УДК 539.3

# Устойчивость магнитострикционных прямоугольных пластин

Геворг Багдасарян

Д. ф.-м. н., профессор, академик НАН РА, Ереванский государственный университет, ул. А. Манукяна, 1, Ереван, email: gevorgb@ysu.am

*На основании линеаризованных уравнений магнитоупругости исследовано поведение малых возмущений в магнитоактивной деформируемой среде. Для тонких диэлектрических магнитострикционных прямоугольных пластин в постоянном магнитном поле с использованием гипотезы Кирхгоффа и асимптотического метода интегрирования трехмерная задача сведена к двумерной. На этом основании сформулирована и решена соответствующая задача устойчивости и показано, что существует область значений магнитострикционных характеристик материала, для которой невозмущенное состояние пластинки устойчиво при любом значении индукции внешнего магнитного поля; магнитострикционный эффект может существенно уменьшить критическое значение магнитной индукции, при котором пластинка теряет устойчивость.*

**Ключевые слова:** магнитное поле, магнитострикция, пластинка, устойчивость.

**Введение.** В настоящее время известно значительное количество работ, в которых изучены различные проблемы магнитоупругости [1-15]. В частности, вопросы колебания и устойчивости тонких упругих проводящих неферромагнитных [5, 11, 16, 17], магнитомягких диэлектрических [10, 12, 18, 19] и проводящих магнитомягких [12, 20] пластин и оболочек в электромагнитном поле изучены достаточно полно, и эффекты взаимодействия здесь оказались весьма существенными. Аналогичным же вопросам для тонких тел из ферромагнитного материала с магнитострикционными свойствами в литературе уделено сравнительно небольшое внимание [21, 22].

Предлагаемая работа посвящена вопросам колебания и устойчивости магнитострикционных пластин во внешнем магнитном поле. Исследование проведено на основе линеаризованных уравнений и граничных условий, описывающих поведение малых возмущений исследуемых полей в указанной магнитоактивной деформируемой среде [15]. Принимая гипотезу Кирхгоффа и применяя предложенный в работах [23, 24] асимптотический метод интегрирования, сформулированная в [15] трехмерная задача сведена к двумерной в случае тонких диэлектрических магнитострикционных пластин в поперечном магнитном поле. Получено однородное уравнение устойчивости и показано, что граничными условиями для такого уравнения являются обычные однородные условия закрепления краев прямоугольной пластинки. На этой основе решена соответствующая задача устойчивости и показано, что в зависимости от магнитострикционных характеристик материала невозмущенное состояние пластинки может оказаться устойчивым при любом значении индукции внешнего магнитного поля (отметим [10, 12, 19], что магнитомягкая ферромагнитная пластинка всегда теряет устойчивость под действием поперечного магнитного поля) и, наоборот, магнитострикционный эффект может заметно уменьшить критическое значение магнитной индукции при котором пластинка теряет устойчивость.

## 1. Постановка задачи устойчивости

Пусть упругая диэлектрическая среда с упорядоченной магнитной структурой находится во внешнем стационарном магнитном поле, которое в отсутствии ферромагнитного тела характеризуется вектором напряженности $\vec{H}_0$ и вектором магнитной индукции $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}_0$ ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Н/А$^2$ — магнитная постоянная). Окружающая тело среда в отношении электромагнитных свойств принимается в приближении вакуума.

В работе [15], используя основные положения нелинейной теории магнитоупругости ферромагнитных тел и теории малых возмущений, путем линеаризации получены следующие линейные уравнения и граничные условия, описывающие поведение малых возмущений в указанной магнитоактивной деформируемой среде:

для внутренней области

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(s_{ik} + s_{im}^{non}\frac{\partial u_k}{\partial x_m}\right) + \mu_0 M_i^{non}\frac{\partial h_k}{\partial x_i} + \mu_0 m_i \frac{\partial H_k^{non}}{\partial x_i} = \rho_0 \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2},$$
$$\operatorname{rot}\vec{h} = 0, \qquad \operatorname{div}\vec{b} = 0, \qquad \vec{b} = \mu_0\left(\vec{h} + \vec{m}\right),$$
$$s_{ij} = \bar{c}_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \mu_0 e_{ijk} m_k,$$
$$h_i = g_{ijk}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + A_{ik} m_k, \tag{1}$$

где $s_{ik}$ — возмущения компонент тензора магнитоупругих напряжений; $s_{ik}^{non}$ — компоненты тензора напряжений невозмущенного состояния; $u_k$ — компоненты возмущения вектора упругих перемещений; $h_k$, $m_k$ и $b_k$ — компоненты векторов $\vec{h}$, $\vec{m}$ и $\vec{b}$; представляющие возмущения соответственно напряженности $\vec{H}^{non}$, намагниченности $\vec{M}^{non}$ и магнитной индукции $\vec{B}^{non}$ невозмущенного магнитного поля; $x_i$ — декартовые координаты;

для внешней области

$$\operatorname{rot}\vec{h}^{(e)} = 0, \qquad \operatorname{div}\vec{h}^{(e)} = 0, \qquad \vec{b}^{(e)} = \mu_0 \vec{h}^{(e)}, \tag{2}$$

индекс «е» здесь и в дальнейшем означает принадлежность к внешней среде; условия на поверхности $S_0$ недеформируемого тела

$$\left[s_{ik}+s_{km}^{non}\frac{\partial u_i}{\partial x_m}\right]n_k^0=\left[t_{ki}^{(e)}-t_{ki}\right]n_k^0+\left[T_{km}^{non(e)}-T_{km}^{non}\right]\frac{\partial u_i}{\partial x_m}n_k^0,$$
$$\left[b_k-b_k^{(e)}\right]n_k^0=\left[B_m^{non}-B_m^{non(e)}\right]\frac{\partial u_i}{\partial x_m}n_i^0,$$
$$\varepsilon_{nmk}\left\{\left[h_n-h_n^{(e)}\right]n_m^0-\left[H_n^{non}-H_n^{non(e)}\right]\frac{\partial u_i}{\partial x_m}n_i^0\right\}, \tag{3}$$

где $T_{km}^{non}$ и $T_{km}^{non(e)}$ — тензоры напряжений Максвелла невозмущенного состояния соответственно для тела и окружающей среды, $n_k^0$ — компоненты вектора внешней нормали $\vec{n}_0$ к поверхности $S_0$, $\varepsilon_{ijk}$ — символ Леви-Чивита,

$$t_{ki}=b_kH_i^{non}+h_kB_i^{non}-\mu_0\delta_{ki}\vec{H}^{non}\vec{h},$$
$$t_{ki}^{(e)}=\mu_0\left[h_k^{(e)}H_i^{non(e)}+h_k^{(e)}H_i^{non(e)}-\delta_{ki}\vec{H}^{(e)non}\vec{h}^{(e)}\right]. \tag{4}$$

В уравнениях (1) использованы следующие обозначения

$$\bar{c}_{ijkl}=c_{ijkl}+\mu_0A_{pq}M_r^{non}M_j^{non}\left(\delta_{ik}\delta_{pl}\delta_{rq}+\delta_{kl}\delta_{iq}\delta_{ir}+\delta_{lp}\delta_{iq}\delta_{kr}\right)+$$
$$+\frac{\mu_0}{2}B_{pqrs}\left(\delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{kl}+\delta_{iq}\delta_{jk}\delta_{pl}+\delta_{ik}\delta_{jq}\delta_{pl}\right)M_r^{non}M_s^{non}+$$
$$+\mu_0B_{pqrs}\left(\delta_{pk}\delta_{ql}\delta_{is}M_j^{non}+\delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{is}M_k^{non}\right)M_r^{non},$$
$$e_{ijk}=B_{ijkl}M_l^{non}+A_{mi}\left(\delta_{kj}M_m^{non}+\delta_{mk}{}_j^{non}\right),$$
$$g_{ijk}=B_{jkpi}M_p^{non}+A_{rs}\left(\delta_{is}\delta_{jk}M_r^{non}+\delta_{rk}\delta_{is}M_j^{non}+\delta_{ij}\delta_{sk}M_r^{non}\right), \tag{5}$$

где $c_{ijkl}$, $A_{kl}^{-1}$ и $B_{ijkl}$ — соответственно тензоры упругих постоянных, магнитных восприимчивостей и магнитострикционных коэффициентов.

Для магнитоупругих сред, которые в размагниченном состоянии изотропны по отношению как магнитных, так и упругих свойств, справедливы равенства

$$c_{ijkl}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right),\qquad A_{kl}=\chi^{-1}\delta_{kl},$$
$$B_{ijkl}=e_2\delta_{ij}\delta_{kl}+\frac{1}{2}\left(e_1-e_2\right)\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right), \tag{6}$$

где $\lambda$ и $\mu$ — постоянные Ляме, $\chi$ — магнитная восприимчивость, $\mu_r=\chi+1$ — относительная магнитная проницаемость, $e_1$ и $e_2$ — магнитострикционные постоянные среды.

К уравнениям (2) необходимо присоединить условия затухания возмущений магнитных величин на бесконечности.

Отметим, что в коэффициенты линеаризованных соотношений (1)-(5) входят неизвестные компоненты $s_{ij}^{non}$ тензора напряжений невозмущенного состояния. Они являются решениями следующей статической задачи теории упругости: уравнения равновесия

$$\frac{\partial s_{ik}^{non}}{\partial x_k} + \mu_0 M_n^{non} \frac{\partial H_k^{non}}{\partial x_n} = 0,$$

$$s_{ij}^{non} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{non} + \mu_0 A_{ik} M_j^{non} M_k^{non} + \frac{1}{2}\mu_0 B_{ijkl} M_k^{non} M_l^{non} \tag{7}$$

условия на поверхности $S_0$ недеформируемого тела

$$s_{ik}^{нон} N_k^0 = \left[T_{ki}^{но(не)} - T_{ki}^{нон}\right] n_k^0, \tag{8}$$

$$T_{ki}^{нон} = H_i^{нон} B_k^{нон} - \frac{1}{2}\mu_0 \delta_{ik}\left[\vec{H}^{нон}\right]^2,$$

$$T_{ki}^{но(не)} = \mu_0 H_i^{но(не)} H_k^{но(не)} - \frac{1}{2}\mu_0 \delta_{ik}\left[\vec{H}^{но(не)}\right]^2. \tag{9}$$

Согласно принятому предположению, входящие в (7)-(9) характеристики невозмущенного магнитного поля определяются из следующей задачи магнитостатики для недеформируемого тела:
уравнения магнитостатики для внутренней области

$$\operatorname{rot}\vec{H}^{нон} = 0, \qquad \operatorname{div}\vec{B}^{нон} = 0,$$

$$\vec{B}^{нон} = \mu_0\left(\vec{H}^{нон} + \vec{M}_{нон}\right), \qquad H_k^{нон} = A_{kl} M_l^{нон}; \tag{10}$$

уравнения для внешней области

$$\operatorname{rot}\vec{H}_{нон}^{(e)} = 0, \qquad \operatorname{div}\vec{H}_{нон}^{(e)} = 0,$$

$$\vec{M}_{нон}^{(e)} = 0, \qquad \vec{B}^{нон} = \mu_0 \vec{H}_{нон}^{(e)}; \tag{11}$$

условия сопряжения на поверхности $S_0$

$$\left(\vec{B}_{нон} - \vec{B}_{нон}^{(e)}\right)\cdot \vec{n}_0 = 0, \qquad \left(\vec{H}_{нон} - \vec{H}_{нон}^{(e)}\right)\times \vec{n}_0 = 0, \tag{12}$$

условия на бесконечности

$$\vec{H}_{нон}^{(e)} \to \vec{H}^{(e)} \quad \text{при} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \infty. \tag{13}$$

## 2. Двумерные уравнения магнитоупругой устойчивости тонкой пластинки

Пусть упругая изотропная прямоугольная магнитострикционная ферромагнитная пластинка постоянной толщины $2h$ в прямоугольной системе координат $(x_1, x_2, x_3)$

расположена так, что ее срединная плоскость совпадает с координатной плоскостью $x_1, x_2$. Для простоты и наглядности ограничиваемся рассмотрением случая, когда пластинка находится в поперечном магнитном поле $\vec{B}(0,0,B_0)$, а ее торцы неподвижны в своей плоскости. Учитывая, что для основных магнитострикционных материалов $\chi \sim 30$, $e_i \sim 40$ и $B_S \sim 0{,}3$ Тл ($B_S$ — индукция насыщения), принимаем, что при $B_0 < B_S$ имеет место следующее ограничение

$$\left(\chi e_i^2 B_0^2 / \mu_0 \mu_r\right) << 1. \tag{14}$$

Для применения процедуры получения двумерных уравнений магнитоупругой устойчивости тонких пластин, необходимо знать характеристики (напряженность, магнитная индукция и намагниченность) магнитных полей невозмущенного и возмущенного состояний. Их определяем, решая трехмерные задачи математической физики, сформулированные в предыдущем параграфе. Решение указанных краевых задач, в случае пластин конечных размеров связано с серьезными математическими трудностями. Численные решения этих задач для пластинки-полосы приведены в работе [25]. Анализ полученных решений показывает, что характеристики магнитных полей (невозмущенного и возмущенного) для пластин конечных размеров вне некоторого достаточно узкого пограничного слоя практически совпадают с соответствующими характеристиками для бесконечной пластинки. На этом основании при определении характеристик невозмущенного магнитного поля пластинку будем считать бесконечной. Тогда приближенное решение задачи (10)-(13) представляется в виде

$$\begin{gathered} B_i^{non(e)} = 0,\ B_i^{non} = 0,\ H_i^{non(e)} = 0,\ H_i^{non} = 0,\ M_i^{non} = 0,\ (i = 1{,}2) \\ B_3^{non(e)} = B_3^{non} = B_0,\ H_3^{non(e)} = \frac{B_0}{\mu_0},\ H_3^{non} = \frac{B_0}{\mu_0 \mu_r},\ M_3^{non} = \chi H_3^{non}. \end{gathered} \tag{15}$$

Подставляя (15) в (7)-(9) и используя условия неподвижности краев пластинки в своей плоскости, для ненулевых компонент тензора напряжений невозмущенного состояния получим следующие выражения

$$s_{11}^{non} = s_{22}^{non} = \frac{\chi^2 B_0^2}{2\mu_0 \mu_r^2}\left[e_2 - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(e_1 - 1)\right],\quad s_{33}^{non} = \frac{\chi^2 B_0^2}{2\mu_0 \mu_r^2}. \tag{16}$$

Для приведения трехмерных уравнений магнитоупругой устойчивости (1) к двумерным принимается гипотеза недеформируемых нормалей, согласно которой имеем

$$u_1 = u - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1},\ u_2 = v - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2},\ u_3 = w(x_1, x_2, t), \tag{17}$$

где $u(x_1, x_2, t)$, $v(x_1, x_2, t)$ и $w(x_1, x_2, t)$ — возмущения перемещений точек срединной плоскости пластинки.

Подставляя соотношения (15)-(17) в систему (1) и усредняя полученные при этом уравнения по толщине пластинки, с учетом поверхностных условий (3), приходим к двумерным уравнениям магнитоупругой устойчивости рассматриваемой пластинки относительно *u, v, w*. В частности, уравнение поперечных колебаний имеет вид

$$D\Delta^2 w + 2\rho_0 h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2hP_0\Delta w + \chi B_0\alpha\int_{-h}^{h} x_3\Delta h_3 dx_3 -$$

$$-\frac{B_0\chi}{\mu_r}\int_{-h}^{h} x_3\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial h_1}{\partial x_1}+\frac{\partial h_2}{\partial x_2}\right)dx_3 - \chi B_0\left(h_3^+ - h_3^-\right) = 0. \qquad (18)$$

Здесь

$$D = \frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)},\quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2},\quad \alpha = \frac{\chi}{\mu_r}\left(\frac{\nu}{1-\nu}e_1 - e_2\right),$$

$$P_0 = \frac{\chi^2 B_0^2}{2\mu_0\mu_r^2}\left[(1+2\chi)\left(\frac{\nu}{1-\nu}e_1 - e_2\right) - \frac{2\nu}{1-\nu}\right] + \frac{\chi B_0^2}{\mu_0\mu_r},\quad h_3^{\pm} = h_3(x_1, x_2, \pm h, t).$$

При получении уравнений (18) учтено принятое ограничение (14).

### 3. Приведение трехмерной задачи магнитоупругой устойчивости тонкой пластинки к двумерной

Для замыкания системы (18) следует определить компоненты $h_i$ возмущенного магнитного поля в пластинке. Введем потенциальные функции $\varphi$ и $\varphi^{(e)}$

$$\vec{h} = \operatorname{grad}\varphi,\quad \vec{h}^{(e)} = \operatorname{grad}\varphi^{(e)}.$$

Тогда определение векторов $\vec{h}$ и $\vec{h}^{(e)}$, согласно (1)-(3), сводится к решению следующей трехмерной задачи

$$\Delta_3\varphi = \frac{\chi B_0}{\mu_0\mu_r}\alpha\Delta w, \qquad \text{(во внутренней области)},$$

$$\Delta_3\varphi^{(e)} = 0, \qquad \text{(во внешней области)} \qquad (19)$$

при условиях

$$\varphi = \varphi^{(e)} + \frac{\chi B_0}{\mu_0\mu_r}w,\quad \frac{1}{\mu_r}\frac{\partial\varphi^{(e)}}{\partial x_3} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} + \frac{\chi B_0}{\mu_0\mu_r}\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial v}{\partial x_2} - x_3\Delta w\right) \qquad (20)$$

на поверхностях $x_3 = \pm h$,

условиях типа (20) на торцах пластинки и условиях затухания возмущений на бесконечности. В соотношениях (19), (20) $\Delta_3$ — трехмерный оператор Лапласа.

Таким образом, рассматриваемые задачи устойчивости, несмотря на двухмерность уравнений относительно $u, v, w$, остались трехмерными.

Решение сформулированной выше трехмерной задачи для бесконечной пластинки строится следующим образом:
сначала решается задача для бесконечной пластинки

$$(u, v, w) = (u_0, v_0, w_0)\exp[i(\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2)];$$
$$(\varphi, \varphi^{(e)}) = \left(\varphi_0(x_3), \varphi^{(e)}(x_3)\right)\exp[i(\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2)], \tag{21}$$

а неизвестные волновые числа $k_1$ и $k_2$ определяются с использованием асимптотического метода интегрирования [23, 24] и условий закрепления краев пластинки.

Подставляя (21) в (19)-(20), определяем функцию $\varphi$ и индуцированное в пластинке магнитное поле $\vec{h}$. Используя найденные выражения для компонент $h_i$, получим систему уравнений устойчивости пластинки относительно $u, v, w$. При этом, уравнения продольных (относительно $u, v$) и поперечных (относительно $w$) колебаний разделяются. В дальнейшем, для применения асимптотического метода, будем рассматривать прямоугольные пластинки, полагая $kh \ll 1$. В силу этого предположения уравнения устойчивости упрощаются и уравнение (18) относительно $w$ принимает вид

$$D\Delta^2 w + 2\rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2hP\Delta w = 0, \tag{22}$$

где

$$P = \frac{\chi^2 B_0^2}{\mu_0 \mu_r}\left[\frac{\mu_r}{1 + \mu_r kh} + \frac{\chi}{\mu_r}\left(\frac{\nu}{1-\nu}(e_1 - 2) - e_2\right)\right].$$

При решении конкретных задач к уравнению (22) следует присоединить обычные условия закрепления краев пластинки.

Уравнения типа (22) при различных условиях на контуре прямоугольника $(0 \le x_1 \le a_1,\ 0 \le x_2 \le a_2)$ решены в работе [24]. Используя результаты этой работы для определения $k_1$ и $k_2$, в зависимости от типа магнитоупругих возмущений и от способа закрепления краев пластинки, получаем следующие системы трансцендентных уравнений:
для шарнирно опертой по всему контуры прямоугольной пластинки

$$k_1 = \frac{n\pi}{a_1},\ \ k_2 = \frac{m\pi}{a_2},\ \ (m, n = 1, 2, ...); \tag{23}$$

для защемленной пластинки (в этом случае формы магнитоупругих колебаний пластинки распадаются на четыре группы по типам симметрии)

$$\operatorname{ctg}\frac{a_1 k_1}{2} = -k_1\left(k_1^2 + 2k_2^2 - \frac{P}{D}\right)^{-\frac{1}{2}},\ \ \operatorname{ctg}\frac{a_2 k_2}{2} = -k_2\left(k_2^2 + 2k_1^2 - \frac{P}{D}\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{24}$$

для симметричных в обоих направлениях форм колебаний и

$$\operatorname{tg}\frac{a_1k_1}{2}=k_1\left(k_1^2+2k_2^2-\frac{P}{D}\right)^{-\frac{1}{2}},\ \operatorname{tg}\frac{a_2k_2}{2}=k_2\left(k_2^2+2k_1^2-\frac{P}{D}\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (25)$$

для антисимметричных в обоих направлениях форм колебаний.

Для остальных смешанных форм колебаний уравнения относительно $k_1$ и $k_2$ получаются из приведенных, комбинируя соответствующим образом формулы (24) и (25). Отметим также, что, комбинацией уравнений (23)-(25), можно получить соотношения относительно $k_1$ и $k_2$ для других видов опорного закрепления.

Таким образом, для каждого типа колебаний и граничных условий имеем систему двух уравнений с двумя неизвестными $k_1$ и $k_2$. Присоединяя эти трансцендентные уравнения к (22), получаем замкнутую систему из трансцендентных и дифференциальных уравнений, описывающую поведение магнитоупругих возмущений в прямоугольной магнитострикционной пластинке под действием поперечного магнитного поля. Таким образом, трехмерная задача магнитоупругой устойчивости тонкой пластинки сведена к двумерной.

## 4. Возможность потери устойчивости под действием магнитного поля

Рассмотрим устойчивость шарнирно опертой по всему контуру прямоугольной пластинки под действием внешнего заданного магнитного поля. Для этой цели при известных условиях шарнирного закрепления необходимо решить уравнение (22) (в котором $k_1=m\pi/a_1$, $k_2=n\pi/a_2$).

Решение уравнения (22), удовлетворяющее условиям шарнирного опирания, представим в виде

$$w=w_0e^{i\omega t}\sin\lambda_m x_1\sin\mu_n x_2,\quad \lambda_m=\frac{m\pi}{a_1},\quad \mu_n=\frac{n\pi}{a_2}. \qquad (26)$$

Подставляя (26) в (22), получим следующие формулы для определения частот $\omega$ магнитоупругих колебаний

$$\left(\frac{\omega_{mn}}{\omega_{mn}^0}\right)^2=1-\frac{\chi B_0^2}{\mu_0\mu_r}\frac{3(1-\nu^2)}{E(k_{mn}h)^2}\left[\frac{\mu_r}{1+\mu_r(k_{mn}h)}+\frac{\chi}{2\mu_r}\left(\frac{\nu}{1-\nu}(e_1-2)-e_2\right)\right], \qquad (27)$$

где $\omega_{mn}^0$ — частоты собственных колебаний пластинки при отсутствии магнитного поля

$$\left(\omega_{mn}^0\right)^2=\frac{Dk_{mn}^2}{2\rho_0h},\quad k_{mn}^2=\left(\frac{m\pi}{a_1}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{a_2}\right)^2.$$

Из соотношения (27) видно, что потеря статической устойчивости пластинки невозможна, если выражение в квадратной скобке отрицательное. Следовательно, если физико-механические и геометрические параметры задачи таковы, что имеет место следующее условие

$$\gamma \equiv \frac{\mu_r}{1+\mu_r(k_{mn}h)} + \frac{\chi}{2\mu_r}\left(\frac{\nu}{1-\nu}(e_1-2)-e_2\right) < 0, \tag{28}$$

то невозмущенное состояние пластинки устойчиво и присутствие магнитного поля увеличивает частоты магнитоупругих колебаний. Если же $\gamma > 0$, то существуют такие значения $B_0(m,n)$ магнитной индукции заданного магнитного поля, при которых $\omega_{mn} = 0$ (условия потери статической устойчивости). На этом основании, для определения критического значения $B_{kp}$ магнитной индукции $\left(B_{kp} = \right.$ $\left. = \min\limits_{(m,n)} B_0(m,n)\right)$, при котором пластинка теряет устойчивость, получим формулу

$$\frac{B_{kp}^2}{\mu_0 E} = \frac{\mu_r(k_{11}h)^2}{3\chi(1-\nu^2)}\left[\frac{\mu_r}{1+\mu_r(k_{11}h)} + \frac{\chi}{2\mu_r}\left(\frac{\nu}{1-\nu}(e_1-2)-e_2\right)\right]^{-1}. \tag{29}$$

С использованием последней формулы произведены вычисления величины $B_{kp}$ в случае квадратной пластинки из материала феррит Ф-107, для которого $\mu_r = 30,\ e_1 = 98,\ e_2 = -49,\ E = 1{,}71\cdot 10^{11}\,H/M^2,\ \nu = 0{,}3$. Для расчета принято $k_{11}h = (200)^{-1}$. В результате получим $B_{kp} = 0{,}61\,B_{kp}^0$, где $B_{kp}^0 = 0{,}28$ Тл — критическое значение магнитной индукции при условии пренебрежения магнитострикционным эффектом.

### Литература


[1] *Brown W.F.* Magnetoelastic Interactions. — Springer-Verlag, New-York, 1966. — 155 p.

[2] *Бурак Я. И., Галапац Б. П., Подстригач Я. С.* Исходные уравнения теории деформаций неполяризованных электропроводных твердых тел // Избранные проблемы прикладной механики. — М.: ВИНИТИ, 1974. — С. 167-178.

[3] *Селезов И. Т., Селезова Л. В.* Волны в магнитогидроупругих средах. — К.: Наук. думка, 1975. — 163 с.

[4] *Борисенко В. А., Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.* Соотношения электроупругости для пьезокерамических оболочек вращения // Прикл. механика. — 1976. — Т. 12, № 2. — С. 26-34.

[5] *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. — М.: Наука, 1977. — 272 с.

[6] *Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Гачкевич А. Р., Чернявская Л. В.* Термоупругость электропроводных тел. — К.: Наук. думка, 1977. — 247 с.

[7] *Бурак Я. И., Галапац Б. П., Гнидец Б. М.* Физико-механические процессы в электропроводных телах. — К.: Наук. думка, 1978. — 232 с.

[8] *Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Кондрат В. Ф.* Магнитотермоупругость электропроводных тел. — К.: Наук. думка, 1981. — 293 с.

[9] *Гузь А. Н., Махорт Ф. Г.* Акустоэлектромагнитоупругость. — К.: Наук. думка, 1988. — 285 с.

[10] *Maugin G. A.* Continuum mechanics of electromagnetic solids // North-Holand-Amsterdam-New-York-Oxford-Tokyo. — 1988. — 560 p.

[11] *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е.* Электропроводящие пластинки и оболочки в магнитном поле. — М.: Наука, 1996. — 288 с.

[12] *Багдасарян Г. Е.* Колебания и устойчивость магнитоупругих систем. — Ереван: ЕГУ, 1999. — 440 с.

[13] *Киселев М. И.* Математическое моделирование нестационарных магнитотермомеханических процессов, конденсированных в проводящих средах // Пробл. механики тонких деформируемых тел. — Изд-во НАН РА, 2002. — С. 195-199.

[14] *Бурак Я. И., Гачкевич А. Р.* Математические модели и методы в термомеханике электропроводных тел // Пробл. механики тонких деформируемых тел. — Изд-во НАН РА, 2002. — С. 89-98.

[15] *Багдасарян Г. Е.* Математическое моделирование поведения возмущений в магнитострикционных средах // Мат. методы и физ-мех поля. — 1998. — Т. 41, № 3. — С. 70-75.

[16] *Kaliski S.* Magnetoelastic vibration of perfectly conducting plates and bars assuming the principle of plane sections // Proc.Vibr. Probl. Pol. Acad. Sci. — 1962. — Vol. 3, № 4. — P. 225-234.

[17] *Бурак Я. И., Гачкевич А. Р.* Влияние периодических во времени электромагнитных полей на вынужденные колебания электропроводной пластинки // Динамика и прочность машин. — 1975. — № 21. — С. 102-107.

[18] *Tiersten H. F.* Thickness Vibrations of Saturated Magneto-elastic Plates // J. of Appl. Phys. — 1965. — Vol. 36, № 7.

[19] *Мун Ф., Пао И-Синь.* Магнитоупругое выпучивание тонкой пластинки // Тр. Американского общества инженеров-механиков. Сер. Е. Прикладная механика. — 1968. — № 1. — С. 59-61.

[20] *Багдасарян Г. Е., Микилян М. А.* Математическое моделирование магнитоупругих колебаний проводящих ферромагнитных пластин // Изв. НАН Армении. Механика. — 1996. — Т. 49, № 4. — С. 3-18.

[21] *Филиппов Б. Н., Болтачев В. Д., Тараканинов В. В.* Изгибные колебания многослойных стрикционных пластин // ЖТФ. — 1977. — Т. 47, вып. 1. — С. 209-219.

[22] *Багдасарян Г. Е., Даноян Э. А.* Математическое моделирование колебаний двухслойной магнитострикционной пластинки // Изв. АН РФ, МТТ. — 1992. — № 3. — С. 87-94.

[23] *Болотин В. В., Макаров Б. П., Мишенков Г. В., Швейко Ю. Ю.* Асимптотический метод исследования спектра собственных частот упругих пластинок // Расчеты на прочность. — М.: Машгиз, 1960. — Вып. 6. — С. 31-253.

[24] *Багдасарян Г. Е.* Асимптотический метод исследования магнитоупругих колебаний прямоугольных пластин // Мат. методы и физ.-мех. поля. — 1986. — № 24. — С. 72-75.

[25] *Bagdasarian G. E., Philiposian G. T.* Mathematical modeling and numerical investigation magnetoelastic stability of superconductive plates // Proc. North American Conf. on Smart Structures and Materials (SPIE). — USA, 1997. — Vol. 3039. — P. 715-725.

## Stability of Magnetostrictive Rectangular Plates

Gevorg Baghdasaryan

*On the basis of linearized equations of magneto elasticity the behaviour of small disturbances in magneto active deformable medium is investigated. The three-dimensional problem for thin dielectrical magnetostrictive rectangular plates in a constant magnetic field is reduced to the two-dimensional one using the Kirchhoff hypothesis and applying asymptotic method of integration. On this basis the concrete problem is solved; the existence of range of the material magnetostrictive characteristics for which the non-disturbed state of the plate is stable for any values of the induction of external magnetic field is shown; the magnetostrictive effect can essentially decrease the critical value of the magnetic induction at which plate loses stability.*

## Стійкість магнітострикційних прямокутних пластин

Ґеворґ Багдасарян

*На основі лінеаризованих рівнянь магнітопружності досліджено поведінку малих збурень у магнітоактивному деформівному середовищі. Для тонких діелектричних магнітострикційних прямокутних пластин, що перебувають у постійному магнітному полі з використанням гіпотези Кірхгофа та асимптотичного методу інтегрування тривимірна задача зведена до двовимірної. На цій основі сформульовано та розв'язано відповідну задачу стійкості та показано, що існує область значень магнітострикційних характеристик матеріалу, у якій незбурений стан пластинки стійкий за довільних значень індукції зовнішнього магнітного поля; магнітострикційний ефект може суттєво зменшити критичне значення магнітної індукції, при якому пластинка втрачає стійкість.*

Отримано 06.09.05