

Неперервна та гладка мінімаксна сплайн-апроксимація експоненційним виразом

Василь Андруник¹, Петро Малачівський²

¹ Національний університет «Львівська політехніка», вул. С. Бандери, 12, Львів, e-mail: arfox@complex.lviv.ua

² к. т. н., с. н. с., Центр математичного моделювання ІППММ НАН України, вул. Дж. Дудаєва, 15, Львів, e-mail: psmal@cmm.lviv.ua

Розглянуто властивості мінімаксного (чебишовського, рівномірного) наближення з точним відтворенням значень функції та її похідної сумою многочлена й експоненти з заданим показником степеня. Встановлено необхідні та достатні умови існування такого мінімаксного наближення. Описано алгоритм побудови неперервного та гладкого мінімаксного сплайн-наближення експоненційним виразом із заданою похибкою. Наведено приклад застосування такого сплайн-наближення для опису низькотемпературної характеристики термодіодного сенсора. Проведено порівняння значень чутливості сенсора та похідної отриманого сплайна.

Ключові слова: мінімаксне (чебишовське, рівномірне) наближення, неперервне та гладке мінімаксне сплайн-наближення, точки чебишовського альтернанса, схема Ремеза.

Вступ. Для дослідження температурних характеристик сенсорів і їх чутливостей необхідно отримати такі функціональні залежності, які б із задовільною точністю відтворювали як характеристику сенсора, так і його чутливість [1-3]. У праці [3] для отримання такого наближення термометричної характеристики кремнієвих діодних сенсорів температури використано апроксимації методом найменших квадратів поліномами Чебишова, які забезпечують задовільну точність наближення термометричної характеристики сенсора і його чутливості при сотому й вищому степені поліномів Чебишова. Зрозуміло, що висока степінь поліномів ускладнює їх практичне застосування через характерні для високих степенів пульсації.

У праці [4] задача відтворення статичної характеристики сенсора та його чутливості зводиться до побудови неперервного та гладкого сплайн-наближення, в якому поліноміальне наближення на кожній ланці визначається за мінімаксним (чебишовським, рівномірним) критерієм. Для підвищення точності апроксимації значень чутливості сенсора похідною від сплайна в даній роботі пропонується застосовувати неперервне та гладке мінімаксне сплайн-наближення температурної характеристики сенсора сумою многочлена й експоненти із заданим показником степеня. Побудова неперервного та гладкого мінімаксного сплайн-наближення сумою многочлена й експоненти із заданим показником степеня ґрунтується

на властивостях найкращого рівномірного наближення цим виразом із точним відтворенням значення функції та похідної у заданих точках.

1. Найкраще рівномірне наближення експоненційним виразом із точним відтворенням значень функції та похідної у заданих точках

Розглянемо задачу найкращого рівномірного наближення експоненційним виразом

$$E_m(a; x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i + A e^{qx} \quad (1)$$

від $(m + 2)$ -ох параметрів $(a_i, i = \overline{0, m}, A)$ і заданим значенням q .

Нехай неперервна та диференційовна функція $f(x)$ ($f(x) \in C^{(1)}[\alpha, \beta]$) задана в $(n + k)$ різних точках x відрізка $[\alpha, \beta]$.

$$X_k = \{x \in X_k : \alpha \leq x_1 < \dots < x_{j_1} < u_1 < x_{j_1+1} < \dots < x_{j_k} < u_k < x_{j_k+1} < \dots < x_n \leq \beta\}, \quad (2)$$

де $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n - 1$ і відомо, що в точках u_i , ($i = \overline{1, k}$) функція $f(x)$ і її похідні $f'(x)$ набувають таких значень

$$f(u_i) = v_{i,0}, \quad f'(u_i) = v_{i,1}, \quad (i = \overline{1, k}). \quad (3)$$

Необхідно цю функцію наблизити експоненційним виразом $E_m(a; x)$ (1) від $(m + 2)$ -ох параметрів ($m > 2k$) так, щоб у точках u_i , ($i = \overline{1, k}$) значення функції $f(x)$ і її похідної $f'(x)$ відтворювалися точно

$$E_m(a; u_i) = v_{i,0}, \quad E'_m(a; u_i) = v_{i,1}, \quad (i = \overline{1, k}), \quad (4)$$

і найбільша зважена похибка

$$\Delta(a) = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{[f(x) - E_m(a; x_i)]}{w(x_i)} \right| \quad (5)$$

була найменшою з можливих на множині точок X_k , а вагова функція $w(x)$ неперервна і така, що не набуває нульового значення на $[\alpha, \beta]$ ($w(x) \neq 0, x \in [\alpha, \beta]$).

Властивості рівномірного наближення функцій експоненційним виразом (1) із точним відтворенням значень функції та її похідної у заданих точках встановлює теорема.

Теорема. Нехай неперервна та диференційовна функція $f(x)$ ($f(x) \in C^{(1)}[\alpha, \beta]$) задана на множині точок (2), неперервна функція $w(x)$ така, що не набуває нульового значення на $[\alpha, \beta]$ й експоненційний вираз $E_m(a; x)$ (1) залежить від $(m + 2)$ -ох параметрів, де $(m > 2k)$ і $(n > (m - 2k + 2))$. Тоді найкраще рівномірне наближення функції $f(x)$ виразом $E_m(a; x)$ на множині (2) точок X_k з ваговою функцією $w(x)$ і

точним відтворенням значень функції та її похідної в точках u_i ($i = \overline{1, k}$) існує й єдине. Для того, щоб вираз $E_m(a^*; x)$ був найкращим рівномірним наближенням функції $f(x)$ на множині (2) точок X_k з ваговою функцією $w(x)$ і точним відтворенням її значень і значень її похідної у точках u_i ($i = \overline{1, k}$) необхідно та достатньо, щоб для точок u_i ($i = \overline{1, k}$) і деяких $(m - 2k + 3)$ -ох упорядкованих точок

$$\alpha \leq z_1 < z_2 < \dots < z_{m-2k+3} \leq \beta \quad (6)$$

із множини X_k і відмінних від u_i ($z_j \in X_k, z_j \neq u_i, j = \overline{1, m - 2k + 3}, (i = \overline{1, k})$) виконувалися рівності

$$\begin{cases} E_m(a^*; u_i) = v_{i,0} \equiv f(u_i), \\ E'_m(a^*; u_i) = v_{i,1} \equiv f'(u_i), \quad i = \overline{1, k}, \\ \left[f(z_j) - E_m(a^*; z_j) \right] / w(z_j) = (-1)^i \mu, \quad j = \overline{1, m - 2k + 3}, \end{cases} \quad (7)$$

де $|\mu| = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \left[f(x_i) - E_m(a^*; x_i) \right] / w(x_i) \right|$, а $E'_m(a; x)$ — похідна від виразу $E_m(a; x)$

$$E'_m(a; x) = \sum_{i=1}^m ia_i x^{i-1} + Aqe^{qx}.$$

Доведення. Встановимо спочатку справедливість теореми в разі найкращого зваженого рівномірного наближення функції $f(x)$ експоненційним виразом (1) на відрізку $[\alpha, \beta]$ з точним відтворенням значень функції та її похідної лише в одній точці u_1 . Нехай у деякій точці $u_{1,1}$ із відрізка $[\alpha, \beta]$ відмінній від точок множини X_k і сусідній із точкою u_1

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{j_1} < u_{1,1} < u_1 < x_{j_1+1} < \dots < x_n \quad (8)$$

функція $f(x)$ набуває значення $f(u_{1,1})$, а експоненційний вираз $E_m(b; x)$ є найкращим рівномірним наближенням функції $f(x)$ з ваговою функцією $w(x)$ на множині точок (8) й інтерполюванням у точках u_1 та $u_{1,1}$, тобто точним відтворенням значення функції $f(x)$ у точках u_1 та $u_{1,1}$. Відповідно до [5] експоненційний вираз (1) задовольняє умову Хаара на всій числовій осі. Тому згідно властивостей рівномірного наближення з інтерполюванням виразом, який задовольняє умову Хаара [6], таке наближення існує і до того ж єдине. Окрім того, параметри цього наближення задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} E_m(b; u_1) = f(u_1), \\ E_m(b; u_{1,1}) = f(u_{1,1}), \\ \left[f(z_i) - E_m(b; z_i) \right] / w(z_i) = (-1)^i \eta, \quad i = \overline{1, m+1}, \end{cases} \quad (9)$$

де

$$|\eta| = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \left[f(x_i) - E_m(b; x_i) \right] / w(x_i) \right|. \quad (10)$$

Оскільки значення функції $f(x)$ і виразу $E_m(b; x)$ у точках u_1 та $u_{1,1}$ співпадають, то за теоремою Лагранжа [7] їхні середні нахили між цими точками однакові. Якщо точку $u_{1,1}$ подумки наближати до точки u_1 , то ці середні нахили будуть прямувати відповідно до значення похідної функції $f(x)$ і похідної виразу $E_m(b; x)$ у точці u_1 . Отож, у разі співпадиння точок $u_{1,1}$ та u_1 отримаємо вираз $E_m(b; x)$, який у точці $u_{1,1}$ точно відтворює не лише значення функції, а й значення похідної.

Нехай U_s послідовність точок із відрізка $[u_{1,1}, u_1]$

$$U_s = \{u_{1,1} < u_1^{(1)} < u_1^{(2)} < \dots < u_1^{(s)} < u_1\}$$

така, що зі збільшенням s точка $u_1^{(s)}$ щораз ближче наближається до точки u_1 . Вважаємо, що значення функції $f(x)$ у цих точках відомі. Тоді, згідно властивостей рівномірного наближення з інтерполюванням, рівномірне наближення функції $f(x)$ виразом $E_m(b; x)$ із ваговою функцією $w(x)$ на множині точок $\{X \cup u_1^{(s)}\}$ й інтерполюванням у точках u_1 і $u_1^{(s)}$ існує й до того ж єдине [6]. Параметри такого наближення задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} E_m(b^{(s)}; u_1) = f(u_1), \\ E_m(b^{(s)}; u_1^{(s)}) = f(u_1^{(s)}), \\ \left[f(z_i) - E_m(b^{(s)}; z_i) \right] / w(z_i) = (-1)^i \eta, \quad i = \overline{1, m+1}, \end{cases} \quad (11)$$

де $z_i, i = \overline{1, m+1}$ — точки альтернанту, упорядковані за зростанням $z_i < z_{i+1}$ $i = \overline{1, m}$ і відмінні від точок u_1 і $u_1^{(s)}$; η — похибка наближення, яка визначається за формулою (10). Відповідно до [6] таке наближення існує й єдине для будь-яких точок $u_1^{(s)}$ ($s = 1, 2, \dots$) з послідовності U_s , а його параметри задовольняють систему рівнянь (11). Система рівнянь (11) еквівалентна системі

$$\begin{cases} E_m(b^{(s)}; u_1) = f(u_1), \\ \frac{E_m(b^{(s)}; u_1) - E_m(b^{(s)}; u_{1,s})}{u_1 - u_{1,s}} = \frac{f(u_1) - f(u_{1,s})}{u_1 - u_{1,s}}, \\ \left[f(z_i) - E_m(b^{(s)}; z_i) \right] / w(z_i) = (-1)^i \eta, \quad i = \overline{1, m+1}, \end{cases} \quad (12)$$

в якій друге рівняння є різницею першого та другого рівняння системи (11), поділеною на $(u_1 - u_{1,s}^{(s)})$.

Оскільки (12) є системою лінійних рівнянь, то її розв'язок є неперервним щодо $u_1^{(s)}$ у топології простору R_{m+2} [7]. За умовою теореми функція $f(x)$ є неперервно диференційовною, тому відповідно до викладених вище міркувань, переходячи до границі, спрямувавши $u_1^{(s)}$ до u_1 , отримаємо

$$\begin{cases} E_m(b^*; u_1) = f(u_1) \equiv v, \\ E'_m(b^*; u_1) = f'(u_1) \equiv v_1, \\ \left[f(z_i) - E_m(b^*; z_i) \right] / w(z_i) = (-1)^i \eta, \quad i = \overline{1, m+1}. \end{cases} \quad (13)$$

Таким чином, у результаті спрямування $u_1^{(s)}$ до u_1 отримано вираз $E_m(b^*; x)$, який є найкращим рівномірним наближенням функції $f(x)$ на множині (2) точок X_k з ваговою функцією $w(x)$ і точним відтворенням значення функції та похідної в точці u_1 . Згідно з теоремою про рівномірне наближення з інтерполюванням виразом, який задовольняє умову Хаара [6], цей вираз буде єдиним. При цьому параметри b_i^* ($i = \overline{0, m}$) цього виразу задовольняють систему рівнянь (13), яка співпадає з системою рівнянь (7) при $k = 1$.

Отже, найкраще рівномірне наближення виразом $E_m(a; x)$ функції $f(x)$ на множині (2) точок X_k з ваговою функцією $w(x)$ і точним відтворенням значення функції та її похідної в точці u_1 існує й до того ж єдине, а його параметри задовольняють систему рівнянь (7) для $k = 1$.

Подібним чином, застосовуючи властивість рівномірного наближення з інтерполюванням виразом, який задовольняє умову Хаара [6], можна послідовно для k різних точок ($k = 2, 3, \dots$) встановити справедливості теореми. При цьому слід приймати, що функція $f(x)$ додатково задана ще в k різних точках $u_{i,1}$ ($i = \overline{1, k}$) відрізка $[\alpha, \beta]$, відмінних від точок множини X_k (2) і сусідніх із відповідними точками u_1 ($x_{j_i} < u_{i,1} < u_i$, $i = \overline{1, k}$). *Теорему доведено.*

Відповідно до цієї характеристичної властивості кількість точок альтернанса найкращого рівномірного наближення виразом (1) із точним відтворенням зна-

чень функції та її похідної в заданих точках дорівнює $m - 2k + 3$, де m — степінь поліному, а k — кількість точок інтерполювання. Для знаходження точок альтернанса z_i , $i = \overline{1, m - 2k + 3}$ (6), у разі визначення параметрів рівномірної апроксимації деякої неперервно диференційовної функції $f(x)$ на множині (2) точок X_k з точним відтворенням значень функції та її похідної у точках u_1 ($i = \overline{1, k}$), можна використати схему Ремеза з одноточковою заміною наближення до точок альтернанса за алгоритмом Валле-Пуссена [8]. При цьому під час вибору початкового наближення до точок альтернанса слід пам'ятати, що точки u_1 ($i = \overline{1, k}$) не можуть входити в альтернанс.

2. Неперервне й гладке мінімаксне сплайн-наближення експоненційним виразом із заданою похибкою

Нехай $f(x)$ деяка неперервна та диференційовна функція на відрізку $[\alpha, \beta]$ ($f(x) \in C^{(1)}[\alpha, \beta]$) і $w(x)$ — вагова функція, яка на $[\alpha, \beta]$ є неперервною і не набуває нульових значень ($w(x) \neq 0, x \in [\alpha, \beta]$). Необхідно функцію $f(x)$ наблизити на відрізку $[\alpha, \beta]$ з похибкою G_0 неперервним і гладким мінімаксним сплайном

$$S(x) = \begin{cases} E_m(a^{(1)}; x), & t_1 \leq x \leq t_2, \\ E_m(a^{(2)}; x), & t_2 \leq x \leq t_3, \\ \dots \\ E_m(a^{(q)}; x), & t_q \leq x \leq t_{q+1}, \end{cases} \quad (14)$$

де q — кількість ланок у сплайн-наближенні, точки t_j ($j = \overline{1, q+1}$) — межі ланок, їх ще називатимемо вузлами сплайна. Крайні точки t_1 і t_{q+1} співпадають із межами відрізка $[\alpha, \beta]$ — $t_1 = \alpha, t_{q+1} = \beta$, а відрізки $[t_j, t_{j+1}]$, $j = \overline{1, q}$ — це ланки сплайна, на кожній з яких значення сплайна задається відповідним виразом — $E_m(a^{(j)}; x)$ (1).

У цьому сплайні кожний із виразів $E_m(a^{(j)}; x)$, $j = \overline{1, q}$ є мінімаксним наближенням функції $f(x)$ на відрізку $[t_j, t_{j+1}]$ із вагою $w(x)$

$$\max_{t_j \leq x \leq t_{j+1}} \left| \frac{f(x) - E_m(a^{(j)}; x)}{w(x)} \right| = \min_a \max_{t_j \leq x \leq t_{j+1}} \left| \frac{f(x) - E_m(a; x)}{w(x)} \right|, \quad (15)$$

і для забезпечення неперервності та гладкості сплайна, значення цих виразів і їх похідних у внутрішніх вузлах сплайна t_j , $j = \overline{2, q}$ співпадають

$$E_m(a^{(j-1)}; t_j) = E_m(a^{(j)}; t_j), \quad j = \overline{2, q}; \quad (16)$$

$$E'_m(a^{(j-1)}; t_j) = E'_m(a^{(j)}; t_j), \quad j = \overline{2, q}. \quad (17)$$

Окрім того, якщо G_j — значення похибки наближення функції $f(x)$ із вагою $w(x)$ на j -й ланці сплайна

$$G_j = \max_{t_j \leq x \leq t_{j+1}} \left| \left[f(x) - E_m(a^{(j)}; x) \right] / w(x) \right|,$$

то

$$\max_{1 \leq j \leq q} G_j \leq G_0, \quad (18)$$

де G_0 — задана похибка сплайн-наближення.

Задача знаходження для функції $f(x)$ сплайн-наближення $S(x)$ (14) із властивостями (15)-(18) на відрізку $[\alpha, \beta]$ полягає в забезпеченні заданої похибки наближення G_0 при найменшій можливій кількості ланок. Розв'язування цієї задачі зводиться до такого вибору меж ланок — вузлів t_j ($j = \overline{2, q}$) сплайн-наближення (14), при якому довжини всіх ланок, можливо, крім останньої, є максимально допустимими для заданої похибки наближення G_0 . За основу алгоритму знаходження неперервного та гладкого мінімаксного сплайн-наближення (14) можна взяти алгоритм, описаний у роботі [9].

Параметри виразів (1) сплайн-наближення (14) на кожній із ланок визначаються відповідно до критерію мінімаксного наближення з точним відтворенням значення функції та похідної в заданих точках (7). Для отримання неперервного та гладкого мінімаксного сплайна відповідно до умов (15)-(17) необхідно забезпечити співпадання значень ланок сплайна та їх похідних у внутрішніх вузлах t_j ($j = \overline{2, q}$). На першій ланці сплайна застосовується найкраще рівномірне наближення з точним відтворенням значення функції та похідної у правій межі ланки — t_2 . Параметри найкращого рівномірного наближення виразом (1) на першій ланці сплайна визначаються з системи рівнянь

$$\begin{cases} \left[f(z_i^{(1)}) - E_m(a^{(1)}; z_i^{(1)}) \right] / w(z_i^{(1)}) = (-1)^i \mu_1, & i = \overline{1, m+1}, \\ E_m(a^{(1)}; t_2) = f(t_2), \\ E'_m(a^{(1)}; t_2) = f'(t_2), \end{cases} \quad (19)$$

де $z_i^{(1)}$, $i = \overline{1, m+1}$ — упорядковані за зростанням $z_i^{(1)} < z_{i+1}^{(1)}$, ($i = \overline{1, m}$) точки альтернанса на відрізку $[t_1, t_2]$. Кількість точок альтернанса, що визначає таке мінімаксне наближення, дорівнює — $(m+1)$. При цьому похибка апроксимації на першій ланці дорівнює модулю μ_1 ($G_1 = |\mu_1|$).

Параметри виразів (1) сплайн-наближення (14) для функції $f(x)$ на внутрішніх ланках, починаючи з другої до передостанньої, визначаються за критерієм мінімаксного наближення з точним відтворенням значення функції та похідної у крайніх точках кожної з цих ланок $[t_j, t_{j+1}]$, $j = \overline{2, q-1}$. Згідно з характеристичною властивістю найкращого рівномірного наближення з точним відтворенням значення функції та похідної в крайніх точках (7) значення коефіцієнтів відповідних виразів (1) задовольняють системам рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} E_m(a^{(j)}; t_j) = f(t_j), \\ E'_m(a^{(j)}; t_j) = f'(t_j), \\ \left[f(z_i^{(j)}) - E_m(a^{(j)}; z_i^{(j)}) \right] / w(z_i^{(j)}) = (-1)^i \mu_j, \quad i = \overline{1, m-1}, \\ E_m(a^{(j)}; t_{j+1}) = f(t_{j+1}), \\ \dot{E}_m(a^{(j)}; t_{j+1}) = f'(t_{j+1}), \end{array} \right. \quad j = \overline{2, q-1}, \quad (20)$$

де $z_i^{(j)}$, $i = \overline{1, m-1}$, $j = \overline{2, q-1}$ — упорядковані за зростанням $z_i^{(j)} < z_{i+1}^{(j)}$ ($i = \overline{1, m-2}$) точки альтернанса j -ої ланки, тобто на відрізку $[t_j, t_{j+1}]$. У цьому випадку є лише $(m-1)$ -а точка альтернанса. Як і для першої ланки похибка апроксимації на кожній із цих ланок дорівнює модулю відповідного значення μ_j ($G_j = |\mu_j|$), $j = \overline{2, q-1}$.

Для забезпечення неперервності та гладкості сплайна наближення виразом (1) на останній ланці сплайна визначається як мінімаксне наближення з точним відтворенням значення функції та похідної у крайній лівій точці ланки — t_q . Значення коефіцієнтів цього наближення відповідно до (7) задовольняють систему рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} E_m(a^{(q)}; t_q) = f(t_q), \\ E'_m(a^{(q)}; t_q) = f'(t_q), \\ \left[f(z_i^{(q)}) - E_m(a^{(q)}; z_i^{(q)}) \right] / w(z_i^{(q)}) = (-1)^i \mu_q, \quad i = \overline{1, m+1}, \end{array} \right. \quad (21)$$

де $z_i^{(q)}$, $i = \overline{1, m+1}$ — упорядковані за зростанням $z_i^{(q)} < z_{i+1}^{(q)}$ ($i = \overline{1, m}$) точки альтернанса на відрізку $[t_q, t_{q+1}]$. Подібно до першої ланки це наближення має $(m+1)$ -у точку альтернанса. Похибка апроксимації на останній ланці дорівнює модулю μ_q ($G_q = |\mu_q|$).

Задача мінімаксного сплайн-наближення з заданою похибкою в разі наближення таблично заданих функцій не завжди має розв'язок. Вона не має розв'язку, якщо на одному з підінтервалів $[t_j, t_{j+1}]$ ($j = \overline{1, q}$) мінімально допустимої довжини ланки отримується похибка G_j , більша від заданої G_0 ($G_j > G_0$). Під час побудови сплайн-наближення (14) мінімально необхідна кількість точок для визначення першої й останньої ланки дорівнює $(m+2)$, а для решти ланок — $(m+1)$.

Якщо під час побудови мінімаксного сплайн-наближення (14) отримується похибка, більша від заздалегідь заданої, то залежно від конкретної задачі можна вибрати вираз (1) із більшою кількістю параметрів, або на підінтервалах, на яких мінімаксне наближення з необхідною похибкою не вдалося знайти, можна використати

ермітову інтерполяцію виразом (1) із відтворенням значення функції та її похідної у відповідних крайніх точках ланки: на першій ланці у крайній правій точці, на останній — у крайній лівій точці, а для внутрішніх ланок в обох крайніх точках.

Отже, побудова неперервного та гладкого мінімаксного сплайн-наближення сумою многочлена й експоненти (1) із заданим показником степеня ґрунтується на застосуванні характеристичної властивості (7) рівномірного наближення з точним відтворенням значень функції та її похідної в заданих точках. Значення параметрів наближення на першій ланці цього сплайна визначається як рівномірне наближення виразом (1) із точним відтворенням значень функції та її похідної в крайній правій точці ланки (19). Параметри наближення на внутрішніх ланках сплайна, починаючи з другої до передостанньої, визначаються відповідно до характеристичної властивості рівномірного наближення з точним відтворенням значень функції та її похідної в крайніх точках цих ланок (20). Мінімаксне наближення на останній ланці сплайна точно відтворює значення функції та її похідної у крайній лівій точці ланки (21). При цьому довжини всіх ланок сплайна, крім останньої, вибираються максимально можливими для заданої похибки сплайн-наближення.

3. Неперервна апроксимація низькотемпературної характеристики та чутливості термодіодного сенсора

Апроксимуємо неперервним і гладким мінімаксним сплайном (14) температурну характеристику термодіодного сенсора типу DT-471 фірми Lake Shore, яка подана на сайті [10] (Curve 10). Температурна характеристика цього сенсора задана 120-а значеннями в діапазоні від 1,4 К до 475 К.

Для відтворення цієї температурної характеристики отримано неперервний і гладкий мінімаксний сплайн із відносною похибкою 0,03 %. Цей сплайн складається з 6-ох ланок вигляду

$$U_j(T) = \sum_{i=0}^4 a_i^{(j)} T^i + A e^{qT}, \quad q = -0,6, \quad j = \overline{1,6}, \quad (22)$$

кожна з яких визначалась за мінімаксним критерієм.

Значення коефіцієнтів виразів (22) для кожної з ланок цього сплайна та межі ланок містить табл. 1. У колонці «Похибка апроксимації» подано значення відносної похибки апроксимації мінімаксним сплайном температурної характеристики сенсора (Curve 10), а також похибки відтворення чутливості сенсора похідною від сплайна в точках спостереження. Значення цих похибок подано у відсотках.

Крива на рис. 1 а відповідає відносній похибці відтворення сплайном значення чутливості сенсора типу DT-471 в діапазоні зміни температури від 1,4 К до 2,8 К, а на рис. 1 б — у діапазоні зміни температури від 2,8 К до 475 К.

Відносна похибка відтворення сплайном значення чутливості 28 % на першій ланці зумовлена похибкою відтворення чутливості сенсора в крайній лівій точці діапазону при температурі 1,4 К. У подальших точках спостереження відносна

Результати апроксимації
 температурної характеристики експоненційним сплайном

Номер ланки	Межі ланки	Значення коефіцієнтів виразу (22) у порядку їх входження у вираз	Похибка апроксимації	
			характеристики	чутливості
1	1,4; 12,5	1,6245503 0,04210133 - 0,014548046 0,001115927 - 2,8705225·10 ⁻⁵ 0,09417893	0,027	28
2	12,5; 22	0,7602341 0,17658149 - 0,01740255 6,866103·10 ⁻⁴ - 1,005827497·10 ⁻⁵ 22,8597905	0,012	1,1
3	22; 26	- 151,597665 24,5585451 - 1,4805356 0,03965229 - 3,9805297·10 ⁻⁴ 51178,444488	0,021	2,4
4	26; 85	1,2004256 - 4,7378948·10 ⁻³ 7,54468126·10 ⁻⁵ - 8,06131803·10 ⁻⁷ 3,02252938·10 ⁻⁹ 20877,673728	0,027	3,76
5	85; 410	1,1551988 - 1,48897598·10 ⁻³ - 3,77054629·10 ⁻⁶ 7,28113453·10 ⁻⁹ - 5,7712894·10 ⁻¹² - 6,1841068·10 ¹⁷	0,025	0,82
6	410; 475	16,477237 - 0,14679077 5,1342327·10 ⁻⁴ - 8,11736325·10 ⁻⁷ 4,8113898·10 ⁻¹⁰ - 9,2054948·10 ³¹	0,011	0,29

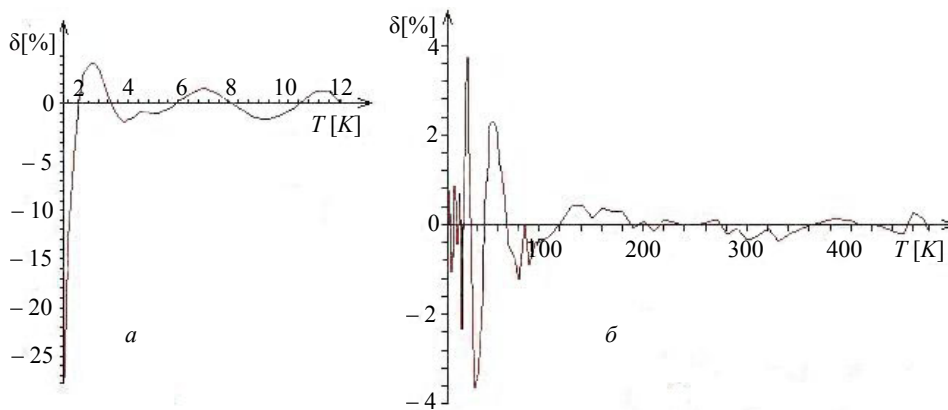


Рис. 1. Відносна похибка відтворення сплайном значення чутливості сенсора типу DT-471

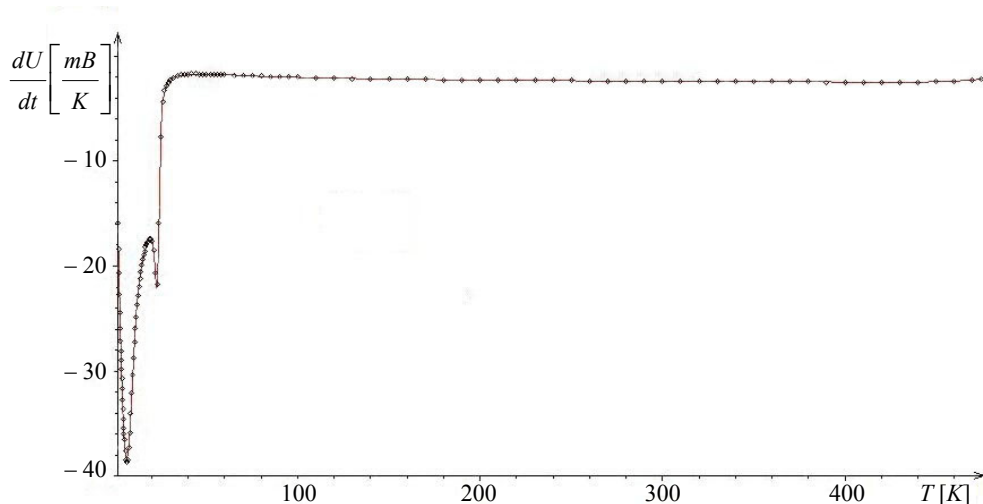


Рис. 2. Графіки чутливості сенсора типу DT-471

похибка відтворення чутливості сенсора зменшується, зокрема, у другій точці для температури 1,64 К вона становить 13 %, при температурі 1,8 К — 4,8 % і для решти точок спостереження на першій ланці продовжує спадати. Починаючи з температури 2,8 К відносна похибка відтворення чутливості сенсора не перевищує 3,4 % (див. графік а на рис. 1). Деяке зростання відносної похибки відтворення сплайном чутливості сенсора до 3,76 % спостерігається на четвертій ланці для температури 30 К (див. графік б на рис. 1). Це зростання похибки пояснюється наявним у цьому інтервалі локальним максимумом функції, що описує чутливість сенсора (див. рис. 2).

На рис. 2 значення чутливості сенсора, обчислені за сплайном, зображено неперервною кривою, а спостережувані значення чутливості показано точками.

Подані в табл. 1 результати апроксимації температурної характеристики та чутливості термодіодного сенсора типу DT-471 фірми Lake в діапазоні від 1,4 К до 475 К і наведені графіки підтверджують ефективність застосування неперервного та гладкого мінімаксного сплайн-наближення експоненційним виразом (1) для відтворення температурної характеристики та чутливості термодіодного сенсора. Порівняно з відповідним сплайн-наближенням із поліноміальними ланками з такою ж кількістю параметрів [4], відносна похибка відтворення чутливості сенсора при температурі 30 К майже вдвічі менша.

Висновки. Мінімаксне наближення з точним відтворенням значень функції та її похідної сумою многочлена й експоненти з заданим показником степеня (1) існує й до того ж єдине для неперервних і диференційованих функцій. Якщо k — кількість точок, у яких точно відтворюється значення функції та її похідної, то згідно (7) таке мінімаксне наближення виразом (1) характеризується $(m - k + 1)$ точками альтернанса. Під час побудови неперервного та гладкого мінімаксного сплайн-наближення

виразом (1) значення його параметрів на першій ланці визначається як рівномірне наближення з точним відтворенням значення функції та її похідної у крайній правій точці ланки (19), на останній ланці сплайна з точним відтворенням значення функції та похідної у крайній лівій точці ланки (21), а на решті ланок, починаючи з другої до передостанньої, визначаються відповідно до характеристичної властивості рівномірного наближення з точним відтворенням значення функції та похідної у крайніх точках цих ланок (20).

Апроксимація температурної характеристики термодіодного сенсора типу DT-471 фірми Lake в діапазоні від 1,4 К до 475 К підтверджує ефективність застосування неперервного та гладкого мінімаксного сплайн-наближення сумою многочлена й експоненти з заданим степенем для відтворення температурної характеристики та чутливості термодіодного сенсора. Відносна похибка відтворення чутливості сенсора цим сплайном майже вдвічі менша від наближення сплайном із поліноміальними ланками та такою ж кількістю параметрів. Похибку відтворення чутливості сенсора похідною від неперервного мінімаксного сплайн-наближення експоненційним виразом вдасться ще дещо зменшити шляхом вибору відповідного значення степеня експоненти q у виразі (1) або приймаючи різні значення для параметра q на різних ланках.

Література

- [1] Денисюк В. П., Марченко Б. Г. Сплайны и их приложения в задачах моделирования и обработки измерительных сигналов. — К.: Национальный технический университет Украины «КПИ», 1995. — 246 с.
- [2] Иващенко А. Н., Шварц Ю. М. Аппроксимация термометрических характеристик кремниевых диодных сенсоров температуры // Оптоэлектроника и полупроводниковая техника: межвед. сб. науч. тр. — 2003. — Вып. 38. — С. 61-70.
- [3] Шварц Ю. М., Яганов П. А., Дзюба В. Г. Нейросетевая аппроксимация термометрической характеристики диодного сенсора // Технология и конструирование в электрон. аппаратуре. — 2005. — № 5. — С. 18-22.
- [4] Малачівський П., Пізюр Я., Андруник В. Неперервне й гладке рівномірне сплайн-наближення температурної характеристики сенсора і його чутливості // Вимірювальна техніка та метрологія. — 2007. — № 67.
- [5] Коллатц Л., Крабс В. Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения. — М.: Наука, 1978. — 272 с.
- [6] Малачівський П. С. Рівномірне наближення функцій з інтерполюванням у заданих точках // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2006. — Вип. 4. — С. 142-150.
- [7] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников. — М.: Мир, 1977. — 831 с.
- [8] Попов Б. А. Равномерное приближение сплайнами. — К.: Наук. думка, 1989. — 272 с.
- [9] Малачівський П., Андруник В. Рівномірне сплайн-наближення // «Комп'ютерні технології друкарства». — Львів: Українська академія друкарства, 2002. — № 7. — С. 107-115.
- [10] www.lakeshore.com/.../Curve 10/

Continuous and Smoothed Minimax Spline-Approximation by Exponential Expression

Vasyl Andrunyk, Petro Malachivskyi

The properties of minimax (Chebyshev, uniform) approximation with exact reproduction of function values and its derivative by sum of polynomial and exponent with a priori given power degree are considered. The algorithm for construction of continuous and smooth spline-approximation with a priori given error is described. The example of application of this approximation for the transfer-function of diode temperature sensor for cryogenic temperatures is given. The value comparison of sensor sensitivity and derivative of obtained spline is conducted.

Непрерывная и гладкая минимаксная сплайн-аппроксимация экспоненциальным выражением

Василь Андруник, Петро Малачивский

Рассмотрены свойства минимаксного (чебышевского, равномерного) приближения с точным восстановлением значений функции и ее производной суммой многочлена и экспоненты с заданным показателем степени. Установлены необходимые и достаточные условия существования такого минимаксного приближения. Описан алгоритм построения непрерывного и гладкого минимаксного сплайн-приближения экспоненциальным выражением с заданной погрешностью. Приведен пример применения такого сплайн-приближения для описания низкотемпературной характеристики термодиодного сенсора. Проведены сравнения значений чувствительности сенсора и производной полученного сплайна.

Отримано 11.04.07