УДК 517.958:519.6

Математична модель поширення пульсової хвилі у великих кровоносних судинах

Богдан Благітко[1], Ігор Заячук[2], Олександр Пирогов[3]

[1] к. т. н., доцент, Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. генерала Тарнавського, 107, 79000, Львів, e-mail: blagitko@electronics.wups.lviv.ua
[2] к. т. н., с. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, 79005, Львів, e-mail: igorzaj@litech.lviv.ua
[3] Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. генерала Тарнавського, 107, Львів, 79000

На основі рівнянь гідродинаміки та теорії пружності побудовано фізико-математичну модель для опису процесу поширення пульсових хвиль у кровоносних судинах. У рамках лінійної теорії проаналізовано основні закономірності даного процесу. Одержано аналітичні співвідношення, які пов'язують швидкість поширення плоских хвиль тиску і параметри рідини та тонкостінної оболонки у незбуреному стані. На основі отриманих результатів проаналізовано природу суттєвих розбіжностей між хвильовими процесами в еластичних судинах та абсолютно жорстких трубах.

Ключові слова: пульсова хвиля, рівняння Нав'є-Стокса, розтяжність судини.

Вступ. При дослідженні кровоносної системи людини постає ряд гідродинамічних задач, розв'язок яких має важливе практичне значення. Сюди можна віднести такі питання як, наприклад, пульсуюча течія крові в трубках, що піддаються деформаціям (теорія пульсової хвилі, визначення жорсткості судин і швидкості руху крові за виміряними значеннями тиску та т. д.), врахування збурень, викликаних розгалуженням і звуженням судин, вивчення супутніх акустичних явищ тощо [1]. Тому актуальною є побудова фізико-математичної моделі для аналізу процесів у судинах і розробки методів клінічної діагностики кровоносної системи.

1. Фізико-математична модель поширення пульсової хвилі

Побудуємо фізико-математичну модель, яка б відображала основні характеристики згаданих вище біологічних об'єктів.

Система рівнянь моделі, яка описує поширення хвиль у судинах із пружними стінками, включає:

- рівняння руху рідини (крові);
- закон збереження маси рідини та матеріалу стінки;
- граничні та початкові умови.

Вважаємо рідину (кров) ньютонівською, а її рух — ламінарним і осесиметричним. Рівняння руху рідини записуємо у вигляді лінеаризованих (без конвективних складових) рівнянь Нав'є-Стокса в циліндричних координатах [2]

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left\{\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2}\right\}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left\{\frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}\right\}. \tag{2}$$

Рівняння неперервності має вигляд

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = 0. \tag{3}$$

Тут ρ — густина рідини, *ν* — кінематична в'язкість, *p* — тиск, v_r і v_x — відповідно радіальна й осьова компоненти вектора швидкості, *r*, *x* — радіальна й осьова координати, *t* — час.

Матеріал стінки вважаємо лінійним, в'язко-пружним, однорідним та ізотропним, а судину розглядаємо як безмежну, прямолінійну та незакріплену. У випадку тонкостінної труби можна використати рівняння теорії оболонок [3]

$$\rho_w h\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = \left\{p - 2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}\right\}_{r=a} - \frac{Eh}{1-\sigma_0^2}\left\{\frac{u_r}{a^2} + \frac{\sigma_0}{a}\frac{\partial u_x}{\partial x}\right\}, \tag{4}$$

$$\rho_w h\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = -\mu\left\{\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x}\right\}_{r=a} + \frac{Eh}{1-\sigma_0^2}\left\{\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\sigma_0}{a}\frac{\partial u_r}{\partial x}\right\}, \tag{5}$$

де ρ_w — густина матеріалу судини, *E* — модуль Юнга, σ_0 — коефіцієнт Пуассона, *h* — товщина судини, *a* — внутрішній радіус судини, u_r і u_x — радіальна й осьова компоненти зміщення відповідно. У випадку товстостінної судини останні рівняння стають дуже громіздкими.

Для завершення постановки задачі до системи рівнянь необхідно долучити граничні умови, а саме: умови неперервності компонент вектора швидкості на межі розділу між рідиною та стінкою й обмеженості компонент швидкості на осі судини

$$r = a: \quad v_r = \frac{\partial u_r}{\partial t}, \quad v_x = \frac{\partial u_x}{\partial t};$$

$$r = 0: \quad v_r = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial r} = 0.$$

Записані вище рівняння у рамках лінійної теорії описують поширення в судинах хвиль довільного типу. Знаючи початкові та граничні умови задачі, можемо чисельно проінтегрувати дану систему рівнянь і визначити поле вектора швидкості чи розподіл тиску у судинах.

Обмежимось розглядом поширення плоских хвиль. Це дозволяє звести задачу до одномірної [4]. Якщо з системи рівнянь (1), (2) виключити швидкість, то отримаємо таке хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 p_e}{\partial x^2} = c^{-2} \frac{\partial^2 p_e}{\partial t^2}, \tag{6}$$

де швидкість хвилі c визначається формулою

$$\rho^{-1} c^{-2} = \left[\rho^{-1} \frac{d\rho}{dp_e} + A^{-1} \frac{dA}{dp_e} \right] = K + D \quad \text{при } p_e = 0. \tag{7}$$

Тут $p_e = p - p_0$ — надлишковий тиск рідини; $\rho = \rho(p_e)$ — густина, $A = A(p_e)$ — площа поперечного перерізу судини, а індексом «0» відзначені відповідні величини у незбуреному стані.

В отриманій рівності відносні збільшення густини та площі поперечного перерізу, які припадають на одиницю надлишкового тиску, називають стисливістю рідини K і розтяжністю судини D відповідно.

Можна показати, що локальна швидкість рідини пов'язана з надлишковим тиском простим співвідношенням

$$v_x = \frac{p_e}{c\rho_0}. \tag{8}$$

Для ізотропної тонкостінної судини розтяжність визначається таким чином

$$D = \frac{2a_0}{hE}, \tag{9}$$

a_0, h — радіус і товщина стінки судини. Якщо прийняти, що судина зафіксована щодо поздовжніх зміщень, то

$$D = \frac{2a_0(1-\sigma_0^2)}{hE}. \tag{10}$$

Швидкість поширення хвилі тиску визначається формулою

$$c = \left[\rho(K + D)\right]^{-1/2}. \tag{11}$$

Артерії ссавців характеризуються розтяжністю D порядку 1 бар $^{-1}$ [4], тобто це відповідає збільшенню площі просвіту судини на 10% внаслідок зміни тиску на величину, порядку 10^{-1} бар (саме така зміна тиску спостерігається за нормальних фізіологічних умов [1]). За такої великої розтяжності стисливістю крові (K порядку 10^{-5} бар $^{-1}$ [4]) можна знехтувати. Тому експериментально отримані значення швидкості поширення пульсових хвиль виявляються на два порядки менші від швидкості звуку в крові [5].

М'які тканини, які оточують артерію, настільки еластичні, що зовнішній тиск безпосередньо біля артеріальної стінки майже не реагує на пульсації. Проте, можливо, що ці тканини відповідають за фіксацію артерії відносно поздовжніх деформацій. У такому випадку для розрахунку розтяжності необхідно користуватися формулою (10), де коефіцієнт Пуассона σ_0 дещо менший від 0,5 — величини, яка є характерною для матеріалів, у яких пружні характеристики значно перевищують стисливість. Параметр, який визначається як відношення товщини стінки до діаметра труби, змінюється у діапазоні від 0,06 до 0,10 [1].

Вимірювання швидкості пульсової хвилі в артеріях можна проводити, реєструючи двома послідовно розташованими давачами деформацій судини часову затримку між одним і тим же збуренням. Для зменшення завад, спричинених наявністю відбитої хвилі, давачі доцільно помістити на однорідній ділянці артерії з невеликим коефіцієнтом звуження судини та малою кількістю розгалужень. Обчислена за відліками тиску швидкість поширення пульсохвилі дає можливість визначити розтяжність

$$D = \rho^{-1} c^{-2} ,$$

а, отже, і жорсткість (модуль Юнга E) судини. За виміряними значеннями тиску також можна обчислити локальну швидкість руху крові

$$v_x = \frac{p_e}{c\rho} .$$

Усереднюючи її за періодом часу, упродовж якого здійснювалися вимірювання, також визначимо середню швидкість об’ємних витрат.

При побудові одномірної теорії пульсової хвилі для спрощення задачі було зроблено ряд суттєвих припущень: 1) нехтується похибками, які вносяться у швидкість, внаслідок в’язких властивостей крові; 2) амплітуда збурення (пульсового коливання тиску) приймається достатньо малою, і тому співвідношення, які описують пружні властивості стінки судини та рух рідини, є лінійними. З точки зору подальших досліджень актуальним є теоретичне обґрунтування справедливості зроблених припущень.

Описаний непрямий спосіб визначення жорсткості судин і швидкості руху крові на основі виміряних значень тиску можна використати як метод клінічного дослідження та діагностики вад кровоносної системи.

Висновки. Для аналізу процесів, які відбуваються в судинах кровоносної системи, побудовано лінеаризовану фізико-математичну модель, яка базується на рівняннях Нав’є-Стокса в циліндричних координатах. Ці рівняння описують поширення хвиль довільного типу у судинах. За умови поширення плоских хвиль задачу зведено до одномірної й отримано її розв’язок.

Проаналізовано результати застосування запропонованої моделі для дослідження процесу поширення пульсохвилі в судинах ссавців.

Література

[1] Механика кровообращения / *Каро, Педли, Шротер, Сид.* — М.: Мир, 1981. — 326 с.
[2] *Ландау Л. Д, Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. — М.: Высш. шк., 1982. — 71 с.

[3] *Cox R. H.* Comparison of linearized wave propagation models for arterial blood flow analysis // Journal of Biomechanics. — 1969. — Vol. 2, № 3. — P. 251-265.
[4] *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. — М.: Мир, 1981. — 116 с.
[5] *Савицкий Н. Н.* Биофизические основы кровообращения и клинические методы изучения гемодинамики. — Л.: 1963.

The Mathematical Model of the Pulse Wave Propagation in Large Blood Vascular

Bogdan Blagitko, Igor Zayachuk, Oleksandr Pyrogov

Based on the hydrodynamic and elasticity theories the physico-mathematical model for description of the process of distribution of pulse waives in the blood vascular is developed. Major conditions of such a process are reviewed in the frames of the linear theory. Analytical equations connecting the speed of distribution of flat waives of pressure and parameters of the liquid and thin-shell in non-disturbed state are presented. Based on the result received the nature of significant differences between waives processes in elastic vascular and absolutely hard vascular are analyzed.

Математическая модель распространения пульсовой волны в больших кровеносных сосудах

Богдан Благитко, Игор Заячук, Александр Пирогов

На основании уравнений гидродинамики и теории упругости построена физико-математическая модель, описывающая процесс распространения пульсовых волн в кровеносных сосудах. В рамках линейной теории рассмотрены основные закономерности данного процесса. Приведены аналитические выражения, связывающие скорость распространения плоских волн давления, параметры жидкости и тонкостенной оболочки в невозмущенном состоянии. На основании полученных результатов проведен анализ природы существенных расхождений между волновыми процессами в эластических и абсолютно жестких сосудах.

Отримано 10.10.06