початковий момент часу визначаються співвідношеннями (8) при $\tau = \tau_0$, шукаємо з допомогою скінченного сос-перетворення Фур'є за просторовою координатою та перетворення Лапласа за часом. В результаті отримаємо: концентрацію у водному поровому розчині

$$c_1(\tau, \xi) = \frac{L_0^{(1)} + L_0^{(2)}}{\xi_0 (1 + a)} + \frac{1}{\xi_0} \left[L_0^{(1)} - \frac{1}{1 + a} (L_0^{(1)} + L_0^{(2)}) \right] e^{-(1+a)\tau} +$$

$$+ \frac{2}{\xi_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos y_n \xi}{s_1 - s_2} \left\{ \left[K^{(1)} s_1 + K_*^{(1)} \right] e^{s_1 \tau} - \left[K^{(1)} s_2 + K_*^{(1)} \right] e^{s_2 \tau} \right\}, \quad (12a)$$

в адсорбованій воді

$$c_2(\tau, \xi) = a \frac{L_0^{(1)} + L_0^{(2)}}{\xi_0(1+a)} + \frac{1}{\xi_0} \left[L_0^{(2)} - \frac{a}{1+a} (L_0^{(1)} + L_0^{(2)}) \right] e^{-(1+a)\tau} + \\ + \frac{2}{\xi_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos y_n \xi}{s_1 - s_2} \left\{ \left[K^{(2)} s_1 + K_*^{(2)} \right] e^{s_1 \tau} - \left[K^{(2)} s_2 + K_*^{(2)} \right] e^{s_2 \tau} \right\}, \quad (12б)$$

сумарну концентрацію в шарі

$$c(\tau, \xi) = \frac{1}{\xi_0} \left[L_0^{(1)} + L_0^{(2)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos y_n \xi}{s_1 - s_2} \left\{ \left[\left(K^{(1)} + K^{(2)} \right) s_1 + K_*^{(1)} + K_*^{(2)} \right] e^{s_1 \tau} - \right. \right. \\ \left. \left. - \left[\left(K^{(1)} + K^{(2)} \right) s_2 + K_*^{(1)} + K_*^{(2)} \right] e^{s_2 \tau} \right\} \right]. \quad (12B)$$

$$\text{Тут } L_0^{(1)} = \frac{\xi_0}{2} (\alpha c_0 - A) - \frac{A}{\text{sh } k \xi_0} \left[1 - \frac{1}{k} \text{ch } k \xi_0 \right],$$

$$L_0^{(2)} = \frac{\xi_0}{2} ((1-\alpha)c_0 + B) - \frac{B}{\text{sh } k \xi_0} \left[1 - \frac{1}{k} \text{ch } k \xi_0 \right],$$

$$L_{nm}^{(1)} = \frac{2c_0 \xi_0 [(-1)^m - 1]}{(m\pi)^2 (s_1 - s_2)} \left[\left(A_1 + \alpha s_1 + \frac{A_2}{s_1} \right) e^{s_1 \tau_0} - \left(A_1 + \alpha s_2 + \frac{A_2}{s_2} \right) e^{s_2 \tau_0} \right],$$

$$L_{nm}^{(2)} = -\frac{2c_0 \xi_0 [(-1)^m - 1]}{(m\pi)^2 (s_1 - s_2)} \left[\left(B_1 - (1-\alpha)s_1 + \frac{B_2}{s_1} \right) e^{s_1 \tau_0} - \left(B_1 - (1-\alpha)s_2 + \frac{B_2}{s_2} \right) e^{s_2 \tau_0} \right],$$

$$K_0^{(1)} = (\alpha c_0 - A) \xi_0 \frac{1 - (-1)^n}{(n\pi)^2} + \frac{Ak}{k^2 + y_n^2} \frac{\text{ch } k \xi_0 - (-1)^n}{\text{sh } k \xi_0} \quad \forall n,$$

$$K_0^{(2)} = ((1-\alpha)c_0 + B) \xi_0 \frac{1 - (-1)^n}{(n\pi)^2} - \frac{Bk}{k^2 + y_n^2} \frac{\text{ch } k \xi_0 - (-1)^n}{\text{sh } k \xi_0} \quad \forall n,$$

$$K_{nm}^{(1)} = -\frac{2c_0 \xi_0 [(-1)^{n+m} - 1]}{\pi^2 (s_1 - s_2) (n^2 - m^2)} \left[\left(A_1 + \alpha s_1 + \frac{A_2}{s_1} \right) e^{s_1 \tau_0} - \left(A_1 + \alpha s_2 + \frac{A_2}{s_2} \right) e^{s_2 \tau_0} \right],$$

$n \neq m,$

$$K_{nm}^{(2)} = \frac{2c_0 \xi_0 [(-1)^{n+m} - 1]}{\pi^2 (s_1 - s_2) (n^2 - m^2)} \left[\left(B_1 - (1-\alpha)s_1 + \frac{B_2}{s_1} \right) e^{s_1 \tau_0} - \right.$$

$$\left. - \left(B_1 - (1-\alpha)s_2 + \frac{B_2}{s_2} \right) e^{s_2 \tau_0} \right], \quad n \neq m. \text{ При } n = m \quad K_{nm}^{(1)} = K_{nm}^{(2)} = 0.$$

$$K_*^{(1)} = (1 + d y_n^2) K^{(1)} + (1 - d_1 y_n^2) K^{(2)}, \quad K_*^{(2)} = (a - d_1 y_n^2) K^{(1)} + (a + y_n^2) K^{(2)}.$$

Отже, ми отримали розв'язок крайової задачі (1)-(7): функції концентрації домішкових частинок (8) для часів $\tau \leq \tau_0$ і (12) для $\tau \geq \tau_0$. У момент часу $\tau = \tau_0$ відповідні вирази для $c_1(\tau, \xi)$, $c_2(\tau, \xi)$, $c(\tau, \xi)$ співпадають.

Потоки маси та кількість речовини, що пройшла через поверхню шару. Сумарний потік домішкової речовини на глибині $\xi = \xi^*$ для часів $\tau \leq \tau_0$ визначається за формулою:

$$-J_*(k_2/D_1)^{-1/2} = d_2^* \frac{\partial c_1(\tau, \xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi^*} + d_1^* \frac{\partial c_2(\tau, \xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi^*}. \quad (13)$$

Підставляючи в (13) вирази (8а) та (8б), отримаємо

$$J_*(\tau) = -\frac{c_0}{\xi_0} (k_2' D_1)^{1/2} \left\{ A_d + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos y_n \xi^*}{s_1 - s_2} \left[(A_d s_1 + A_d') e^{s_1 \tau} - (A_d s_2 + A_d') e^{s_2 \tau} \right] \right\}. \quad (14)$$

Для часів $\tau \geq \tau_0$ підставимо в (9) вирази для концентрацій (12а) та (12б), тоді маємо

$$J_{**}(\tau) = (k_2' D_1)^{1/2} \frac{2}{\xi_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin y_n \xi^*}{s_1 - s_2} \left[(K s_1 + K_*) e^{s_1 \tau} - (K s_2 + K_*) e^{s_2 \tau} \right], \quad (15)$$

де $K = d_2^* K^{(1)} + d_1^* K^{(2)}$, $K_* = d_2^* K_*^{(1)} + d_1^* K_*^{(2)}$.

Кількість домішкових частинок, що пройшла через поверхню тіла $\xi = \xi^*$ за час τ^* , є:

якщо $\tau^* \leq \tau_0$

$$Q_* = \frac{c_0}{\xi_0} (k_2' D_1)^{1/2} \left\{ -A_d \tau^* + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos y_n \xi^*}{s_1 - s_2} \left[\frac{1}{s_1} (A_d s_1 + A_d') (e^{s_1 \tau^*} - 1) - \frac{1}{s_2} (A_d s_2 + A_d') (e^{s_2 \tau^*} - 1) \right] \right\},$$

якщо $\tau^* \geq \tau_0$

$$Q_{**} = \int_0^{\tau_0} J_*(\tau) d\tau + \int_{\tau_0}^{\tau^*} J_{**}(\tau) d\tau = Q_* + \int_{\tau_0}^{\tau^*} J_{**}(\tau) d\tau,$$

тобто

$$Q_{**} = \frac{(k_2' D_1)^{1/2}}{\xi_0} \left\{ c_0 (-A_d \tau_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos y_n \xi^*}{s_1 - s_2} \left[\frac{1}{s_1} (A_d s_1 + A_d') (e^{s_1 \tau_0} - 1) - \frac{1}{s_2} (A_d s_2 + A_d') (e^{s_2 \tau_0} - 1) \right] + \right.$$

$$+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin y_n \xi^*}{s_1 - s_2} \left[(Ks_1 + K_*) \left(e^{s_1 \tau^*} - e^{s_1 \tau_0} \right) - (Ks_2 + K_*) \left(e^{s_2 \tau^*} - e^{s_2 \tau_0} \right) \right] \Bigg\}.$$

Зокрема, кількість мігруючої речовини, що за час τ^* пройшла через шар є якщо $\tau^* \leq \tau_0$

$$Q_* = \frac{c_0}{\xi_0} (k'_2 D_1)^{1/2} \left\{ -A_d \tau^* + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s_1 - s_2} \left[\frac{1}{s_1} (A_d s_1 + A'_d) \left(e^{s_1 \tau^*} - 1 \right) - \frac{1}{s_2} (A_d s_2 + A'_d) \left(e^{s_2 \tau^*} - 1 \right) \right] \right\},$$

якщо $\tau^* \geq \tau_0$

$$Q_{**} = \frac{(k'_2 D_1)^{1/2}}{\xi_0} \left\{ c_0 \left(-A_d \tau_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s_1 - s_2} \left[\frac{1}{s_1} (A_d s_1 + A'_d) \left(e^{s_1 \tau_0} - 1 \right) - \frac{1}{s_2} (A_d s_2 + A'_d) \left(e^{s_2 \tau_0} - 1 \right) \right] \right) \right\}.$$

Числовий аналіз отриманих розв'язків. Для ілюстрації наведемо графіки залежності розподілу сумарної концентрації домішкових частинок, що визначається співвідношенням (12в), від різних параметрів задачі. Так, на рис.1 представлені сумарні концентрації домішкової речовини для різних моментів часу при $a = 10$, $d = 0,1$, $\alpha = 0,5$, $d_1 = d_2 = 0$, $\xi_0 = 10$, $Q = 0,001$, при цьому крива 1 описує концентрацію для моменту часу $\tau' = \tau_0 + 1$, крива 2 – для $\tau' = \tau_0 + 10$, крива 3 – для $\tau' = \tau_0 + 100$, крива 4 – для $\tau' = \tau_0 + 1000$. По осі абсцис відкладено безрозмірну глибину ξ , по осі ординат – величину $c(\tau, \xi)/c_0$.

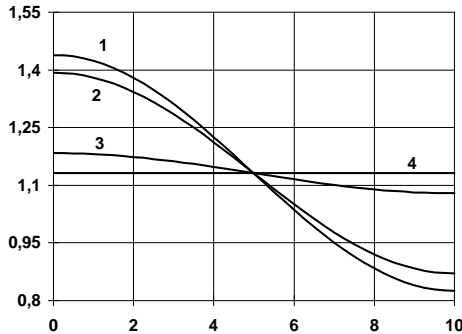


Рис.1. Сумарна концентрація домішки в різні моменти часу

На рис.2 представлена залежність сумарної концентрації від інтенсивності процесу переходу домішки з водного розчину в адсорбовані на скелеті ґрунту шари води по відношенню до інтенсивності зворотного переходу a при $\alpha = 0,5$; причому крива 1 описує розподіл концентрації для $a = 50$, крива 2 – для $a = 30$, крива 3 – для $a = 20$, крива 4 – для $a = 10$, крива 5 – для $a = 5$, крива 6 – для $a = 0,1$.

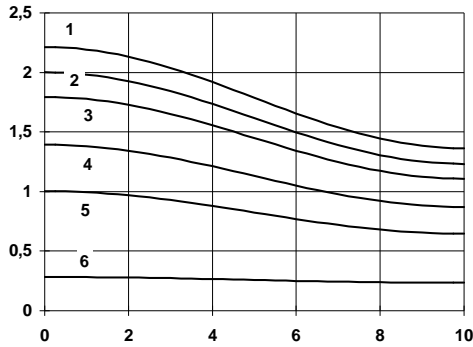


Рис.2. Залежність сумарної концентрації домішки від коефіцієнта a

На рис.3, 4 проілюстровані залежності часу τ_0 , за який кількість забруднюючої речовини Q проникає у ґрунт, від характеристик середовища. Так на рис.3 представлено, як час насичення змінюється при зміні інтенсивності переходів між станами a , де крива 1 описує час τ_0 при $\alpha = 0$, крива 2 – при $\alpha = 0,25$, крива 3 – при $\alpha = 0,5$, крива 4 – при $\alpha = 1$. Вздовж осі абсцис відкладений параметр a , вздовж осі ординат – час τ_0 . На рис.4 показана залежність часу τ_0 від безрозмірного коефіцієнта дифузії d для $a = 50$ (крива 1), $a = 30$ (крива 2), $a = 10$ (крива 3), $a = 2$ (крива 4) при $\alpha = 0,5$. По осі абсцис відкладено коефіцієнт дифузії d .

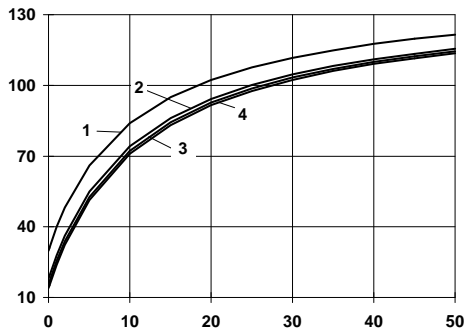


Рис.3. Час насичення в залежності від інтенсивності переходів частинок між станами

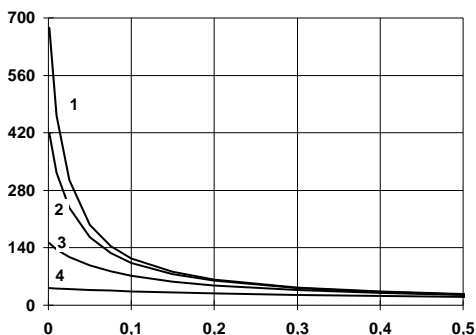


Рис.4. Час насичення в залежності від коефіцієнта дифузії d

Числовий аналіз показав, що зростання інтенсивності переходу домішки з водного розчину в адсорбовані шари води по відношенню до інтенсивності зворотного переходу суттєво збільшує час проникнення Q кількості речовини у ґрунт, при цьому зростання параметра a від 0,1 до 30 веде до збільшення часу насичення τ_0 на порядок. Зміна поверхневого розподілу домішки між різними станами впливає на час проникнення Q тільки при попаданні більшої частини забруднення з поверхні в адсорбовані на скелеті ґрунту шари води, тобто при $\alpha \in [0; 0,1]$. Зростання відносного коефіцієнта дифузії (тобто збільшення відношення коефіцієнта дифузії частинок в адсорбованих шарах води до коефіцієнта дифузії у водному поровому розчині) зменшує час проникнення τ_0 .

Перерозподіл концентрації домішкової речовини у ґрунті за відсутності потоків на границях шару має монотонно спадний характер. Причому концентрація домішки зі зростанням часу прямує до рівномірного розподілу в шарі. При збільшенні таких параметрів як a і зменшенні d концентрація домішкової речовини може зростати на порядок і тим більший час їй потрібен для досягнення рівномірного розподілу. Відзначимо, що характеристики середовища також суттєво впливають на такий перерозподіл.

1. Полубаринова-Кочинова П.Я. Теория движения грунтовых вод. – М.: Недра, 1977. – 664 с.
2. Чапля С.Я., Чернуха О.Ю. Фізико-математичне моделювання гетеродифузного масопереносу. — Львів: СПОЛЮМ, 2003. — 128 с.
3. Гончарук В.С., Дзюбачик М.І., Торський А.Р., Чапля С.Я., Чернуха О.Ю. Моделювання міграції радіоактивних забруднень у ґрунті та оцінювання забрудненості ґрунтових вод // Вісник Національного університету “Львівська політехніка”. Хімія, технологія речовин та їх застосування. – 2008. - № 609. – С. 271-275.
4. Прохоров В.М. Миграция радиоактивных загрязнений в почвах. – М.: Энергоатомиздат, 1981. – 106 с.
5. Коноплев А.В., Булгаков А.А. Трансформация форм нахождения ^{90}Sr и ^{137}Cs в

почве и донных отложениях // Атомная энергия. – 2000. – **88**, вып. 1. – С. 55-60.

6. Aifantis E.C. Continuum basis for diffusion in regions with multiple diffusivity // Journal of Applied Physics. – 1979. – **50**, № 3. – P. 1334-1338.

7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1979. – 830 с.

Поступила 18.01.2010р.

УДК 683.03

О.Ю.Ю.Афанасьєва

АНАЛІЗ ПАРАМЕТРУ УТАЄМЛЕННЯ ФАКТУ СТЕГANOГРАФІЧНО УКРИТОЇ ІНФОРМАЦІЇ В ЦИФРОВОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Відомим параметром, що характеризує не тільки саму стеганографічну систему (SS), а й принцип стеганографічного укряття, є параметр міри невидимості інформації, яка вбудована в цифрове середовище. Цей параметр використовується для характеристики стеганограми (SG) та для характеристики цифрових водяних знаків (CVZ). Останній відповідає ситуації, коли стороннім користувачам може бути відомим факт існування в даному цифровому середовищі (CS) стеганографічно укритої інформації. В цьому випадку, міра забезпечення безпеки, або захист інформації, ґрунтується, в першу чергу, на основі досягнення високого рівня невидимості вбудованої в CS інформації. В даному випадку, не будемо говорити про інші методи підвищення рівня захисту укритої інформації такі як, додаткове шифрування інформації, що укривається та використання інших перетворень самого відображення інформації, що призначена для унеможливлення її розкриття. Для впровадження однозначності в подальшому, прийемо наступні визначення.

Визначення 1. Всі перетворення інформаційного образу (IO), які здійснюються з ціллю забезпечення захисту інформації від її розкриття неуповноваженим користувачем (NK) будемо називати додатковими стеганографічними перетвореннями (DSP).

Визначення 2. Розширеними стеганографічними перетвореннями (RSP) будемо називати такі перетворення CS , які направлені на укряття інформації в CS та забезпечують підвищення рівня її захисту, що забезпечується збільшенням величини значення параметру невидимості (η) вбудованої в CS інформації.

Прикладом DSP можуть служити перетворення IO з допомогою шифрування [1]. Прикладом RSP можуть служити перетворення