УДК 62-501.72+681.62:655+510.5.52

# До розв'язування одного класу звичайних нелінійних диференціальних рівнянь

Іванна Дронюк[1], Марія Назаркевич[2]

[1] к. ф.-м. н., доцент, Національний Університет «Львівська політехніка», ІКНІТ, вул. Бандери, 12, Львів, e-mail: idronjuk@ukr.net
[2] к. т. н., доцент, Національний Університет «Львівська політехніка», ІКНІТ, вул. Бандери, 12, Львів, e-mail: nazarkevich@mail.ru

*Побудовано інструментарій для знаходження розв'язків системи звичайних диференціальних рівнянь зі степеневою нелінійністю. Для цього використано аперіодичні Ateb-функції. Параметри нелінійності є аргументами Ateb-функцій. Досліджено розв'язки системи рівнянь із різними параметрами нелінійності.*

**Ключові слова:** система нелінійних диференціальних рівнянь, моделювання складних систем, аперіодичні *Ateb*-функції.

**Вступ.** Динамічні процеси у складних нелінійних аперіодичних структурах можуть зазнавати малих збурень, які здатні впливати на їх стійкість. Пошуку розв'язків систем рівнянь, які описують процеси у таких структурах, присвячені праці [1, 2]. Присутність навіть малих нелінійних сил у системі приводить до того, що порушується принцип суперпозиції, й окремі гармоніки коливань вступають у взаємодію між собою, що може мати катастрофічні наслідки. Математичний апарат *Ateb*-функцій дозволяє отримати точні розв'язки нелінійних диференціальних рівнянь із степеневою нелінійністю. Точні розв'язки використовуються при керуванні та прогнозуванні збурень у нелінійних аперіодичних системах.

## 1. Розв'язування системи нелінійних диференціальних рівнянь із допомогою математичного апарату *Ateb*-функцій

Для керування динамічними процесами в істотно нелінійних коливних структурах з одним ступенем вільності необхідно отримати розв'язки відповідних систем з високою точністю [1]. Динамічні процеси в нелінійних коливних структурах описуються системами диференціальних рівнянь із степеневою нелінійністю вигляду [3]

$$\begin{cases} \dot{y} + \beta z^m = 0, \\ \dot{z} - \alpha y^n = 0, \end{cases} \tag{1}$$

де α, β — деякі дійсні сталі, а

$$n = \frac{2\theta_1' + 1}{2\theta_1'' + 1}, \quad m = \frac{2\theta_2' + 1}{2\theta_2'' + 1}, \quad \theta_* = \{\theta_1', \theta_1'', \theta_2', \theta_2''\}, \quad \theta_* = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Якщо $m = 1$, а $n$ визначається згідно співвідношень (2), то систему (1) можна привести до вигляду

$$\ddot{y} + c|y| \cdot y^{\theta-1} = 0, \tag{3}$$

де $\theta$ залежить від параметрів $\theta_1'$, $\theta_1''$, а $c$ — деяка стала.

Розв'язок системи (1) після деяких замін значень змінних можна виразити через неповну *Beta*-функцію, яка визначається рівністю [4]

$$B_x(p,q) = \int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt, \qquad x \in ]-1, 1[ \tag{4}$$

де $p$ і $q$ деякі числа. У частковому випадку при $x = 1$ формула (4) набуває вигляду інтеграла Ейлера першого роду

$$B_1(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt, \tag{5}$$

тобто повної *Beta*-функції.

Для всіх $t$ з інтервалу [0, 1] функції $B_x(p, q)$ задані формулами (4) є додатновизначеними [3] і задовольняють такі умови

$$0 \le B_x(p,q) \le B_1(p,q), \quad B_x(p,q) = B_1(p,q) - B_{1-x}(p,q).$$

Розглянемо два випадки, а саме,

$$p = \frac{1}{n+1}, \quad q = \frac{1}{m+1}; \tag{6}$$

$$p = \frac{1}{n+1}, \quad q = \frac{m}{m+1} - \frac{1}{n+1}, \tag{7}$$

де $m$ і $n$ визначаються формулами (2). Якщо $p > 0$, $q > 0$, то *Beta*-функція є визначеною та неперервною, а для інших дійсних значень $p$ і $q$ вона прямує у нескінченність. Для побудови розв'язку системи диференціальних рівнянь (1) при виконанні співвідношень (6) було введено аперіодичні *Ateb*-функції. *Ateb*-функції є оберненими функціями до *Beta*-функцій. *Ateb*-функції, побудовані для значень (6), прийнято називати періодичними, а для значень (7) — гіперболічними (аперіодичними) *Ateb*-функціями [4]. При $m = n = 1$ *Ateb*-функції співпадають із тригонометричними та гіперболічними функціями. Якщо $m, n$ задовольняють співвідношення (6), то система (1) описує коливальний рух, а якщо $m, n$ задовольняють співвідношення (7) — гіперболічний (аперіодичний) рух.

Аперіодична *Ateb*-функція $v = \mathrm{sha}(n, m, \omega)$ є оберненою до інтеграла [4, 5]

$$\omega = \frac{n+1}{2}\int_0^v \frac{dv'}{(1+v'^{n+1})^{\frac{m}{m+1}}}, \tag{8}$$

де ω — незалежна змінна ($-\infty \le \omega \le \infty$), $0 \le v \le \infty$, а $m$ і $n$ — параметри, які визначаються формулами (2) та задовольняють наступну умову аперіодичності

$$\frac{m}{m+1} - \frac{1}{n+1} \le 0. \tag{9}$$

Для $v = 1$ маємо

$$\omega_0 = \frac{n+1}{2}\int_0^1 \frac{dv'}{(1+v'^{n+1})^{\frac{m}{m+1}}}. \tag{10}$$

Підінтегральний вираз у формулі (8) розкладемо в степеневий ряд і почленно проінтегруємо. Тоді співвідношення (8) набуде вигляду

$$\omega = \frac{b}{2}v\left[1 - \frac{a}{1!(b+1)}v^b + \frac{a(a+1)}{2!(2b+1)}v^{2b} + \ldots + \right.$$
$$\left. + (-1)^k \frac{a(a+1)\ldots(a+k-1)}{k!(kb+1)}v^{kb} + \ldots\right], \tag{11}$$

де

$$a = \frac{m}{m+1}, \quad b = n+1. \tag{12}$$

Розклад у ряд (11) справедливий для всіх $m$ і $n$, що мають вигляд (2) і задовольняють нерівність (9). Ліва частина нерівності (9) не може бути цілим числом. Тому в розкладі (11) знаменники дробів не набувають нульових значень. Розклад у ряд аперіодичних *Ateb*-функцій є збіжним [3, 5].

Співвідношенням

$$\left[\mathrm{cha}(m,n,\omega)\right]^{m+1} - \left[\mathrm{sha}(n,m,\omega)\right]^{n+1} = 1. \tag{13}$$

вводять у розгляд аперіодичну *Ateb*-функцію $\mathrm{cha}(n, m, \omega)$.

З допомогою аперіодичних *Ateb*-функцій вдалося побудувати точні розв'язки системи диференціальних рівнянь (1) [4]. Ці ж функції можуть бути використані для побудови точних розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь, що задані у вигляді (3) [5]. Однак, застосування формул точних розв'язків системи диференціальних рівнянь (1) і диференціального рівняння (3) у вигляді аперіодичних *Ateb*-функцій було суттєво обмежене недостатнім розвитком обчислювальної техніки.

**ISSN 1816-1545 Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології**
**2007, вип. 6, 136-140**

## 2. Комп'ютерна реалізація обчислення аперіодичних *Ateb*-функцій

Параметри нелінійності системи диференціальних рівнянь (1) є аргументами *Ateb*-функцій. У роботі запропоновано інструментарій для обчислення та побудови графіків аперіодичних *Ateb*-функцій.

Комп'ютерна реалізація обчислень передбачає введення початкових даних: $m$ і $n$, які задаються формулами (2); кроку обчислень; а також вибір графіку функції sha($n$, $m$, ω) чи cha($n$, $m$, ω), що буде будуватися.

Розглянемо докладніше реалізацію обчислень. На початковому етапі для введених значень $m$ і $n$ за формулою (4) обчислюємо значення повної *Beta*-функції, де $p$ і $q$ задані (6). Для обчислення визначеного інтеграла застосовуємо метод трапецій [6]. Це значення необхідне для визначення $\omega_0$ за формулою (10). Крок обчислень може бути змінений залежно від довжини інтервалу $[0, \omega_0]$ і вимог деталізації розв'язків. Введемо у розгляд функцію

$$F_1(\omega, v) = \omega - v\frac{b}{2}\left[1 - \frac{a}{1!(b+1)}v^b + \frac{a(a+1)}{2!(2b+1)}v^{2b} + \ldots + \right. \tag{14}$$

$$\left. +(-1)^k \frac{a(a+1)\ldots(a+k-1)}{k!(kb+1)}v^{kb} + \ldots\right].$$

Застосовуючи метод поділу відрізка наполовину шукаємо інтервал зміни знаку функції $F_1(\omega, v)$ при $v \in [0, 1]$. Середину інтервалу приймаємо за шукане значення sha($n$, $m$, ω). Для обчислення cha($n$, $m$, ω) застосовуємо співвідношення (13).

Обчислення проводилися з подвійною точністю. На рис. 1 показано інтерфейс розробленої програми, який ілюструє протабульовані значення та графіки функцій sha($n$, $m$, ω) і cha($n$, $m$, ω). Програма передбачає обчислення розв'язків системи (1) для різних значень параметрів нелінійності $m$ і $n$.

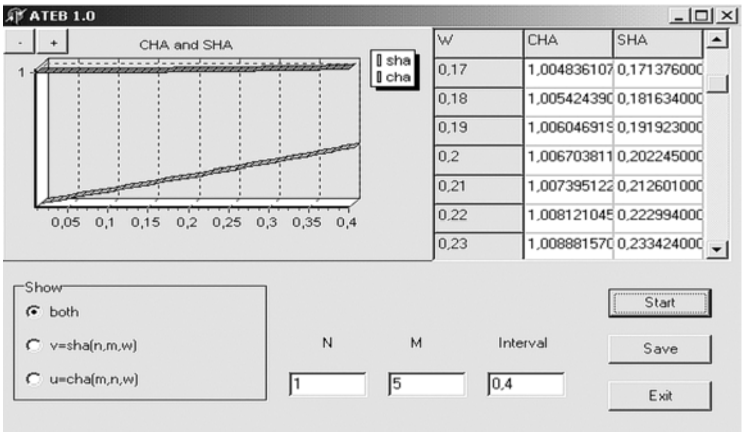


Рис. 1. Інтерфейс системи комп'ютерного моделювання
та графіки *Ateb*-функцій sha(1, 5, ω) та cha(5, 1, ω)

**Висновки.** Теорія періодичних *Ateb*-функцій разом із використанням сучасних обчислювальних машин дає потужний апарат для імітаційного моделювання та керування динамічними процесами істотно нелінійних коливних систем. Знайдені розв'язки описують динамічні процеси у нелінійних коливних системах і можуть бути застосовані, зокрема, для розрахунку бурових установок, нафтових промислів, вентиляційних каналів шахт, трубопроводів із метою діагностики та прогнозування їхньої поведінки.

Розроблено інструментарій для знаходження розв'язків системи диференціальних рівнянь зі степеневою нелінійністю у вигляді *Ateb*-функцій. Програма аналізує параметри нелінійності вказаної системи, які є аргументами *Ateb*-функцій.

Промодельовано поведінку *Ateb*-функцій із різними показниками нелінійності. З цією метою *Ateb*-функції розкладено у степеневі ряди.

Результати обчислень можуть бути використані в задачах управління з метою прогнозування та діагностики поведінки складних систем.

### Література

[1] *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 503 с.

[2] *Сокіл Б. І.* Про асимптотичні наближення розв'язку для одного нелінійного неавтономного рівняння // Укр. мат. журнал. — 1997. — Т. 49, № 11. — С. 1580-1583.

[3] *Возний А. М.* Застосування Ateb-функцій для побудови розв'язку одного класу істотно нелінійних диференціальних рівнянь. — Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1970. — № 9. — С. 971-974.

[4] *Сеник П. М.* Обращение неполной Beta-функции // Укр. мат. журн. — 1969. — Т. 21, № 3. — С. 325-333.

[5] *Сеник П. М.* Про Ateb-функції // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1968. — № 1. — С. 23-27.

[6] *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельников Г. М.* Численные методы. М.: Наука,1987. — 600 с.

## About solving one type of ordinary nonlinear differential equations

Ivanna Dronyuk, Maria Nazarkevych

*A tool for investigation of the set of ordinary differential equations solutions with power non-linearity is proposed using aperiodic Ateb-functions. The parameters of non-linearity of the set of differential equations are the arguments of Ateb-functions. The solutions of differential equations with different degrees of non-linearity are studied.*

## К решению одного класса обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений

Иванна Дронюк, Мария Назаркевич

*Построен инструментарий для исследования решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений со степенной нелинейностью. Для этого использованы апериодические Ateb-функции. Параметры нелинейности системы дифференциальных уравнений являются аргументами Ateb-функций. Исследовано решения дифференциальных уравнений с разными параметрами нелинейности.*

Отримано 16.04.07