УДК 519.6; 539.3

Числовий аналіз напружено-деформованого стану порожнистого циліндра з тонким включенням

Ярема Савула[1], Людмила Винницька[2]

[1] д. ф.-м. н., професор, Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: savula@franko.lviv.ua
[2] Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів, 79000,
e-mail: lyuda_vyn@yahoo.com

Розглядається плоска задача про визначення напружено-деформованого стану пружного циліндра з тонким включенням, що перебуває під дією рівномірного навантаження. Напружено-деформований стан циліндра описується рівняннями просторової теорії пружності, а включення — рівняннями безмоментної теорії оболонок. На межі контакту задаються умови спряження, які відповідають ідеальному механічному контакту. Для числового аналізу цієї крайової задачі застосовується метод скінченних елементів (МСЕ). Подано результати числових експериментів. Проведено порівняння аналітичного розв'язку з розв'язком задачі, отриманим з використанням МСЕ.

Ключові слова: плоска задача, гетерогенна математична модель, математична теорія пружності, безмоментна теорія оболонок, метод скінченних елементів, ієрархічний базис.

Вступ. У математичному моделюванні реальних об'єктів виникає потреба об'єднання в одній моделі різномасштабних елементів, які мають різні властивості. Такий підхід у сучасній науці отримав назву гетерогенного різномасштабного методу (ГРМ) [1]. До проблем, що вирішують із використанням ГРМ, належить також моделювання процесів деформування в механіці пружних тіл із тонкими покриттями та включеннями. Необхідність розгляду таких задач зумовлена тим, що наявність тонких включень чи покриттів істотно впливає на розподіл переміщень, деформацій і напружень у системах.

В огляді [2] зазначено, що в основу сучасного підходу до моделювання контактної взаємодії тіл із тонкими включеннями закладено принцип спряження континуумів різної вимірності, який полягає в заміні тонкого прошарку його серединною кривою (у двовимірних задачах) чи серединною поверхнею (для тривимірних задач). Таким чином, тонкий об'єкт вилучають із розгляду, замінюючи його вплив, зокрема, для задач теорії пружності, стрибками напружень. Ще одним підходом до розв'язування задач із тонкими включеннями є застосування числових методів, зокрема методу скінченних елементів. При цьому вважають, що і тонке включення, і масивна частина описуються однією і тією ж моделлю.

У даній роботі об'єднано обидва підходи. Для запису математичної моделі використано теорію пружності (масивна частина) та безмоментну теорію оболонок (тонке включення). Із припущення, що на спільних границях матриці та тонкого прошарку виконуються умови ідеального механічного контакту, отримано умови спряження, які дають змогу об'єднати рівняння в одну систему. Числовий аналіз задачі здійснено методом скінченних елементів.

1. Формулювання задачі

Розглянемо циліндричне тіло, яке перебуває під дією рівномірного внутрішнього p_1 і зовнішнього p_2 навантажень (див. рис. 1). Нехай r_1, r_2 — внутрішній і зовнішній радіуси циліндра. Циліндр містить тонке включення — оболонку товщини h, серединна поверхня якої співпадає з поверхнею $r = r_s$, $r_1 \le r_s \le r_2$.

Розглянемо випадок, коли $r_1 < r_s < r_2$. Тоді область поперечного перерізу циліндра з тонким включенням Ω складається з трьох підобластей $\Omega = \Omega_1^+ \cup \Omega_1^- \cup \Omega_2$ (див. рис. 1). Нехай $\Gamma_1^+, \Gamma_1^-, \Gamma_2$ — відповідно границі Ω_1^+, Ω_1^- і Ω_2. Приймемо також, що $\Gamma^+ = \Gamma_1^+ \cap \Gamma_2, \Gamma^- = \Gamma_1^- \cap \Gamma_2$.

Віднесемо Ω_1^+, Ω_1^- до полярної системи координат r, θ. Позначимо через $\vec{n} = (n_1, n_2)$, $\vec{t} = (t_1, t_2)$ одиничні вектори нормалі та дотичної в точках кривих Γ_1^+, Γ_1^-.

Підобласть Ω_2 віднесемо до криволінійної ортогональної системи координат ξ_1, ξ_2, яка пов'язана з серединною кривою S. У кожній точці кривої S визначено $\vec{e}_1$ — одиничний вектор дотичної й $\vec{e}_2$ — одиничний вектор нормалі. Вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ утворюють ортогональний базис таким чином, що ξ_1 співпадає з напрямком $\vec{e}_1$, а ξ_2 — з напрямком $\vec{e}_2$. Серединну криву S задамо радіус-вектором $\vec{r}_m(\xi_1), |\vec{r}_m(\xi_1)| = r_s$. Тоді радіус-вектор $\vec{r}(\xi_1, \xi_3)$ довільної точки з Ω_2 можна подати у вигляді

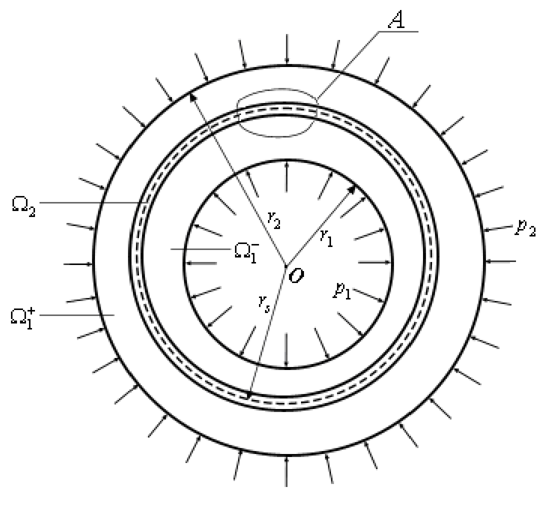

Рис. 1. Поперечний переріз циліндричного тіла з тонким включенням

$$\vec{r}\left(\xi_1,\xi_2\right)=\vec{r}_m\left(\xi_1\right)+\xi_2\vec{e}_2\left(\xi_1\right),\ \xi_2\in\left[-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right].$$

Коефіцієнти Ляме та кривизни серединної кривої оболонки є такими

$$A_1=r_S,\quad A_2=1,\quad k_1=\frac{1}{r_S},\quad k_2=0\,,$$

а коефіцієнти Ляме криволінійної системи координат визначаються співвідношеннями

$$H_1=A_1\left(1+k_1\xi_2\right),\quad H_2=A_2\left(1+k_2\xi_2\right)=1,\quad H_3=1\,.$$

Напружено-деформований стан пружного тіла, що займає області Ω_1^+,Ω_1^-, описується рівняннями [3]

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta}+\dfrac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}=0,\\ \dfrac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}+2\dfrac{\sigma_{r\theta}}{r}=0,\end{cases}\qquad r,\theta\in\Omega_1^+,\Omega_1^-\,. \tag{1}$$

Компоненти тензора напружень σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ та тензора деформацій ε_{rr}, $\varepsilon_{\theta\theta}$, $\varepsilon_{r\theta}$ пов’язані співвідношеннями

$$\sigma_{rr}=\frac{E_1}{1-\nu_1{}^2}\left(\varepsilon_{rr}+\nu_1\varepsilon_{\theta\theta}\right),\quad \sigma_{\theta\theta}=\frac{E_1}{1-\nu_1{}^2}\left(\varepsilon_{\theta\theta}+\nu_1\varepsilon_{rr}\right),\quad \sigma_{r\theta}=\frac{E_1}{1+\nu_1}\varepsilon_{r\theta}\,,$$

де E_1 — модуль Юнга, ν_1 — коефіцієнт Пуассона.

Для визначення деформацій ε_{rr}, $\varepsilon_{\theta\theta}$, $\varepsilon_{r\theta}$ маємо формули

$$\varepsilon_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r},\quad \varepsilon_{\theta\theta}=\frac{1}{r}\left(u_r+\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right),\quad \varepsilon_{r\theta}=\frac{1}{2r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-u_r+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right),$$

де u_r, u_θ — компоненти вектора переміщень точок областей Ω_1^+,Ω_1^-.

Напружено-деформований стан пружного тіла, яке займає область Ω_2, опишемо рівняннями безмоментної теорії оболонок [4]

$$\begin{cases}-\dfrac{1}{A_1}\dfrac{dT_{11}}{d\xi_1}=\left(1+k_1\dfrac{h}{2}\right)\sigma_{12}^+-\left(1-k_1\dfrac{h}{2}\right)\sigma_{12}^-,\\ k_1T_{11}=\left(1+k_1\dfrac{h}{2}\right)\sigma_{22}^+-\left(1-k_1\dfrac{h}{2}\right)\sigma_{22}^-,\end{cases}\qquad \xi_1\in S\,. \tag{2}$$

Тут T_{11} — зусилля в оболонці, $\sigma_{12}^+,\sigma_{22}^+$ — компоненти поверхневого навантаження на зовнішній лицевій поверхні оболонки $\xi_2=h/2$, а $\sigma_{12}^-,\sigma_{22}^-$ — компоненти поверхневого навантаження на внутрішній лицевій поверхні оболонки $\xi_2 = -h/2$. Відомо, що

$$T_{11} = \frac{E_2 h}{1-\nu_2{}^2}\varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_{11} = \frac{1}{A_1}\frac{d\upsilon_1}{d\xi_1} + k_1 w,$$

де E_2 — модуль Юнга, а ν_2 — коефіцієнт Пуассона матеріалу включення, υ_1, w — компоненти вектора переміщень точок серединної кривої S. Зазначимо, що в безмоментній теорії оболонок приймають, що переміщення не змінюються по товщині оболонки.

На границі області Ω задамо такі граничні умови

$$\sigma_{rr}\big|_{r=r_1} = -p_1, \quad \sigma_{rr}\big|_{r=r_2} = -p_2, \quad \sigma_{r\theta}\big|_{r=r_1} = \sigma_{r\theta}\big|_{r=r_2} = 0\,. \tag{3}$$

Вважаємо, що на спільних границях тіла та включення виконуються умови ідеального механічного контакту. Для запису таких умов спряження розглянемо фрагмент A області Ω з розділеними границями (рис. 2). Тоді на Γ^+ умови спряження подамо у вигляді

$$u_n = -w, \quad u_t = -\upsilon_1, \tag{4}$$

$$\sigma_{nn} = \sigma_{22}^+, \quad \sigma_{nt} = \sigma_{12}^+, \tag{5}$$

на Γ^- умови спряження задамо співвідношеннями

$$u_n = w, \quad u_t = \upsilon_1, \tag{6}$$

$$\sigma_{nn} = \sigma_{22}^-, \quad \sigma_{nt} = \sigma_{12}^-, \tag{7}$$

де

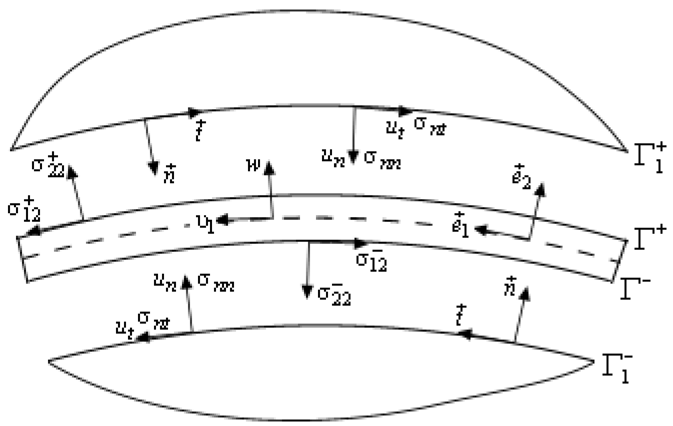

Рис. 2. Фрагмент області Ω з розділеними границями

$$u_n = u_r n_1 + u_\theta n_2, \quad u_t = -u_r n_2 + u_\theta n_1,$$
$$\sigma_{nn} = \sigma_{rr} n_1^2 + 2\sigma_{r\theta} n_1 n_2 + \sigma_{\theta\theta} n_2^2,$$
$$\sigma_{nt} = \sigma_{rr} n_1 t_1 + \sigma_{r\theta}\left(n_1 t_2 + n_2 t_1\right) + \sigma_{\theta\theta} n_2 t_2. \tag{8}$$

Оскільки на $\Gamma^+ \in \Gamma_1^+$ для векторів нормалі та дотичної маємо $\vec{n}$ = (– 1, 0), $\vec{t}$ = (0, – 1), то, враховуючи подання (8), для умов спряження дістаємо такі співвідношення

$$u_r = w, \quad u_\theta = \upsilon_1, \tag{9}$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{22}^+, \quad \sigma_{r\theta} = \sigma_{12}^+. \tag{10}$$

Оскільки $\vec{n} = (1,0), \vec{t} = (0,1)$ на $\Gamma^- \in \Gamma_1^-$, то, враховуючи співвідношення (8), головні умови спряження (6) також можна подати у вигляді (9), а природні умови мають вигляд

$$\sigma_{rr} = \sigma_{22}^-, \quad \sigma_{r\theta} = \sigma_{12}^-. \tag{11}$$

Отже, для визначення напружено-деформованого стану циліндра з тонким включенням, який перебуває під дією рівномірного навантаження, маємо системи рівнянь (1), (2), граничні умови (3) й умови спряження (9)-(11).

Для запису варіаційного формулювання задачі розглянемо простір

$$V = \Big\{U = \left(\vec{u}, \vec{\upsilon}:\quad \vec{u} = \left(u_r, u_\theta\right),\ \vec{\upsilon} = \left(\upsilon_1, w\right)\right),\ u_r, u_\theta \in W_2^{(1)}\left(\Omega_1^+ \cup \Omega_1^-\right),$$
$$\upsilon_1 \in W_2^{(1)}(S),\ w \in L_2(S),\ \text{умова (9)}\Big\}.$$

Введемо білінійну форму $A\left(U,\tilde{U}\right) = a_1\left(\vec{u},\tilde{\vec{u}}\right) + a_2\left(\vec{\upsilon},\tilde{\vec{\upsilon}}\right)$, де

$$a_1\left(\vec{u},\tilde{\vec{u}}\right) = \iint\limits_{\Omega_1^+}\left(\sigma_{rr}\tilde{\varepsilon}_{rr} + \sigma_{r\theta}\tilde{\varepsilon}_{r\theta} + \sigma_{\theta\theta}\tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}\right) r dr d\theta +$$
$$+\iint\left(\sigma_{rr}\tilde{\varepsilon}_{rr} + \sigma_{r\theta}\tilde{\varepsilon}_{r\theta} + \sigma_{\theta\theta}\tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}\right) r dr d\theta,$$

$$a_2\left(\vec{\upsilon},\tilde{\vec{\upsilon}}\right) = \int\limits_S T_{11}\tilde{\varepsilon}_{11} A_1 d\xi_1,$$

та лінійну форму

$$l\left(\tilde{U}\right) = -\int\limits_{\Gamma_1^- \setminus \Gamma^-} p_1 \tilde{u}_r d\Gamma - \int\limits_{\Gamma_1^+ \setminus \Gamma^+} p_2 \tilde{u}_r d\Gamma.$$

Тоді слабке варіаційне формулювання задачі запишемо так: знайти таку функцію $U \in V$, що задовольняє варіаційне рівняння

$$A\left(U,\tilde{U}\right) = l\left(\tilde{U}\right) \quad \forall\, \tilde{U} \in V. \tag{12}$$

Аналогічним чином можна сформулювати задачу, якщо включення є покриттям на внутрішній чи зовнішній поверхні тіла, тобто $r_s = r_1$ або $r_s = r_2$.

2. Розв'язування задачі

Таким чином ми отримали полівимірну задачу: підобласті Ω_1^+, Ω_1^- є двовимірними, а замість тонкого включення Ω_2 розглядаємо лише його серединну лінію S, яка є одновимірною областю.

Задачу (12) розв'язуємо методом скінченних елементів. Вважаємо, що двовимірні підобласті є об'єднанням трикутних елементів, одновимірна область — об'єднання одновимірних елементів, а вузли області S співпадають із вузлами двовимірних областей.

2.1. Апроксимації на скінченних елементах. Для апроксимації наближеного розв'язку на одно- та двовимірних скінченних елементах застосуємо ієрархічні базиси, які будуються з використанням поліномів Лежандра та володіють такою властивістю: базис порядку $p + 1$ охоплює усі базисні функції від 1-го до p-го порядку апроксимації [5, 6].

Одновимірний ієрархічний базис. На відрізку $\Omega_*^{(1)} = \{\xi : \ -1 \le \xi \le 1\}$ будуємо базис порядку p. Подамо апроксимаційні функції у вигляді

$$\varphi_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2}, \quad \varphi_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2},$$
$$\varphi_j = \frac{1}{\sqrt{2(2j-3)}}\left(P_{j-1}(\xi) - P_{j-3}(\xi)\right), \quad j = \overline{3, p+1}, \tag{13}$$

де P_i — поліноми Лежандра, для яких справджується така рекурентна формула

$$(n+1)P_{n+1}(t) = (2n+1)P_n(t) - nP_{n-1}(t), \ n = 1,2,..., \quad P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = t.$$

Зазначимо, що базисні функції $\varphi_j(\xi)$ мають такі властивості

$$\varphi_1(-1) = \varphi_2(1) = 1, \quad \varphi_1(1) = \varphi_2(-1) = 0, \quad \varphi_j(-1) = \varphi_j(1) = 0, \ j = \overline{3, p+1}.$$

Тому функції $\varphi_1(\xi)$, $\varphi_2(\xi)$ називають вузловими, а $\varphi_j(\xi)$ $j = \overline{3, p+1}$ — функціями-«бульбашками».

Двовимірний ієрархічний базис. Двовимірний ієрархічний базис порядку p будують на стандартному скінченному елементі $\Omega_*^{(2)}$ — рівносторонньому трикутнику зі стороною довжини 2 (рис. 3). Базис складається з таких груп функцій: вузлових, реброви та внутрішніх. Для їхньої побудови використовують барицентричні координати L_1, L_2, L_3, де

$$L_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \xi - \frac{\eta}{\sqrt{3}}\right), \quad L_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \xi - \frac{\eta}{\sqrt{3}}\right), \quad L_3 = \frac{\eta}{\sqrt{3}}. \tag{14}$$

Усього визначено три вузлові функції, які набувають одиничного значення у відповідній вершині трикутника та дорівнюють нулю на стороні, протилежній до цієї вершини

$$N_i^0(\xi,\eta) = L_i, \quad i=\overline{1,3}. \tag{15}$$

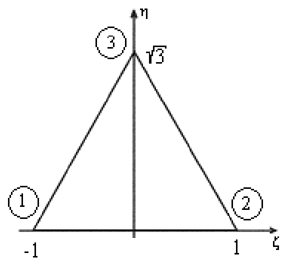

Рис. 3. Стандартний трикутний елемент

На кожній стороні трикутника визначено $p-1$ реброві функцій таких, що набувають нульових значень на двох інших сторонах

$$N_i^{1,j}(\xi,\eta) = L_j L_k \varphi_i\left(L_j, L_k\right), \quad j=\overline{1,3}, \quad i=\overline{1,p-1}, \quad k=1+j \bmod 3;$$

$$\varphi_i\left(L_j, L_k\right) = -\frac{8\sqrt{4i+2}}{i(i+1)} P_i'\left(L_j - L_k\right). \tag{16}$$

Також визначено $(p-2)(p-1)/2$ внутрішніх функцій, які дорівнюють нулю на усіх сторонах трикутника

$$N_{i_k+r}^2(\xi,\eta) = L_1 L_2 L_3 \psi_{j_1 j_2}\left(L_1, L_2, L_3\right), \quad k=\overline{3,p},$$

$$i_k = \frac{(k-3)(k-2)}{2}, \quad j=\overline{1,k-2}, \quad j_1+j_2=k-3,$$

$$\psi_{j_1 j_2}\left(L_1, L_2, L_3\right) = P_{j_1}\left(L_2 - L_1\right) P_{j_2}\left(2L_3 - 1\right). \tag{17}$$

Отже, розмірність базису на трикутнику дорівнює $(p-2)(p-1)/2$.

Зазначимо, що реброві функції входять до базису починаючи з другого порядку апроксимації, а внутрішні — з третього.

2.2. Формування системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Двовимірний базис p-го порядку апроксимації побудований таким чином, що на кожній стороні трикутника дві вузлові функції та $p-1$ реброві функцій не дорівнюють нулю (разом $p+1$ функція). Відображаючи сторони трикутника на відрізок [–1; 1] при обході проти годинникової стрілки, отримуємо, що значення реброві функцій співпадають зі значеннями відповідних функцій одновимірного базису порядку p.

Оскільки головні умови спряження (9) мають простий вигляд, а кожному з $p+1$ шуканих значень на одновимірному елементі однозначно ставиться у відповідність одна з $(p+1)(p+2)/2$ невідомих на відповідному трикутному елементі, то локальні матриці жорсткості та вектори навантажень як для двовимірних, так і для одновимірних елементів не потребують ніяких змін. Формування СЛАР здійснюється у традиційний спосіб поелементно.

3. Аналітичний розв'язок задачі

Оскільки задача є осесиметричною, то для Ω_1^+, Ω_1^- $u_\theta = 0$ і розв'язок задачі не залежить від θ. Для Ω_2 отримуємо

ISSN 1816-1545 **Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології**
2007, вип. 6, 54-65

$$\upsilon_1 = 0\,, \quad \sigma_{12}^- = \sigma_{12}^+ = 0\,, \quad w = const\,, \tag{18}$$

$$T_{11} = \frac{E_2 h}{1-\nu_2{}^2}\varepsilon_{11}\,, \quad \varepsilon_{11} = k_1 w\,. \tag{19}$$

Враховуючи співвідношення (18) та (19), перше рівняння системи (2) перетворюється в тотожність, а друге набуде вигляду

$$\frac{E_2 h k_1{}^2}{1-\nu_2{}^2}w = \left(1 + k_1\frac{h}{2}\right)\sigma_{22}^+ - \left(1 - k_1\frac{h}{2}\right)\sigma_{22}^-\,. \tag{20}$$

Якщо тонке включення відсутнє, тобто $\Omega_2 = \varnothing$, то отримуємо класичну задачу Ляме, для якої відомий аналітичний розв'язок

$$\sigma_{rr} = 2B_0 + \frac{C_0}{r^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = 2B_0 - \frac{C_0}{r^2}, \quad u_r = \frac{1}{E_1}\left[2B_0\left(1-\nu_1\right)r - \left(1+\nu_1\right)\frac{C_0}{r}\right], \tag{21}$$

де B_0 і C_0 невідомі величини, які визначаємо з граничних умов.

Якщо $r_1 < r_s < r_2$ на $\Omega_1^- = \left\{r : r_1 \le r \le r_S\right\}$, то вирази (21) для σ_{rr} та u_r набудуть вигляду

$$\sigma_{rr}^- = 2B_1 + \frac{C_1}{r^2}, \quad u_r^- = \frac{1}{E_1}\left[2B_1\left(1-\nu_1\right)r - \left(1+\nu_1\right)\frac{C_1}{r}\right], \tag{22}$$

і, відповідно, на $\Omega_1^+ = \left\{r : \ r_S \le r \le r_2\right\}$

$$\sigma_{rr}^+ = 2B_2 + \frac{C_2}{r^2}, \quad u_r^+ = \frac{1}{E_1}\left[2B_2\left(1-\nu_1\right)r - \left(1+\nu_1\right)\frac{C_2}{r}\right]. \tag{23}$$

Якщо врахувати граничні умови й умови спряження, які мають вигляд

$$\begin{aligned} &\sigma_{rr}^-\Big|_{r=r_1} = -p_1, \quad \sigma_{rr}^+\Big|_{r=r_2} = -p_2, \\ &w = u_r^-\Big|_{r=r_S}, \quad \sigma_{22}^- = \sigma_{rr}^-\Big|_{r=r_S}, \\ &w = u_r^+\Big|_{r=r_S}, \quad \sigma_{22}^+ = \sigma_{rr}^+\Big|_{r=r_S}, \end{aligned} \tag{24}$$

то для невідомих C_i, B_i (i = 1, 2) одержимо

$$\begin{aligned} &C_1 = -r_1{}^2\left(p_1 + 2B_1\right), \quad C_2 = -r_2{}^2\left(p_2 + 2B_2\right), \\ &B_1 = \frac{2B_2\left[\left(1-\nu_1\right)r_s{}^2 + \left(1+\nu_1\right)r_2{}^2\right] + \left(1+\nu_1\right)\left(r_2{}^2 p_2 - r_1{}^2 p_1\right)}{2\left[\left(1-\nu_1\right)r_s{}^2 + \left(1+\nu_1\right)r_1{}^2\right]}, \quad B_2 = \frac{l_1}{2l_2}, \end{aligned} \tag{25}$$

де

$$l_1 = \frac{\left(1-\nu_2{}^2\right)E_1}{E_2 h k_1{}^2 r_S}\left\{\left(1-k_1\frac{h}{2}\right)\left[\frac{(1+\nu_1)\left(r_2{}^2 p_2 - r_1{}^2 p_1\right)\left(r_S{}^2 - r_1{}^2\right)}{(1-\nu_1)r_S{}^2+(1+\nu_1)r_1{}^2} - r_1{}^2 p_1\right]+\right.$$

$$\left.+\left(1+k_1\frac{h}{2}\right)r_2{}^2 p_2\right\}+(1+\nu_1)r_2{}^2 p_2,$$

$$l_2 = \frac{\left(1-\nu_2{}^2\right)E_1}{E_2 h k_1{}^2 r_s}\left[\left(1-k_1\frac{h}{2}\right)\left(r_1{}^2 - r_S{}^2\right)\frac{(1-\nu_1)r_S{}^2+(1+\nu_1)r_2{}^2}{(1-\nu_1)r_S{}^2+(1+\nu_1)r_1{}^2}+\right.$$

$$\left.+\left(1+k_1\frac{h}{2}\right)\left(r_S{}^2 - r_2{}^2\right)\right]-(1-\nu_1)r_S{}^2-(1+\nu_1)r_2{}^2.$$

Аналогічним чином можна знайти аналітичні розв'язки для випадків $r_s = r_1$ та $r_s = r_2$.

4. Результати числових експериментів

Розглянемо задачу для циліндра з тонким включенням, який перебуває під дією зовнішнього тиску $p_2 = 1$. Наведемо тут результати порівняння аналітичного та числового розв'язків цієї задачі. З огляду на осьову симетрію числовий аналіз проведемо для області $\Omega^* \in \Omega$, $\Omega^* = \{(r,\theta):\ r_1 \le r \le r_2,\ \theta_1 \le \theta \le \theta_2\}$. Приймаємо, що на частинах границі $\theta = \theta_1$ та $\theta = \theta_2$ виконуються умови симетрії, $r_2 / r_1 = 2$, $r_s / r_1 = 1{,}5$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 1$, $E_2 / E_1 = 70$, $h_1 / h = 100$, де $h_1 = r_2 - r_1$ — товщина циліндра.

Для аналізу похибок та порядків збіжності проведемо дослідження задачі на скінченно-елементних поділах C, M, F (рис. 4). Нехай $(r, \theta)_i$ — деяка вузлова точка. Оскільки розв'язок не залежить від θ, то результати наведено на лінії $\theta = 0{,}5$.

Табл. 1 містить значення відносної похибки δ в сітковій нормі $L_2^{h_*}$, де

$$\delta = \frac{\left\|u_r^{h_*} - u_r^0\right\|_{L_2^{h_*}}}{\left\|u_r^0\right\|_{L_2^{h_*}}},\quad \|g(r,\theta)\|_{L_2^{h_*}} = \sqrt{\sum_i \left[g(r,\theta)_i\right]^2},$$

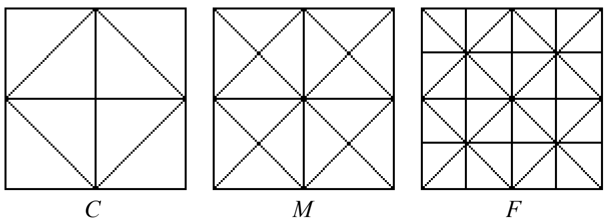

Рис. 4. Поділи на скінченні елементи
для дослідження похибки та порядку збіжності

для поділів C, M, F і порядків апроксимації $1 \le p \le 5$. Тут $u_r^{h_*}$ — числовий результат, u_r^0 — аналітичний розв’язок.

У табл. 2 подано апостеріорні порядки збіжності переміщень u_r, обчислені за формулою

$$n = \frac{\left\| u_r^{2h_*} - u_r^0 \right\|_{L_2} - \left\| u_r^{h_*} - u_r^0 \right\|_{L_2}}{\ln 2},$$

$$\left\| g(r,\theta) \right\|_{L_2} = \sqrt{\int_{r_1}^{r_2} g^2(r,\theta)\,dr}, \quad \theta = const$$

для різних порядків апроксимації p. Тут $h_* = 0{,}25$, $u_r^{h_*}$ та $u_r^{2h_*}$ — значення u_r, знайдені на поділах F та M відповідно.

На рис. 5 та 6 наведено розподіли наближених значень переміщення u_r. Обчислення здійснено на поділі з кроком, вдвічі меншим від кроку поділу F, для порядку апроксимації $p = 3$.

Бачимо (див. рис. 5), що збільшення відношення модуля Юнга матеріалу включення до модуля Юнга матеріалу масивної частини циліндра у разі сталого відношення їх товщин приводить до зменшення переміщень u_r. Такого ж результату можна досягнути завдяки збільшенню товщини включення при фіксованих характеристиках матеріалу (див. рис. 6).

Криві на рис. 7 і 8 ілюструють розподіли напружень у тілі з включенням. Внаслідок наявності включення всередині циліндра напруження σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$ мають стрибок, величина якого прямо пропорційно залежить від товщини включення (рис. 7) і величини відношення модулів пружності включення та тіла (рис. 8).

Таблиця 1

Значення відносної похибки переміщень u_r

M / p	*C*	*M*	*F*
1	$3{,}60312\times10^{-2}$	$1{,}09450\times10^{-2}$	$9{,}34566\times10^{-3}$
2	$4{,}22831\times10^{-3}$	$1{,}29422\times10^{-3}$	$5{,}91032\times10^{-4}$
3	$4{,}04952\times10^{-4}$	$1{,}00318\times10^{-4}$	$4{,}04873\times10^{-5}$
4	$4{,}17230\times10^{-5}$	$9{,}29692\times10^{-6}$	$2{,}19531\times10^{-6}$
5	$4{,}64413\times10^{-6}$	$6{,}72261\times10^{-7}$	$1{,}57916\times10^{-7}$

Таблиця 2

Апостеріорні порядки збіжності

p	1	2	3	4	5
n	1,7438	2,3800	3,5444	4,3274	4,7004

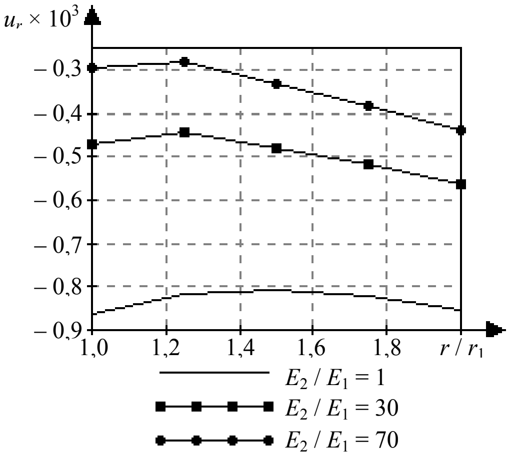

Рис. 5. Розподіли переміщень u_r для $r_s / r_1 = 1{,}25$; $h_1 / h = 50$

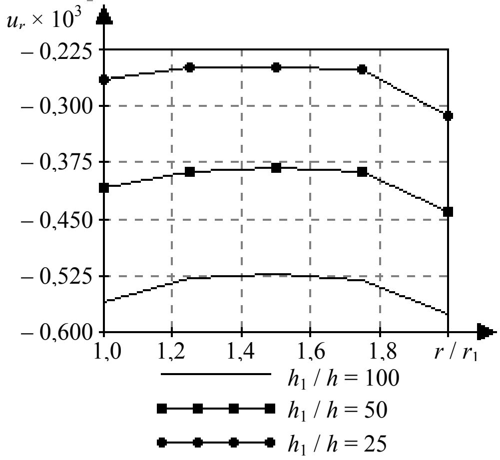

Рис. 6. Розподіли переміщень u_r для $r_s / r_1 = 1{,}75$; $E_2 / E_1 = 70$

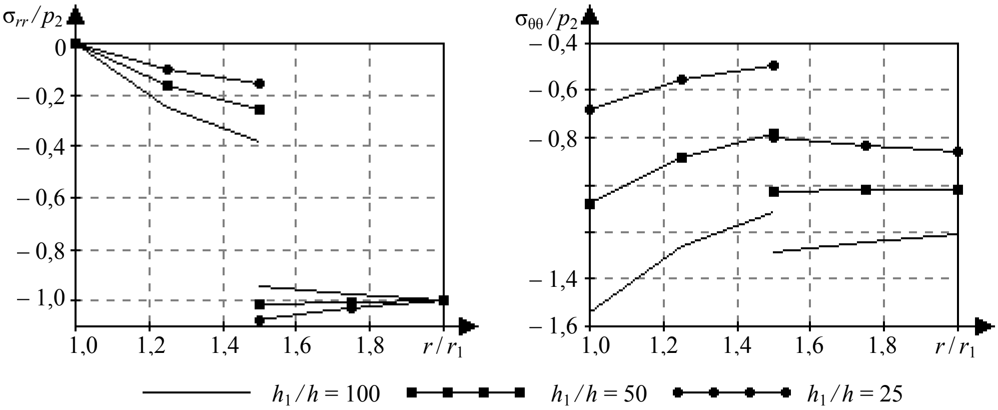

Рис. 7. Розподіли напружень для $r_s / r_1 = 1{,}5$; $E_2 / E_1 = 70$

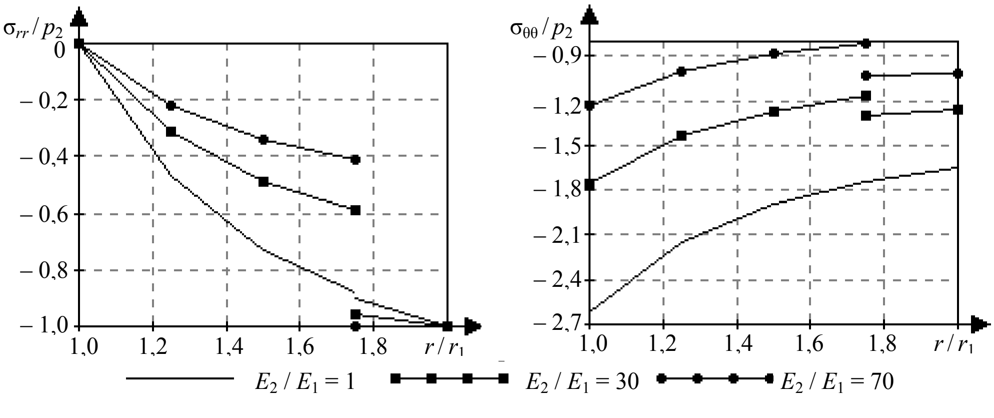

Рис. 8. Розподіли напружень σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$ для $r_s = 1{,}75$; $h_1 / h = 50$

Висновки. У роботі запропоновано підхід, який приводить до формулювання різномасштабних задач: напружено-деформований стан масивної частини описується просторовою теорією пружності, тонкого включення — безмоментною теорією оболонок і групи рівнянь різної вимірності, зв'язані спеціальними умовами спряження.

Для числового аналізу задач використано схеми МСЕ, побудовані на основі 2D й 1D ієрархічних базисів. Як свідчать результати числових експериментів, ці схеми володіють властивістю *hp*-збіжності. Апостеріорні порядки апроксимації корелюють з апріорними даними. Досліджено, що на межі контакту масивної частини та тонкого включення виникають стрибки напружень.

Література

[1] *W. E, B. Engquist, X. Li, W. Ren, E. Vanden-Eijden* The heterogeneous multiscale method: a review, 2005. Available from http://www.math.princeton.edu/multiscale.

[2] *Сулим Г. Т., Піскозуб Й. З.* Умови контактної взаємодії тіл (огляд) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2004. — Т. 47, № 3. — С. 110-125.

[3] *Демидов С. П.* Теория упругости. — М: Высш. школа, 1979. — 432 с.

[4] *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. — М: Гос. из-во технико-теоретической литературы, 1953. — 544 с.

[5] *Szabo B., Babushka I.* Finite element analysis. — New York: John Wiley & Sons, inc., 1991. — 368 p.

[6] *Савула Я. Г.* Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. — Львів: видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. — 221 с.

Numerical analysis of stress-strain state of hollow cylinder with thin inclusion

Yarema Savula, Lyudmyla Vynnytska

Plane static elasticity problem is considered in domain, which consists of hollow cylinder and thin inclusion under uniform loading. Stressed-strained state of the cylinder is described by equations of elasticity theory and equations of membrane shell theory are used to describe the state of the thin inclusion. Junction conditions of ideal mechanical contact are satisfied on the interface boundary. Numerical analysis of the problem is carried out by finite elements method. The analytical solution is compared to numerical results obtained by FEM.

Численный анализ напряженно-деформированного состояния полого цилиндра с тонким включением

Ярема Савула, Людмила Винницка

Рассматривается плоская задача о нахождении напряженно-деформированного состояния цилиндра с тонким включением под воздейсвием равномерного нагружения. Напряженно-деформированное состояние цилиндра описывается уравнениями математической теории упругости, а включения — уравнениями безмоментной теории оболочек. На границе контакта задаются условия сопряжения, соответствующие идеальному механическому контакту. Для численного анализа сформулированной краевой задачи используется метод конечных элементов (МКЭ). Приведены результаты численных экспериментов. Проведено сравнение аналитического решения с численнымы результатами, полученными с использованием МКЭ.

Отримано 11.10.07