

## Моделювання взаємодії тіл з урахуванням поверхневого натягу рідини у міжконтактному просвіті

Богдан Слободян<sup>1</sup>, Ростислав Мартиняк<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Інститут прикладних проблеми механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3-б, Львів, 79060, e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

<sup>2</sup> д. ф.-м. н., Інститут прикладних проблеми механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3-б, Львів, 79060, e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

*Запропоновано модель контакту пружного півпростору з жорсткою основою, що має плитку поверхневу виїмку, за наявності нестисливої рідини на крайніх ділянках міжповерхневого просвіту й ідеального газу в центральній його частині. Поверхневий натяг рідини, яка змочує поверхні тіл, зумовлює перепад тисків у рідині та газі, що враховано формулою Лапласа. Зв'язок між тиском газу та його об'ємом описано рівнянням стану Клапейрона-Менделєєва. Сформульована на цій основі плоска контактна задача для пружного півпростору є істотно нелінійною, оскільки тиски газу та рідини, а також довжина рідинних ділянок заздалегідь невідомі та залежать від прикладеного навантаження. З використанням методу функцій міжконтактних зазорів задачу зведено до системи чотирьох рівнянь — сингулярного інтегрального відносно функції висоти просвіту та трьох трансцендентних стосовно тиску газу, висоти та координати меніска. Запропоновано аналітико-числову процедуру розв'язування цих рівнянь. Проаналізовано залежності висоти меніска, довжини рідинної ділянки та тиску в складових заповнювача від величини прикладеного навантаження, кількості рідини у просвіті та її поверхневого натягу.*

**Ключові слова:** ідеальний газ, нестислива рідина, контактна взаємодія, виїмка, міжповерхневий просвіт, меніск, капілярні явища, поверхневий натяг.

**Вступ.** Функціонування різних технічних і природних систем часто супроводжується конденсацією вологи на поверхнях, яка під час їхнього контакту переміщається під дією поверхневого натягу у вузьчі місця міжповерхневих просвітів. Вплив поверхневого натягу рідини та капілярних явищ на контактну поведінку тіл зростає зі зменшенням розмірів тіла. Для мікро- та наноструктур капілярна адгезія є істотним чинником формування фактичної площі контакту, тертя та зношування, контактної передачі навантажень, кінематичних параметрів рухомих з'єднань. Тому сучасні дослідження в галузі трибології [1, 2], комп'ютерних технологій [3, 4], нано- та мікрровимірювальної техніки [5-7], геомеханіки [8], біомеханіки [9-11] все більше використовують моделювання взаємодії тіл за наявності в області їх контакту рідинних менісків. Методи дослідження контактних задач теорії пружності з урахуванням капілярних явищ почали розроблятися в останнє десятиліття для тіл із неузгодженими поверхнями, для яких властивий локальний контакт [12-16].

У разі взаємодії тіл з узгодженими поверхнями площа їх контакту співмірна з площею поверхонь, а міжконтактні зазори, які виникають в області малих геометричних збурень границь, мають локальний характер. У цьому разі заповнювач міжповерхневих просвітів стає активним чинником контактної системи, оскільки при навантаженні такі зазори можуть істотно змінювати свій об'єм і викликати зворотну реакцію з боку заповнювача у вигляді зміни тиску. Раніше вивчалася контактна поведінка тіл з узгодженими поверхнями, коли просвіт містив один вид заповнювача — рідину або газ [17-21].

У праці [22] започатковано моделювання контакту тіл із узгодженими границями з урахуванням капілярних явищ при заповненні рідиною крайніх ділянок міжповерхневого зазору, зумовленого локальною виїмкою на одній із поверхонь. При цьому вважали, що на середній частині зазору на межі тіл діє сталий тиск. У такий спосіб враховували дію газу, який може вільно виходити з зазору та при навантаженні тіл не змінює свого тиску.

Нижче цю модель узагальнено на випадок наявності у проміжку між крайніми ділянками зазору з рідиною фіксованої кількості ідеального газу, який не може виходити з зазору. Враховано зміну тиску газу під час навантаження. Зв'язок між параметрами стану газу описано рівнянням Клапейрона-Менделєєва.

### 1. Умови взаємодії пружного тіла з газорідинним заповнювачем просвіту

Дослідимо взаємодію пружного півпростору з жорсткою основою, що вздовж нескінченної смуги шириною  $2c$  має плитку виїмку, поперечний переріз якої описується функцією (рис. 1а). Плиткість виїмки означає, що  $r(x)/c \ll 1$ ,  $x \in [-c, c]$ .

Зовні виїмки поверхня жорсткого тіла плоска. Під дією прикладеного на нескінченності рівномірно розподіленого навантаження  $P^\infty$  півпростір вступає в контакт з основою, перебуваючи в умовах плоскої деформації. Приймаємо основу нерухомою, а взаємодію тіл — безфрикційною. Тому на межі пружного півпростору на ділянках контакту дотичні напруження і нормальні переміщення дорівнюють нулю.

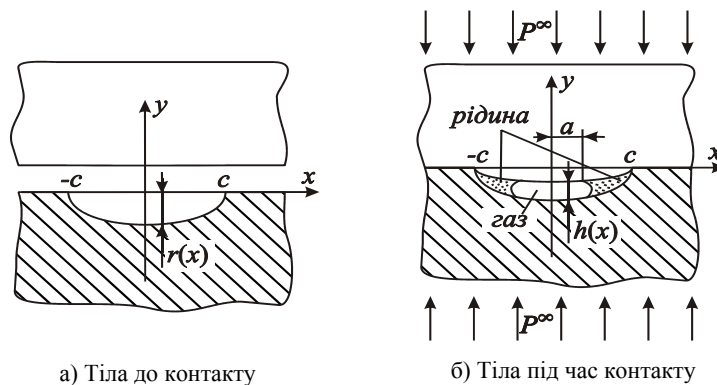


Рис. 1

Внаслідок нерівності основи прямий контакт тіл відсутній вздовж виїмки, де між ними утворюється міжконтактний просвіт (зазор) (рис. 1б). Вважаємо, що на краях зазору вздовж смуг ширини  $l$  конденсується чи адсорбується нестислива рідина (рис. 1б), яка повністю змочує поверхні тіл (тобто крайовий кут змочування  $\theta = 0^\circ$  [23]). На середній частині зазору вздовж смуги шириною  $2a$  міститься ідеальний газ. Рідина та газ не можуть виходити з зазору та їхня кількість під час стиску тіл залишається незмінною, тобто об'єм нестисливої рідини  $V_2$  на кожному з кінців зазору та маса газу  $m_1$ , що припадають на одиницю довжини зазору у поздовжньому його напрямі, є величинами сталими:  $V_2 = const$ ,  $m_1 = const$ . Розглядаємо квазістатичне навантаження, за якого у рідині та газі діє лише тиск і не виникають зсувні зусилля. Тому межа пружного тіла вздовж зазору вільна від дотичних напружень.

У процесі навантаження змінюються висота просвіту  $h(x)$ , його об'єм і довжина рідинних ділянок. Зі зміною зазору змінюються також об'єм і тиск газу, зв'язок між якими описуємо рівнянням стану ідеального газу у формі Клапейрона-Менделєєва

$$P_1 V_1 = \frac{m_1}{\mu_1} RT,$$

де  $V_1$  — об'єм газу, що припадає на одиницю довжини зазору в його поздовжньому напрямі;  $\mu_1$  — молярна маса газу;  $T$  — температура газу;  $R$  — універсальна газова стала.

Меніск — бічна поверхня рідини, що межує з газом — у перетині має форму дуги кола деякого радіуса  $R$ . Внаслідок поверхневого натягу, який характеризується коефіцієнтом  $\sigma$ , тиск у рідині  $P_2$  є менший від тиску газу  $P_1$ , і перепад тисків  $\Delta P$  у цих двох субстанціях визначається формулою Лапласа [23]

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{\sigma}{R}.$$

Враховуючи повне змочування рідиною тіл, малу висоту зазору та його пологість в околі межі між рідиною та газом, вважаємо, що меніск є півциліндром, радіус якого дорівнює половині висоти зазору в точках  $x = \pm a$  виходу меніска на поверхню пружного тіла:  $R = h(a)/2$ . Якщо висоту меніска позначити  $h_0$  ( $h_0 = h(a)$ ), то формула Лапласа для нашого випадку набуде вигляду

$$P_1 - P_2 = \frac{2\sigma}{h_0}.$$

Визначивши об'єми газу та рідини через функцію висоти зазору  $h(x)$ , умову збереження кількості рідини у просвіті та рівняння Клапейрона-Менделєєва запишемо так

$$\int_a^c h(x) dx = V_2, \quad P_1 \int_{-a}^a h(x) dx = \frac{m_1}{\mu_1} RT.$$

Останні три рівняння пов'язують три заздалегідь невідомі величини (тиски газу  $P_1$  і рідини  $P_2$ , довжину рідинної ділянки  $l$ ) через висоту зазору  $h(x)$  із трьома заданими параметрами (масою газу  $m_1$ , об'ємом рідини  $V_2$  та поверхневим натягом  $\sigma$ ).

## 2. Формулювання контактної задачі

Зважаючи на те, що у пружному півпросторі реалізується стан плоскої деформації, розглядаємо плоску контактну задачу для верхньої півплощини  $D_2$ , яка утворена перетином півпростору площиною, перпендикулярною до твірної виїмки. Компоненти тензора напружень у цьому разі задовольняють у півплощині  $D_2$  ( $-\infty < x < \infty$ ,  $0 < y < \infty$ ) рівняння рівноваги та сумісності деформацій

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad \Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (1)$$

З урахуванням сформульованих вище положень про умови взаємодії пружного тіла з рідиною та газом, запишемо такі контактні-крайові умови на межі  $y = 0$  півплощини

- на ділянці зазору

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = 0, \quad x \in (-c, c), \quad \sigma_y = P_1, \quad x \in (-a, a), \\ \sigma_y = P_1 - \frac{2\sigma}{h_0}, \quad x \in (-c, -a) \cup (a, c); \end{aligned} \quad (2)$$

- на ділянках контакту з жорсткою основою

$$\tau_{xy} = 0, \quad u_y = 0, \quad x \in (-\infty, -c) \cup (c, \infty), \quad (3)$$

де  $u_x, u_y$  — компоненти вектора переміщень.

Умови на нескінченності ( $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$ ) матимуть вигляд

$$\sigma_y = -P^\infty, \quad \sigma_x = 0, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (4)$$

Особливістю сформульованої контактної задачі є її нелінійність — тиск газу  $P_1$ , координата  $a$  та висота  $h_0$  меніска, які входять у крайові умови (2) на ділянці просвіту, заздалегідь невідомі та змінюються внаслідок навантаження. Для визначення цих параметрів використаємо три рівняння

$$h_0 = h(a), \quad P_1 \int_{-a}^a h(x) dx = \frac{m_1}{\mu_1} RT, \quad \int_a^c h(x) dx = V_2, \quad (5)$$

що замикають контактні-крайові умови.

### 3. Методика розв'язування задачі

В умови (2), (5) входить висота просвіту  $h(x)$ . Тому ці умови можуть бути ефективно використані для розв'язування контактної задачі методом функцій міжконтактних зазорів [19, 24]. Згідно з цим методом розв'язок сформульованої контактної крайової задачі (1)-(5) подамо через висоту початкового зазору між тілами  $[-r(x)]$  і висоту актуального просвіту  $h(x)$ , що виникає при навантаженні системи і дії міжповерхневого середовища

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} \Phi(z), \quad \sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} - P^\infty, \quad (6)$$

$$2G(u'_x + iu'_y) = \kappa \Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} + \frac{3 - \kappa}{4} P^\infty, \quad z \in D_2,$$

де комплексний потенціал  $\Phi(z) = (-1)^{j+1} \frac{1}{\pi K} \left\{ \int_{-c}^c \frac{h'(t)}{t-z} dt - \int_{-c}^c \frac{r'(t)}{t-z} dt \right\}$ ,  $z \in D_j$ ,  $j = 1, 2$ ,

а для визначення похідної висоти просвіту  $h'(x)$  отримаємо сингулярне інтегральне рівняння (СІР)

$$\int_{-c}^c \frac{h'(t)}{t-x} dt = -\frac{\pi K}{4} (P^\infty - P(x)) + \int_{-c}^c \frac{r'(t)}{t-x} dt, \quad x \in (-c, c). \quad (7)$$

Тут  $P(x) = \begin{cases} P_1, & |x| < a; \\ P_1 - \frac{2\sigma}{h(a)}, & a < |x| < c; \end{cases} \quad K = \frac{1 + \kappa}{2G}; \quad \kappa = 3 - 4\nu; \quad G, \nu$  — модуль зсуву та

коефіцієнт Пуассона;  $z = x + iy$ ;  $D_1, D_2$  — нижня та верхня півплощини.

Функція  $h(x)$  повинна задовольняти умови рівності нулю висоти просвіту у крайніх його точках  $h(c) = h(-c) = 0$ , які запишемо у вигляді двох еквівалентних умов

$$\int_{-c}^c h'(t) dt = 0, \quad h(-c) = 0. \quad (8)$$

Подальше дослідження функції  $h(x)$  пов'язане з конкретизацією функції  $r(x)$ , яка задає форму виїмки та входить у праву частину СІР (7). Розглянемо виїмку з обрисом  $r(x) = A\sqrt{1 - x^2/c^2}$ , де  $A = r(0)$  — максимальна висота виїмки

( $A \ll c$ ). Тоді  $\int_{-c}^c \frac{r'(t)}{t-x} dt = \frac{A}{c} \pi$  та рівняння (7) набуває вигляду

$$\int_{-c}^c \frac{h'(t)}{t-x} dt = -\frac{\pi K}{4} [P^\infty - P(x)] + \frac{A}{c} \pi. \quad (9)$$

Розв'язок рівняння (9) з урахуванням першої умови (8) визначає похідну від висоти просвіту

$$h'(x) = -\frac{K(P^\infty - P_1)x}{2\sqrt{c^2 - x^2}} - \frac{\sigma K}{\pi h_0} [\Gamma(c, x, -a) - \Gamma(c, x, a)] + \frac{\sigma K x}{\pi h_0 \sqrt{c^2 - x^2}} \left( 2 \arcsin\left(\frac{a}{c}\right) - \pi \right) - \frac{A}{c} \frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}}, \quad (10)$$

$$\text{де } \Gamma(a, x, t) = \ln \frac{a^2 - tx + \sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - t^2)}}{a^2 - tx - \sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - t^2)}}$$

Інтегруючи функцію (10) та враховуючи другу умову (8), визначимо висоту зазору  $h(x)$

$$h(x) = \left\{ \frac{K}{2} (P^\infty - P_1) - \frac{K\sigma}{\pi h_0} \left[ 2 \arcsin\left(\frac{a}{c}\right) - \pi \right] - \frac{A}{c} \right\} \sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2}} - \frac{K\sigma}{2\pi h_0} [(x+a)\Gamma(c, x, -a) - (x-a)\Gamma(c, x, a)]. \quad (11)$$

Підставляючи співвідношення (11) у формули (5), для визначення координати меніска  $a$ , його висоти  $h_0$  та тиску газу  $P_1$  отримаємо три трансцендентні рівняння

$$\begin{aligned} & h_0^2 + \frac{K}{2} (P^\infty - P_1) \sqrt{c^2 - a^2} h_0 - \\ & - \frac{K\sigma}{\pi} \left[ 2 \arcsin\left(\frac{a}{c}\right) - \pi \right] \sqrt{c^2 - a^2} - A \sqrt{c^2 - a^2} - \frac{2K\sigma a}{\pi} \ln\left(\frac{c}{a}\right) = 0, \\ & P_1 \left\{ \frac{A}{c} - \frac{K}{2} (P^\infty - P_1) + \frac{K\sigma}{\pi h_0} \left[ 2 \arcsin\left(\frac{a}{c}\right) - \pi \right] \right\} \times \\ & \times \left[ a \sqrt{c^2 - a^2} - c^2 \arcsin\left(\frac{a}{c}\right) \right] = \frac{m_1}{\mu_1} RT, \\ & \left\{ \frac{A}{c} - \frac{K}{2} (P^\infty - P_1) + \frac{K\sigma}{\pi h_0} \left[ 2 \arcsin\left(\frac{a}{c}\right) - \pi \right] \right\} \times \\ & \times \left[ \frac{c^2 \pi}{4} - \frac{a}{2} \sqrt{c^2 - a^2} - \frac{c^2}{2} \arcsin\left(\frac{a}{c}\right) \right] + \frac{2K\sigma a^2}{\pi h_0} \ln\left(\frac{c}{a}\right) = V_2. \end{aligned} \quad (12)$$

#### 4. Числові результати та їх аналіз

Для розв'язування системи рівнянь (12) розроблено числовий ітераційний алгоритм. Розрахунки проведено для безрозмірних величин: висоти міжконтактного зазору  $\tilde{h} = h/c$ ; довжини ділянки дії газу  $\tilde{a} = a/c$ ; поверхневого натягу рідини  $\tilde{\sigma} = K\sigma/c$ ; тиску на нескінченності  $\tilde{P}^\infty = KP^\infty$ ; тиску газу в міжконтактному зазорі  $\tilde{P}_1 = KP_1$ ; максимальної висоти виїмки  $\tilde{A} = A/c$ ; маси газу  $\tilde{m}_1 = \frac{m_1 RTK}{c^2 \mu_1}$ ; довжини ділянки з рідиною  $\tilde{l} = l/c$ ; висоти меніска  $\tilde{h}_0 = h_0/c$ ; об'єму рідини  $\tilde{V}_2 = V_2/V$ , де  $V$  — об'єм виїмки. Числовий аналіз здійснено для виїмки, максимальна висота якої  $\tilde{A} = 0,001$ .

Криві на рис. 2 ілюструють залежності довжини рідинних ділянок  $\tilde{l}$ , тиску газу  $\tilde{P}_1$  та рідини  $\tilde{P}_2$  і висоти меніска  $\tilde{h}_0$  від прикладеного до тіл навантаження  $\tilde{P}^\infty$  для різних значень об'єму рідини ( $\tilde{V}_2 = 1/10$ ;  $\tilde{V}_2 = 1/15$ ;  $\tilde{V}_2 = 1/20$ ) і фіксованих інших вхідних параметрів ( $\tilde{m}_1 = 4 \cdot 10^{-7}$ ;  $\tilde{\sigma} = 3 \cdot 10^{-8}$ ). Зі збільшенням навантаження довжина рідинної ділянки і тиски газу та рідини зростають, а висота меніска зменшується. Що більший об'єм рідини, то більші рідинна ділянка і висота меніска. Тиски у рідині та газі синхронно зростають зі збільшенням об'єму рідини. Найчутливішими до зміни кількості рідини в зазорі виявилися довжини ділянок із газом і рідиною.

Вплив поверхневого натягу та зовнішнього навантаження на геометричні параметри заповненої рідиною частини зазору та тиск заповнювача проілюстровано на рис. 3. Обчислення проведені для трьох різних значень натягу  $\tilde{\sigma} = 1 \cdot 10^{-8}$ ;  $3 \cdot 10^{-8}$ ;  $5 \cdot 10^{-8}$  та фіксованих маси газу  $\tilde{m}_1 = 4 \cdot 10^{-7}$  й об'єму рідини  $\tilde{V}_2 = 1/10$ . Збільшення натягу зумовлює зменшення довжини рідинної ділянки та висоти меніска. При цьому тиски складових поведуть себе асинхронно — тиск газу збільшується, а рідини — зменшується. Наслідком збільшення зовнішнього навантаження є зростання рідинної ділянки і тиску заповнювача та зменшення висоти меніска для всіх розглянутих значень поверхневого натягу рідини. Найчутливішим до зміни поверхневого натягу є тиск газу.

**Висновки.** Розглянуто контакт пружного півпростору та жорсткої основи з плиткою еліптичною в профілі виїмкою. Зумовлений виїмкою міжповерхневий провіт на крайніх ділянках містить нестисливу рідину, посередині яких є ідеальний стисливий газ. Особливістю такої системи є те, що тиски газу, рідини та точка їх розмежування є задалегідь невідомі та змінюються при навантаженні. З урахуванням малої висоти зазору та його пологості формулу Лапласа, яка визначає зумовлений поверхневим натягом перепад тисків у рідині та газі, рівняння стану ідеального газу Клапейрона-Менделєєва й умову збереження кількості рідини записано через функцію висоти зазору. Це дало змогу задачу про визначення механічної

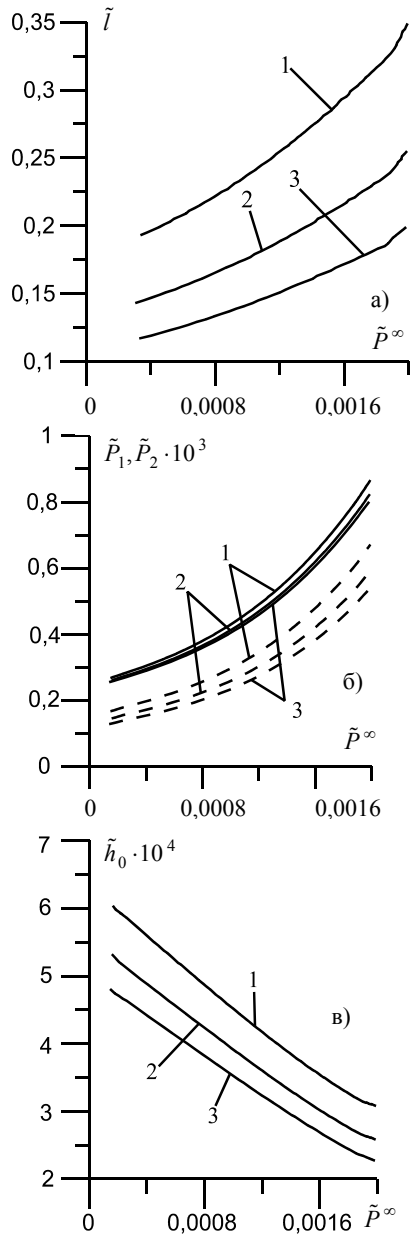


Рис. 2. Залежності довжини рідинної ділянки  $\tilde{l}$  (а), тисків газу  $\tilde{P}_1$  (суцільні лінії) та рідини  $\tilde{P}_2$  (штриховані лінії) (б), висоти меніска  $\tilde{h}_0$  (в) від величини прикладеного навантаження  $\tilde{P}^\infty$  й об'єму рідини в зазорі для  $\tilde{V}_2 = 1/10; 1/15; 1/20$  (криві 1-3)

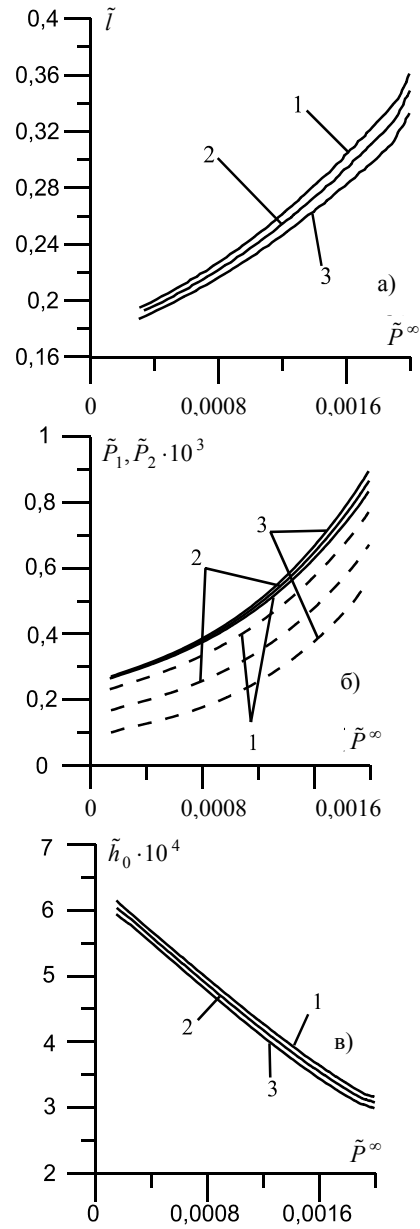


Рис. 3. Залежності довжини рідинної ділянки  $\tilde{l}$  (а), тисків газу  $\tilde{P}_1$  (суцільні лінії) та рідини  $\tilde{P}_2$  (штриховані лінії) (б), висоти меніска  $\tilde{h}_0$  (в) від величини прикладеного навантаження  $\tilde{P}^\infty$  та поверхневого натягу  $\tilde{\sigma} = 1 \cdot 10^{-8}; 3 \cdot 10^{-8}; 5 \cdot 10^{-8}$  (криві 1-3)



поведінки чотирискладової системи сформулювати у вигляді нелінійної контактної задачі для півпростору та, з використанням методу функцій міжконтактних зазорів, звести її до розв'язування системи чотирьох рівнянь, а саме: сингулярного інтегрального відносно функції висоти просвіту та трьох трансцендентних відносно тиску рідини, висоти та координати меніска. На основі розробленої аналітико-числової схеми розв'язування цих рівнянь проаналізовано вплив кількості рідини в зазорі та її поверхневого натягу на контактну поведінку системи. Зокрема, показано, що зі збільшенням навантаження довжина рідинних ділянок, тиски у газі та рідині зростають, а висота меніска — зменшується. Збільшення поверхневого натягу рідини приводить до зменшення довжини частин зазору, заповнених рідиною, і висоти меніска. Встановлено асинхронну залежність тисків рідини та газу від поверхневого натягу, а саме, зростання тиску газу та спадання тиску рідини зі збільшенням натягу. Збільшення ж кількості рідини за фіксованого поверхневого натягу зумовлює синхронне зростання тисків рідини і газу та збільшення довжини рідинних ділянок і висоти меніска.

### Література

- [1] Чижик С. А. Капиллярный механизм адгезии и трения шероховатых поверхностей, разделенных тонким слоем жидкости // Трение и износ. — 1994. — Т. 15, № 1. — С. 11–26.
- [2] Peng Wei, Bhushan B. Sliding Contact Analysis of Layered Elastic/Plastic Solids With Rough Surfaces // Journal of Tribology. Trans. ASME. — 2002 — Vol. 124. — P. 46-61.
- [3] Kato Takahisa, Watanabe Souta, Matsuoka Hiroshige. Dynamic characteristics of an in-contact headslider considering meniscus force: Part 2. Application to the disk with random undulation and design conditions // Journal of Tribology. Trans. ASME. — 2001. — Vol. 123. — P. 168-174.
- [4] Kobatake S., Kawakubo Y., Suzuki S. Laplace pressure measurement on laser textured thin-film disk // Tribology International. — 2003 — Vol. 36. — P. 329–333.
- [5] Ando Y. Effect of capillary formation on friction and pull-off forces measured on sub-micron-size asperities // Tribology Letters. — 2005. — Vol. 19, № 1. — P. 29-36.
- [6] Zitzler L., Herminghaus S., Mugele F. Capillary forces in tapping mode atomic force microscopy // Physical review. — 2002. — B 66. — P. 155436 (8 pages).
- [7] Li Shi, Arunava Majumdar. Thermal Transport Mechanisms at Nanoscale Point Contacts // Journal of Heat Transfer. — 2002. — Vol. 124. — P. 329-337.
- [8] Soulie F., Cherblanc F., El Youssoufi M., Saix C. Influence of liquid bridges on the mechanical behaviour of polydisperse granular materials // International journal for numerical and analytical methods in geomechanics. — 2006. — Vol. 30. — P. 123-228.
- [9] Dai Z., Min Yu, Gorb S. Frictional characteristics of the beetle head-joint material // Wear. — 2006. — Vol. 260. — P. 168-174.
- [10] Rennie A., Dickrell P., Sawyer W. Friction coefficient of soft contact lenses: measurements and modeling // Tribology Letters. — 2005. — Vol. 18, № 4. — P. 499-504.
- [11] Pailler-Mattei C., Zahouani H. Analysis of adhesive behaviour of human skin in vivo by an indentation test // Tribology International. — 2006. — Vol. 39, № 1. — P. 12-21.
- [12] Горячева И. Г., Маховская Ю. Ю. Адгезионное взаимодействие упругих тел // Прикл. математика и механика. — 2001. — Т. 65, № 2. — С. 279–289.

- [13] Горячева И. Г., Маховская Ю. Ю. Контактное взаимодействие упругих тел при наличии капиллярной адгезии // Прикл. математика и механика. — 1999. — Т. 63, № 1. — С. 128–137.
- [14] Lambert P., Delchambre A. Parameters ruling capillary force at the submillimetric scale // Langmuir. — 2005. — Vol. 21, № 21. — P. 9537-9543.
- [15] Zheng Jie, Streutor J. L. A liquid bridge between two elastic half-spaces: A theoretical study of interface instability // Tribology Letters. — 2004. — Vol. 16, Nos. 1-2. — P. 1-9.
- [16] Rabinovich Y., Esayanur M., Moudgil B. Capillary forces between two spheres with a fixed volume liquid bridge: theory and experiment // Langmuir. — 2005. — Vol. 21. — P. 10992-10997.
- [17] Мартиняк Р. М. Контактна взаємодія двох півпросторів при наявності поверхневої в'язкості, частково заповненої нестиислою рідиною // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 1990. — Т. 26, № 2. — С. 91–94.
- [18] Мартиняк Р. М. Контакт півпростору з нерівною основою при заповненому ідеальним газом міжконтактному зазорі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1998. — Т. 41, № 4. — С. 144–149.
- [19] Мартиняк Р. М. Механотермодифузійна взаємодія тіл з врахуванням заповнювача міжконтактних зазорів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2000. — Т. 36, № 2. — С. 124–126.
- [20] Кит Г. С., Мартыняк Р. М., Мачишин И. М. Влияние газожидкостного заполнителя межконтактного пространства на напряженное состояние сопряженных тел // Прикл. механика. — 2003. — Т. 39, № 3. — С. 52–60.
- [21] Монастирський Б. Є. Вплив заповнювача міжповерхневого просвіту на взаємодію тіл в умовах недосконалого контакту // Прикл. проблеми механіки і математики. — 2003. — Вип. 1. — С. 78–82.
- [22] Мартиняк Р. М., Слободян Б. С. Взаємодія двох тіл за наявності капілярів у міжконтактному зазорі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2006. — Т. 49, № 1. — С. 164-173.
- [23] Арцыбашев С. А. Курс физики. Часть 1. Механика и теплота. — М.: Гос. уч.-пед. из-во мин. просвещения РСФСР, 1951. — 672 с.
- [24] Мартиняк Р. М. Механотермодифузійна взаємодія тіл з контактнo-поверхневими неоднорідностями і дефектами: Дис. д. ф.-м. н.: 01.02.04 — Львів, 2000. — 356 с.

## **Modelling of bodies interaction considering liquid surface tension in an contact gap**

Bohdan Slobodyan, Rostyslav Martynyak

*The interaction between an elastic half-space and a rigid base with a recess is presented. The contact gap has an incompressible liquid which forms meniscus on the edge of the gap and an ideal gas in its middle part. The liquid wets surfaces of bodies completely. Surface tension causes a pressure jump in a liquid and a gas. This fact is taken into consideration by Laplace formula. The relation between gas pressure and it's volume is described by Clapeyron-Mendeleyev equation. Formulated on this basis plane contact problem for elastic half-space is considerably nonlinear since gas pressure and pressure in liquid and length of liquid part of a gap are unknown a priori and depend on loading. With help of the gap-height functions method, the problem is reduced to a system of four equations — singular integral equation in the gap height function and three transcendent equations in gas pressure, height and coordinate of meniscus. The analytical-*

*numerical procedure of solving these equations is proposed. The dependence of meniscus height, length of liquid part of a gap and pressure in gas and liquid from loading is analyzed.*

## **Моделирование взаимодействия тел с учетом поверхностного натяжения жидкости в межконтактном зазоре**

Богдан Слободян, Ростислав Мартыняк

*Предложена модель контакта упругого полупространства и жесткого основания, с неглубокой поверхностной выемкой, при наличии на крайних участках межповерхностного зазора несжимаемой жидкости и идеального газа в центральной его части. Поверхностное натяжение жидкости, полностью смачивающей поверхности тел, обуславливает перепад давлений в жидкости и газе, который учтен формулой Лапласа. Связь между давлением газа и его объемом описана уравнением состояния Клапейрона-Менделеева. Сформулированная на этом основании плоская контактная задача для упругого полупространства является существенно нелинейной, поскольку давления газа и жидкости, длина участка с жидкостью, фигурирующие в условиях контакта, заранее неизвестны и зависят от приложенной нагрузки. С использованием метода функций межконтактных зазоров задача сведена к системе четырех уравнений — сингулярного интегрального относительно функции высоты зазора и трех трансцендентных относительно давления газа, высоты мениска и координаты мениска. Предложена аналитико-численная процедура решения этих уравнений. Проанализированы зависимости высоты мениска, длины участка с жидкостью и давлений в газе и жидкости от приложенной нагрузки, количества жидкости в зазоре и ее поверхностного натяжения.*

Отримано 12.11.07