УДК 519.65

Обчислення гіперсингулярних інтегралів у реалізаціях числових алгоритмів розв'язування задач математичної фізики

Іван Дияк[1], Ігор Макар[2]

[1] к. ф.-м. н., доцент, Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, e-mail: dyyak@franko.lviv.ua
[2] Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, e-mail: ihor.makar@gmail.com

Ефективність методів граничних елементів значною мірою залежить від якості апроксимації границі області, інтерполюючих функцій і схем інтегрування, які застосовуються. У роботі досліджено й апробовано декілька числових методів обчислення гіперсингулярних інтегралів, які використовуються при побудові схем числового інтегрування за реалізації симетричного варіанта методу граничних елементів. Наведено результати числових експериментів порівняння різних методик обчислення гіперсингулярних інтегралів.

Ключові слова: гіперсингулярний інтеграл, числові методи, головне значення за Коші, скінченна частина за Адамаром.

Вступ. Граничні інтегральні рівняння є ефективним методом дослідження широкого кола задач математичної фізики. Використання граничних гіперсингулярних інтегральних рівнянь під час розв'язування крайових задач теорії пружності та механіки руйнування забезпечує отримання більш точних результатів у зонах концентрації напружень. Однак, означення та способи обчислення (аналітичні або числові) гіперсингулярних інтегралів і досі є складною й актуальною проблемою сучасних наукових досліджень.

Розглянемо гіперсингулярний інтеграл вигляду

$$\int_a^b \frac{f(x)}{(x-y)^2}dx,\ a<y<b. \tag{1}$$

Такий інтеграл не існує ні в сенсі головного значення Коші, ні як невласний інтеграл першого роду. Нижче наведено два найпоширеніші способи означення гіперсингулярного інтеграла.

1. Інтеграл (1) розглядається як похідна від інтеграла, збіжного в сенсі головного значення за Коші [6],

$$\int_a^b \frac{f(x)}{\left(x-y\right)^2}dx = \frac{d}{dy}P.V.\int_a^b \frac{f(x)}{x-y}dx,$$

де $P.V.$ — головне значення інтеграла у розумінні Коші.

2. Інтеграл (1) трактується як скінченна частина розбіжного інтеграла за Адамаром [5]

$$F.P.\int_a^b \frac{f(x)}{(x-y)^2}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\left(\int_a^{y-\varepsilon}+\int_{y+\varepsilon}^b\right)\frac{f(x)dx}{(x-y)^2}-\frac{2f(y)}{\varepsilon}\right], \tag{2}$$

де *F. P.* — скінченна частина інтеграла. Поняття скінченної частини вперше введено Ж. Адамаром у 1923 р. [7]. У роботі [9] показано еквівалентність обох підходів за умови, що функція $f(t)$ є аналітичною на інтервалі (a, b).

У сучасній науковій літературі [2, 5, 9] зустрічаються різні означення гіперсингулярного інтеграла, які є рівносильними. Наприклад, означення за Куттом [14] вимагає існування інтеграла також на кінці відрізка інтегрування, де інтегранд має сингулярність

$$F.P.\int_{a=y}^{b}\frac{f(x)}{(x-y)^2}dx = F.P.\int_0^{b-y}\frac{f(\eta+y)\,d\eta}{\eta^2}\equiv$$

$$\equiv\int_0^{b-y}\frac{f(\eta+y)-f(y)-f^{'}(y)\eta}{\eta^2}d\eta-\frac{f(y)}{b-y}+f^{'}(y)\ln(b-y).$$

Відомо кілька способів обчислення інтеграла (1). Деякі з них аналітичні, інші базуються на концепції скінченної частини розбіжного інтеграла та використовують числові методи. Подамо короткий огляд найпопулярніших підходів до вирішення цієї проблеми.

Метод дискретних особливостей уперше запропоновано у 1955 році у працях С. М. Бєлоцерковського. Шуканий клас розв'язку виділяється тут завдяки вибору взаємного розміщення двох сіток — дискретних особливостей (вихорів) і розрахункових вузлів [1]. Далі використовують інтерполяційні квадратурні формули Ньютона-Котеса. Інтегральні суми, якими замінюють сингулярні інтеграли, повинні існувати у розумінні головного значення за Коші чи скінченної частини за Адамаром. Для цього внутрішні розрахункові точки розташовують посередині між двома точками дискретних особливостей. У монографії [1] подано математичне обґрунтування методу дискретних особливостей, а також досліджено питання стійкості цього методу.

Авторами роботи [6] запропоновано квадратури, які базуються на визначенні гіперсингулярного інтеграла, як похідної від інтеграла, збіжного в сенсі головного значення за Коші, та використанні відомої формули Гауса для сингулярних інтегралів [6]. Одним із недоліків цього підходу є необхідність обчислення похідної від підінтегральної функції, що є проблемним у разі складного її аналітичного виразу.

Відомі способи наближення гіперсингулярних інтегралів шляхом побудови деякого конформного відображення інтеграндa на дійсну вісь і наступного інтегрування «звичайними» квадратурами [2, 10]. Ці квадратурні формули характеризуються експоненційною швидкістю збіжності інтегральних сум. Однак, якщо підінтегральна функція має особливість високого порядку, то такі формули вимагатимуть великої кількості вузлів інтегрування для забезпечення високої точності.

У роботі [4] для обчислення гіперсингулярних інтегралів запропоновано ефективні схеми, які поєднують використання низки числових і аналітичних методів. Цей підхід характеризується високою точністю, універсальністю, може застосовуватися для розв'язування слабосингулярних, сингулярних та гіперсингулярних інтегральних рівнянь, як методом колокацій, так і Бубнова-Гальоркіна. Ці схеми є придатними для побудови *p*- та *hp*-адаптивних версій методу граничних елементів.

У цьому дослідженні описано й апробовано квадратурні формули, які використовуються при побудові схем числового інтегрування за реалізації симетричного варіанта методу граничних елементів [4]. Наведено результати обчислення гіперсингулярних інтегралів за використання різних методик інтегрування.

1. Методи обчислення інтегралів із особливостями

1.1. Обчислення гіперсингулярних інтегралів за формулами множення (Product Rules) [4]. Під час розв'язування сингулярних інтегральних рівнянь виникає необхідність обчислення інтегралів вигляду

$$\int_a^b w(x)\, f(x)\, K(y,x)\, dx\,, \tag{3}$$

де функція $f(x)$ задовольняє певним вимогам щодо гладкості. Основна ідея методу інтегрування за формулами множення полягає в аналітичному інтегруванні сингулярності, яка зосереджена в ядрі $K(y, x)$. Нехай $\{\pi_\nu\}$ ($\nu = 0, 1, ...$) — множина ортогональних поліномів на інтервалі (a, b) з ваговою функцією $w(x)$. Позначимо через λ_ν та τ_ν ($\nu=\overline{1,n}$) вагові коефіцієнти та вузли класичної формули Гауса n-го порядку. Інтерполяційний поліном Лагранжа для функції $f(x)$, побудований на нулях полінома $\pi_n(x)$, має вигляд

$$L_n(f;x) = \sum_{\nu=1}^{n} f(\tau_\nu)\, l_\nu(x)\,,$$

де $l_\nu = \pi_n(x) \Big/ \Big[\big(x - \tau_\nu \big) \pi'_n(\tau_\nu) \Big],\ \ \nu = \overline{1,n}$. Розклавши його в ряд за ортогональними поліномами $\{\pi_\nu\}$, одержимо

$$L_n(f;x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu\, \pi_\nu(x)\,,$$

де $a_\nu = \dfrac{1}{\left\|\pi_\nu\right\|^2}\big[L_n(f;\cdot), \pi_\nu\big] = \dfrac{1}{\left\|\pi_\nu\right\|^2}\displaystyle\int_a^b w(x)\, L_n(f;x)\, \pi_\nu(x)\, dx,\ \ \nu = \overline{0, n-1}$.

Для обчислення інтеграла в останньому виразі можемо застосувати формулу Гауса, оскільки степінь $L_n(f, x)\pi_\nu(x)$ не більший від $2n-2$. Враховуючи також, що $L_n(f;\tau_k) = f(\tau_k)$ для всіх $k=\overline{1,n}$ одержимо $a_\nu = \|\pi_\nu\|^{-2}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(\tau_k)\pi_\nu(\tau_k)$.

Тепер формула множення отримується шляхом заміни функції $f(x)$ її інтерполяційним поліномом $L_n(f; x)$ в інтегралі (3)

$$\int_a^b w(x) f(x) K(y,x)\,dx = Q_n(f;y) + R_n^{PR}(f;y),$$

де $R_n^{PR}(f;y)$ — залишок квадратурної формули множення, $Q_n(f;x) = \int_a^b w(x)\times$ $\times L_n(f;y)K(y,x)\,dx = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu \int_a^b w(x)\pi_\nu(x)K(y,x)\,dx = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu b_\nu(y)$. Величини $b_\nu(y) = \int_a^b w(x)\pi_\nu(x)K(y,x)\,dx$ часто називають модифікованими моментами ядра $K(y, x)$.

Розглянемо докладніше спосіб побудови формул множення з використанням множини поліномів Лежандра $\{P_i(x)\}$, які є ортогональними на інтервалі $(-1, 1)$ із ваговою функцією $w(x) = 1$. Тоді

$$\int_{-1}^{1} K(y,x) f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} w_k(y) f(x_k) + R_n^{PR}(f,y). \qquad (4)$$

Зауважимо, що формула (4) є точною, якщо $f(x)$ є поліномом степеня, меншого від n. Для обчислення вагових функцій w_k маємо [4]

$$w_k(y) = \frac{1}{2}\lambda_k \sum_{i=0}^{n-1}(2i+1)\mu_i(y) P_i(x_k), \qquad (5)$$

де $\{\lambda_k, x_k\}$ — вагові коефіцієнти (числа Крістофеля) та вузли формули Гауса-Лежандра порядку n $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k)$; $P_i(x)$ — поліном Лежандра степеня i; $\mu_i(y)$ — модифіковані моменти ядра $K(y, x)$

$$\mu_i(y) = \int_{-1}^{1} K(x,y) P_i(x)\,dx. \qquad (6)$$

Вирази для інтегралів (6) отримуються на основі рекурентних співвідношень між поліномами Лежандра. Наведемо результати обчислення модифікованих моментів для деяких ядер. (Символьні перетворення виконувались у пакеті Mathematica 4.2). Для поліномів Лежандра маємо [4]

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, \\ P_1(x) = x, \\ P_{j+1}(x) = \alpha_j^{(0)} x P_j(x) - \beta_j^{(0)} P_{j-1}(x), \ \ j \ge 1, \end{cases}$$

де $\alpha_j^{(0)} = (2j+1)/(j+1)$, $\beta_j^{(0)} = j/(j+1)$.

Якщо $K(y,x) = \ln|x-y|$ — ядро з логарифмічною особливістю, то для обчислення модифікованих моментів пропонується така процедура

$$\begin{cases} \mu_0(y) = (1+y)\ln(1+y) + (1-y)\ln(1-y) - 2, \\ \mu_j(y) = \dfrac{1}{2j} Q_{j-1}^{(1,1)}(y), \ \ j \ge 1. \end{cases}$$

Тут $Q_j^{(1,1)}$ — функції Якобі другого роду

$$\begin{cases} Q_0^{(1,1)}(y) = (1-y^2)\ln\dfrac{1-y}{1+y} - 2y, \\ Q_1^{(1,1)}(y) = 2yQ_0^{(1,1)}(y) + \dfrac{8}{3}, \\ Q_j^{(1,1)} = \dfrac{j+1}{j(j+2)}\Big[(2j+1)yQ_{j-1}^{(1,1)}(y) - jQ_{j-2}^{(1,1)}(y)\Big], \ \ j \ge 2. \end{cases}$$

Якщо ядро $K(y,x)$ є дробово-раціональною функцією, чисельник чи знаменник якої містить множники виду $(x - a_y)$ та $(x-a_y)^2 + b_y^2$, то модифіковані моменти обчислюються за таким алгоритмом [4].

Нехай нам відомі величини

$$m_j = \int_{-1}^{1} K(y,x) p_j(x) dx, \tag{7}$$

які називають стартовими моментами. Тут $p_j(x)$ — ортогональні поліноми, які, у загальному випадку, задовольняють співвідношення

$$\begin{cases} p_0(x) = 1, \\ p_1(x) = k_1^{(1)} x + k_0^1, \\ p_{j+1}(x) = \alpha_j x\, p_j(x) - \beta_j p_{j-1}(x), \ \ j \ge 1. \end{cases} \tag{8}$$

Наприклад, за стартові моменти (7) можна прийняти модифіковані моменти ядра $K(y,x) \equiv 1$. Нижче подано результати для довільної множини ортогональних поліномів, які задаються співвідношеннями (8). Зокрема, це може бути множина поліномів Лежандра (при $k_1^{(1)} = 1$, $k_0^{(1)} = 0$, $\alpha_j = \alpha_j^{(0)}$, $\beta_j = \beta_j^{(0)}$). Знаючи стартові моменти деякого «стартового» ядра $K(y,x)$, обчислимо модифіковані моменти ядра $\overline{K}(y,x)$

a) $\bar{K}(y,x) = K(y,x)(x-a_y)$.

b) $\bar{K}(y,x) = \dfrac{K(y,x)}{(x-a_y)}$, $a_y \neq \pm 1$.

c) $\bar{K}(y,x) = \dfrac{K(y,x)}{(x-a_y)^2 + b_y^2}$, $b_y \neq 0$.

Отримаємо відповідно

a) $$\begin{cases} \bar{m}_0(y) = \dfrac{1}{k_1^{(1)}} m_1(y) - \left(\dfrac{k_0^{(1)}}{k_1^{(1)}} + a_y \right) m_0(y), \\ \bar{m}_j(y) = \dfrac{1}{\alpha_j} m_{j+1}(y) - a_y m_j(y) + \dfrac{\beta_j}{\alpha_j} m_{j-1}(y), \quad j \geq 1. \end{cases}$$

b) $\bar{m}_j(y) = q_j(a_y)$, де $$\begin{cases} q_0(z) = \int_{-1}^{1} \dfrac{K(y,x)}{x-z} dx, \\ q_1(z) = p_1(z) q_0(z) + k_1^{(1)} m_0(y), \\ q_{j+1}(z) = \alpha_j z q_j(z) - \beta_j q_{j-1}(z) + \alpha_j m_j(y), \quad j \geq 1. \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} \overline{m_0}, \overline{m_1} \text{ — безпосереднє інтегрування}, \\ \overline{m_2}(y) = \alpha_0 \alpha_1 \left[m_0(y) + a_y \overline{m_1}(y) \right] - \left[\alpha_0 \alpha_1 (a_y^2 + b_y^2) + \beta_1 \right] \overline{m_0}(y), \\ \overline{m_j}(y) = \dfrac{q_j^I \left(a_y + i b_y \right)}{b_y}, \quad j \geq 3. \end{cases}$$

$$q_0^R(z_y) = \frac{1}{\alpha_0} \overline{m_1}(y) - a_y \overline{m_0}(y),$$

$$q_0^I(z_y) = b_y \overline{m_0}(y),$$

$$q_1^R(z_y) = \frac{1}{\alpha_1} \overline{m_2}(y) - a_y \overline{m_1}(y) + \frac{\beta_1}{\alpha_1} m_0(y),$$

$$q_1^I(z_y) = b_y \overline{m_1}(y),$$

$$q_{j+1}^R(z_y) = \alpha_j a_y q_j^R(z_y) - \alpha_j b_y q_j^I(z_y) - \beta_j q_{j-1}^R(z_y) + \alpha_i m_j(y),$$

$$q_{j+1}^I(z_y) = \alpha_j a_y q_j^I(z_y) + \alpha_j b_y q_j^R(z_y) - \beta_j q_{j-1}^I(z_y), \quad j \geq 1.$$

Зауважимо, що при $z \in (-1, 1)$ інтеграл для визначення $q_0(z)$ є збіжним у сенсі головного значення за Коші.

Приймаючи знайдені на цьому кроці моменти ядра $\overline{K}(y,x)$ за стартові, можемо обчислити модифіковані моменти, утворивши ядро бажаного вигляду. Тобто $K(y,x) := \overline{K}(y,x)$, $m_j(y) := \overline{m_j}(y)$. Нове ядро $\overline{K}(y,x)$ будуємо у вигляді *a*, *b* або *c*.

У роботі [4] сформульовано теорему, яка характеризує порядок збіжності формул множення.

Теорема 1. Нехай $f \in C^p[-1, 1]$ і $f^{(p)} \in H_\mu[-1, 1], 0 < \mu \le 1$. Тоді, якщо $\int_{-1}^{1} |K(y,x)|^2 dx \le C$ для всіх $y \in [-1, 1]$, то $R_n^{PR}(f, y) = O(n^{-p-\mu})$, $\forall\, y \in [-1,1]$.

1.2. DE-формула для інтегрування функцій із слабкою особливістю [10]. DE-формули вперше запропоновані японськими вченими H. Takahasi та M. Mori [11] у 1974 році для числового обчислення інтегралів виду $\int_a^b f(x)\,dx$. З допомогою деякого перетворення $x = \varphi(u)$ відрізок інтегрування відображається на дійсну вісь *R*. При цьому функція *f* має бути аналітичною в деякій смужці вздовж *R* та експоненційно прямувати до нуля при $u \to \pm\infty$, аби досягнути асимптотичного порядку збіжності $O[\exp(-C N^{1/2})]$.

У сучасній науковій літературі значна увага надається використанню функції Віттакера для апроксимації підінтегральної функції на $(-\infty, +\infty)$ і наступного інтегрування «звичайними» квадратурами [2]. Підходи, які ґрунтуються на такій ідеї, називають SINC-методами.

За реалізації симетричного варіанта прямого методу граничних елементів ми використовуємо DE-формулу для обчислення зовнішнього інтеграла у подвійному інтегралі Гальоркіна, якщо підінтегральна функція має логарифмічну (слабку) сингулярність на кінці відрізка інтегрування

$$\int_0^1 f(x)\,dx = h \sum_{k=-N}^{N} w_k^{DE} f(x_k^{DE}) + R_N^{DE}\,, \tag{9}$$

де $x_k^{DE} = \dfrac{1}{2}\left[1 + \tanh\left(\dfrac{\pi}{2}\sinh(kh)\right)\right]$, $w_k^{DE} = \dfrac{(\pi/4)\cosh(kh)}{\cosh^2\left[(\pi/2)\sinh(kh)\right]}$ [4].

Теорема 2. Якщо *f (x)* є аналітичною функцією на (0, 1) і має слабку сингулярність на кінцях інтервалу, то $R_N^{DE} = O\left[e^{-c(N/\ln N)}\right]$, $N \to \infty$ [4].

Зазначимо, що для забезпечення точності 10^{-7} доцільно вибрати $N = 8$ та $h = 0{,}3$ [4].

1.3. Формула типу Гауса для гіперсингулярних інтегралів 2-го порядку [6]. Враховуючи означення гіперсингулярного інтеграла, як похідної від інтеграла, збіжного в сенсі головного значення за Коші, з використанням відомого розвинення Гауса для інтеграла Коші у праці [6] запропоновано формулу

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{(x-y)^2} dx \cong -\frac{2f'(y)}{P_n(y)} Q_n(y) - \frac{2f(y)\left(1-y^2\right)^{-1}}{P_n(y)^2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{f(x_k)}{(x_k-y)^2}. \qquad (10)$$

Тут P_n, Q_n — функції Лежандра 1-го та 2-го роду відповідно, λ_k та x_k — вагові коефіцієнти та вузли класичної квадратурної формули Гауса.

3. Числові приклади

Для порівняння числової ефективності описаних вище алгоритмів розглянемо приклади обчислення гіперсингулярних інтегралів [1, 6].

Приклад 1. У статті [6] наведено результати застосування формули типу Гауса для обчислення гіперсингулярних інтегралів (10) і методу Кутта для обчислення інтегралів I_1 та I_2

$$I_1 = F.P.\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{(x-y)^2} dx; \qquad f(x) = \sqrt{1-x^2}\cos(x), \qquad y = 0,$$

$$I_2 = F.P.\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{(x-y)^2} dx; \qquad f(x) = e^x \cos(x), \qquad y = 0.$$

Нижче ці значення співставлені з результатами розрахунків, проведених за формулою множення (4) із відповідним типом ядра.

Таблиця 1

n	Формула множення (4), $w(x)=1$	Формула множення (4), $w(x)=\sqrt{1-x^2}$	Формула Кутта [6]	Формула типу Гауса (10)
4	−3,75270	–3,87100	−3,90719	−3,90699
5	−3,89909	–3,91076	−3,90916	NA
6	−3,86527	–3,91043	−3,90997	−3,90945
7	−3,91390	–3,91090	−3,91033	NA
8	−3,93578	–3,91090	−3,91140	−3,91022

У табл. 1 n — порядок квадратурної формули Гауса. Відзначимо, що при непарних n нуль є коренем поліномів Лежандра, що співпадає з $y = 0$, а тому під час обчислень із використанням формули типу Гауса виникає переповнення (у табл. 1 позначено NA (Not Available)) [6].

У праці [6] зазначено, що певна осциляція у значеннях інтеграла I_1, обчислених за формулою типу Гауса, зумовлена наявністю у функції f множника

$\sqrt{1-x^2}$. Бачимо, що формула множення з ваговою функцією $w(x) = 1$ також дає деякі відхилення. У даному випадку доцільно застосувати формулу множення з використанням поліномів Чебишева другого роду $U_n(x) = \dfrac{\sin((n+1)\arccos(x))}{\sin(\arccos(x))}$, які є ортогональними на відрізку (– 1, 1) із ваговою функцією $\sqrt{1-x^2}$. Формула для вагових коефіцієнтів (5) матиме вигляд: $w_k(y) = \dfrac{2}{\pi}\lambda_k \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i(y) U_i(x_k)$, де $\mu_i(y) = $ $= \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, K(x,y) U_i(x)\,dx$, $x_k = \cos(\pi k/(n+1))$, $\lambda_k = \pi/(n+1)\sin^2(\pi k/(n+1))$.

Таблиця 2

n	Формула множення (4)	Формула Кутта [6]	Формула типу Гауса (10)
4	−2,31386	−2,11100	−2,11100
5	−2,11106	−2,11100	NA
6	−2,11124	−2,11102	−2,11100
7	−2,11098	−2,11100	NA
8	−2,11094	−2,11187	−2,11100

Таблиця 3

nd	Метод дискретних особливостей [1]
3	−2,13163
9	−2,11370
13	−2,11230
19	−2,11161
25	−2,11135

У табл. 3 наведено значення інтеграла I_2, обчислені з використанням квадратурно-різницевої формули [1], nd — кількість дискретних вихорів (особливостей)

$$\int_a^b \frac{f(x)}{\left(x-x_{0j}\right)^2}dx \approx \sum_{k=0}^{nd}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{f(x)}{\left(x-x_{0j}\right)^2}dx \approx \sum_{k=0}^{nd} f\left(x_{0k}\right)\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dx}{\left(x-x_{0j}\right)^2} \approx$$

$$\approx \sum_{k=0}^{nd} f\left(x_{0k}\right)\left[\frac{1}{x_k - x_{0j}} - \frac{1}{x_{k+1}-x_{0j}}\right], \tag{11}$$

де множини $E = \{ x_k,\ k=\overline{1, nd} \}$ і $E_0 = \{ x_{0k},\ k=\overline{0, nd} \}$ утворюють канонічне розбиття відрізка $[a, b]$ з кроком h. При цьому точки x_i ділять відрізок $[a, b]$ на $nd + 1$ частини довжиною $h = (b - a)/(nd + 1)$, а точки x_{0j} (вихор) є серединами відрізків $[x_j, x_{j+1}]$, $j=\overline{0, nd}$; $x_0 = a$, $x_{nd+1} = b$.

Приклад 2. У роботі [1] наведено точні значення таких гіперсингулярних інтегралів

$$H_1(y) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \frac{1}{(x^2+25)(x-y)^2}dx = -\frac{\pi\,(25-y^2)}{5\sqrt{26}\,(25+y^2)^2},\ \ y\in(-1,1)\,.$$

$$H_2 = \int_{-1}^{1} \frac{\left(1-x^2\right)^{5/2}}{(x-y)^2}\,dx = -\frac{5\,\pi}{8}\left(3-12\,y^2+8\,y^4\right),\ \ y\in(-1,1).$$

При $y = 0$, $H_1 \approx -0{,}000492894$, $H_2 = -15\pi/8 \approx -5{,}89048622$. Результати обчислень цих інтегралів за формулою множення (4) містять таблиці 4 та 5.

Таблиця 4

n	H_1	Абсолютна похибка
4	−0,000483229	0,00009665
5	−0,000492846	0,00000048
6	−0,000492751	0,00000142
7	−0,000492893	0,00000000
8	−0,000492892	0,00000002
9	−0,000492894	0,00000000
10	−0,000492894	0,00000000
12	−0,000492894	0,00000000

Таблиця 5

n	H_2	Абсолютна похибка
4	−3,972069585	1,91841664
5	−5,839539347	0,05094688
6	−5,715361179	0,17512505
7	−5,893146233	0,00266001
8	−5,903564857	0,01307863
9	−5,890148277	0,00033795
10	−5,887968076	0,00251815
12	−5,891395774	0,00090955

Певна осциляція у значеннях інтеграла H_2 зумовлена множником $\left(1-x^2\right)^{5/2}$ у чисельнику. Для обчислення інтеграла H_1 використано формулу множення (4) з ваговою функцією $1\big/\sqrt{1-x^2}$, що забезпечило стійкий характер збіжності (див. табл. 4).

Метод дискретних особливостей для даних інтегралів дозволяє досягнути задовільної точності при дуже великій кількості вузлів. Наприклад, за використання квадратурно-різницевої формули (11) для обчислення інтеграла H_2 з $nd = 55$ абсолютна похибка становить 0,0026.

Висновки. У роботі апробовано реалізацію декількох методів обчислення гіперсингулярних інтегралів. Розглянуто спосіб побудови формул множення для інтегрування функцій із різним виглядом ядра $K(y, x)$ і ваги $w(x)$. Результати числових експериментів підтверджують ефективність модифікованої числової схеми інтегрування, яка запропонована в роботі [4]. Цю схему можна застосовувати для обчислення гіперсингулярних інтегралів, які отримують під час розв'язування плоскої задачі теорії пружності симетричним методом граничних елементів.

Література

[1] *Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. — М.: Наука, 1985. — 256 с.

[2] *Вінтоняк Н., Хапко Р.* Про використання SINC квадратур для наближеного обчислення інтегралів з різними типами особливостей // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. — 2006. — Вип. 11. — С. 35-42.

[3] *Дияк І. І.* Чисельне дослідження плоскої задачі теорії пружності методом граничних елементів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1997. — Т. 40, № 3. — С. 60-63.

[4] *Aimi A., Carini A., Diligenty M., Monegato G.* Numerical Integration Schemes for Evaluation the (hyper) Singular Integrals in 2D BEM // Computational mechanics. — 1998. — **22**. — P. 1-12.

[5] *Diligenty M., Monegato G.* Finite-part integrals: their occurrence and computation // Rend. Circ. Mat. Palermo. Ser. II. — 1993. — **33**. — P. 39-61.

[6] *Hui Y., Shia D.* Evaluations of Hypersingular Integrals Using Gaussian Quadrature // IJNME. — 1999. — **44**. — P. 205-214.

[7] *Hadamard J.* Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations // New Haven, Conn., Yale Univ. Press. — 1923.

[8] *Gray L. J.* et al. Direct Evaluation of Hypersingular Galerkin Surface Integrals // Electronic Journal of Boundary Elements. — 2006. — **4**, № 3. — P. 105-130.

[9] *Iovane G., Lifanov I. K., Sumbatyan M. A.* On direct numerical treatment of hypersingular integral equations arising in mechanics and acoustics // Acta Mechanica. — 2003. — **162**. — P. 99-110.

[10] *Mori M.* Discovery of the Double Exponential Transformation and Its Developments // Publ. RIMS, Kyoto Univ. — 2005. — **41**. — P. 897-935.

[11] *Mori M., Sugihara M.* The double-exponential transformation in numerical analysis // J. Comput. Appl. Math. — 2001. — **127**. — P. 287-296.

The Evaluation of Hypersingular Integrals in Numerical Algorithms for Problems of Mathematical Physics

Ivan Dyyak, Ihor Makar

The efficiency of the boundary element method depends in particular on quality of approximation of boundary of the domain, functions of approximation and quadrature schemes of integration. Several numerical schemes of evaluation of hypersingular integrals are investigated and tested. Certain schemes of numerical integration are approved in the numerical realization of the symmetric Galerkin direct boundary element method. The results of numerical experiments and comparison analysis of different evaluation techniques of integrals are given.

Вычисление гиперсингулярных интегралов в реализациях числовых алгоритмов решения задач математической физики

Иван Дыяк, Игорь Макар

Эффективность методов граничных элементов в значительной степени зависит от качества аппроксимации границы области, интерполирующих функций и используемых схем интегрирования. В работе исследованы и апробированы несколько численных схем вычисления гиперсингулярных интегралов, используемых при реализации симметрического варианта прямого метода граничных элементов. Приведены результаты численных экспериментов сравнения разных методик вычисления гиперсингулярных интегралов.

Отримано 10.11.06