УДК 621.64.029

Особливості застосування числового методу скінченних різниць при моделюванні фізичних процесів

Роман Кушнір[1], Ярослав П'янило[2], Андрій П'янило[3]

[1] д. ф.-м. н., Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3 б, 79053, Львів, e-mail: prom@cmm.lviv.ua
[2] к. ф.-м. н., с. н. с., Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Дудаєва, 15, 79005, Львів, e-mail: prom@cmm.lviv.ua
[3] Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3 б, Львів, 79053, e-mail: prom@cmm.lviv.ua

Розглянуто особливості застосування методу Рунге-Кутта до розв'язування нелінійних диференціальних рівнянь, якими описується рух газу в трубопроводах. Проаналізовано адекватність параболічного диференціального оператора його різницевому аналогу. На основі модельної задачі показано вплив похибки вхідних даних на процедуру дискретизації диференціального оператора. Методом оберненого ходу розв'язано задачу про розподіл тиску в трубопроводі при нестаціонарному русі газу в ньому. Запропоновано деякі способи підвищення ефективності застосування числових різницевих методів до розв'язування задач математичної фізики.

Ключові слова: моделювання фізичних процесів, нестаціонарні задачі математичної фізики, інтегральні перетворення, обчислювальний експеримент.

Вступ. Метою математичного моделювання є розкриття і поглиблене дослідження механізму явищ і взаємодії його частин. В якості математичного апарату використовують диференціальні рівняння, математичну статистику, лінійні графи й інші підходи. Очевидно, що оптимальним, з точки зору обчислювальної математики, є отримання параметричних залежностей між характеристиками фізичних процесів. Як правило, якщо фізичні процеси описуються диференціальними рівняннями (звичайними чи в часткових похідних), то такі рівняння є нелінійними і вимагають значних додаткових досліджень при розв'язуванні відповідних задач математичної фізики. Останнім часом широко застосовують числові методи розв'язування задач математичної фізики, які мають як переваги, так і недоліки. Перевагою, зокрема, є те, що числові методи дають змогу розв'язати широкий клас початково-граничних задач та побудувати на цій основі автоматизовані алгоритми. До негативних сторін можна віднести наступні.

При розв'язуванні задач математичної фізики виникає три типи похибок: похибка методу; похибка вхідних даних (неусувна похибка); машинна похибка, яка виникає внаслідок обмеженої розрядності. Як правило, при дослідженні числових методів обмежуються аналізом похибки методу і мало звертають увагу на інші похибки. Але при дослідженні реальних фізичних процесів вагомою є похибка вхідних даних. Це пов'язано з тим, що заміряні дані відомі в нееквідистантних точках і зі значною похибкою. Крім цього, використання числових методів вимагає дискретизації вихідних рівнянь, яка не дозволяє оцінити похибку, що виникає при цьому.

Метою даної роботи є аналіз числового методу скінченних різниць та визначення меж його застосування при розв'язуванні задач математичної фізики.

1. Використання методу Рунге-Кутта

Застосуємо числові методи до розв'язування нелінійних диференціальних рівнянь, якими описується багато фізичних процесів, зокрема рух газу в трубопроводах у стаціонарному випадку [1, 2]

$$\frac{dp}{\rho} + \alpha \;\; d\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right) + \lambda \;\; \frac{\upsilon^2}{2}\;\frac{dx}{D} + g \;\; dh = 0 \tag{1}$$

де $p = p(x)$ — розподіл тиску по довжині трубопроводу; ρ — густина газу; α — коефіцієнт Коріоліса (для ламінарного потоку $\alpha = 2$, а для турбулентного — $\alpha = 1{,}1$); υ — швидкість газу; λ — коефіцієнт гідравлічного опору; x — біжуча координата $x \in [0, l]$, де l — довжина трубопроводу; D — внутрішній діаметр трубопроводу; g — прискорення вільного падіння; $h = h(x)$ — крива, що описує рельєф траси газопроводу і в даному випадку моделюється похилою прямою

$$h = h(x) = \frac{\Delta h}{l} x + h_0 \,. \tag{2}$$

Тут Δh — перепад висот між початковою та кінцевою точками трубопроводу, а густина ρ обчислюється за формулою

$$\rho = \frac{p}{g \chi R T}\,, \tag{3}$$

де χ — коефіцієнт надстисливості газу; T — температура газу; R — газова стала.

Якщо прийняти, що параметри χ та T є постійні, то розв'язок диференціального рівняння (1) при відомому вхідному тискові p_0 отримується достатньо просто в аналітичному вигляді. Однак, при розв'язуванні реальних задач згадані параметри є змінними і обчислюються згідно аналітично та емпірично побудованих формул, зокрема

$$\chi = \frac{1}{1 + fp},$$

де $f = \left(24 - 0{,}21 t^{\circ} C\right) \cdot 1{,}02 \cdot 10^{-9}$, t — температура газу (за Цельсієм);

$$T(x) = T_{01} + T_{02} e^{-ax}\,,$$

$$T_{01} = T_{\tilde{a}} - T_{00}, \quad T_{02} = T_0 - T_{\tilde{a}} + T_{00}$$

$$T_{00} = \frac{1}{aL}\left(\Delta p\left(D_i - \frac{1}{C_p \rho_0}\right) + \frac{g\Delta h}{C_p}\right),$$

$$\Delta p = p_0 - p_k, \qquad a = \frac{k\pi \; D}{C_p M}$$

T_0 — температура газу на вході в трубопровід; $T_г$ — температура ґрунту; D_i — коефіцієнт Джоуля-Ленца; k — коефіцієнт теплопередачі від газу до ґрунту; ρ_0 — густина газу в стандартних умовах; C_p — питома теплоємність газу при сталому тиску; p_0, p_k — значення тиску на початку й в кінці газопроводу; $M = \rho\upsilon$ — масова витрата газу. В даному випадку отримати розв'язок рівняння (1) в параметричній формі не вдається. Тому для знаходження розв'язку використано числовий метод Рунге-Кутта різного порядку точності. Для цього вихідне рівняння необхідно записати так

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\eta_3 p^2 + \eta_2 (\chi T)^2}{p^2 + \eta_1 \chi T}\frac{p}{\chi T}. \tag{4}$$

Тут

$$\eta_1 = -\frac{\alpha R}{2}\left(\frac{M}{S}\right)^2, \; \eta_2 = \frac{\lambda R}{2D}\left(\frac{M}{S}\right)^2, \; \eta_3 = \frac{g\Delta h}{RL}.$$

Результати розв'язку даного рівняння в кінці трубопроводу довжиною 122 км і діаметром 1,388 м приведені в таблиці 1, де в першій колонці приведено значення тиску на вході в трубопровід, в другій — точне значення тиску, з третьої до шостої колонок —значення тиску, обчислені методом Рунге-Кутта відповідно першого, другого, третього та четвертого порядків точності. При цьому точними є тільки дві значущих цифри в граничній умові. У таблиці 2 приведені значення вхідного та обчислені методом Рунге-Кутта другого ступеня точності значення вихідних тисків для різної кількості кроків розбиття. Результати обчислень показують, що при розв'язуванні практичних задач з малою кількістю значущих цифр збільшення кількості кроків розбиття та ступеня точності в методі Рунге-Кутта не приводять до покращення результатів. Існують такі значення параметрів, при яких похибка обчислень є мінімальною. Очевидно, що вибір оптимальних параметрів можливий в тому випадку, коли відома апріорна інформація про шуканий розв'язок.

Таблиця 1
Значення вхідного та обчислених методом Рунге-Кутта
різного ступеня точності вихідних тисків

Вхідне значення	Точне значення	1 доданок	2 доданки	3 доданки	4 доданки
66,8	48,5	58,326	48,304	35,456	13,963
66,8	48,4	58,362	48,392	35,638	14,523
66,7	48,4	58,257	48,276	35,496	14,231
66,6	48,4	58,172	48,211	35,457	14,256
66,5	48,3	58,067	48,095	35,314	13,96
66,5	48,3	58,144	48,284	35,701	15,134
66,8	47,9	59,924	52,097	42,8	30,765
66,8	48,5	58,465	48,643	36,149	16,029
66,8	48,5	58,279	48,19	35,221	13,213
66,7	48,5	58,257	48,276	35,496	14,231
66,6	48,5	58,146	48,147	35,327	13,852
66,6	48,4	58,208	48,299	35,638	14,805
66,5	48,3	58,103	48,183	35,496	14,518
66,4	48,3	58,029	48,143	35,509	14,698
66,2	48,2	57,823	47,923	35,25	14,197
66,2	48,1	57,86	48,012	35,431	14,746
66,1	48	57,811	48,034	35,572	15,299
66	47,9	57,696	47,893	35,379	14,869
66	47,9	57,685	47,868	35,328	14,716

Таблиця 2
Значення вхідного та обчислених методом Рунге-Кутта
другого ступеня точності вихідних тисків при різній кількості кроків розбиття

Вхідне значення	Точне значення	Обчислені значення					
		5 вузлів	10 вузлів	20 вузлів	30 вузлів	40 вузлів	50 вузлів
66,8	48,5	48,987	48,609	48,408	48,339	48,304	48,283
66,8	48,4	49,068	48,695	48,495	48,427	48,392	48,371
66,7	48,4	48,955	48,58	48,38	48,311	48,276	48,255
66,6	48,4	48,888	48,514	48,314	48,245	48,211	48,19
66,5	48,3	48,774	48,399	48,198	48,129	48,095	48,074
66,5	48,3	48,948	48,581	48,385	48,318	48,284	48,263
66,8	47,9	52,518	52,284	52,16	52,119	52,097	52,085
66,8	48,5	49,299	48,937	48,743	48,677	48,643	48,623
66,8	48,5	48,882	48,499	48,295	48,225	48,19	48,168
66,7	48,5	48,955	48,58	48,38	48,311	48,276	48,255
66,6	48,5	48,829	48,453	48,252	48,182	48,147	48,126
66,6	48,4	48,969	48,599	48,401	48,333	48,299	48,278
66,5	48,3	48,855	48,484	48,286	48,218	48,183	48,162
66,4	48,3	48,811	48,442	48,245	48,177	48,143	48,122
66,2	48,2	48,596	48,224	48,026	47,958	47,923	47,903
66,2	48,1	48,677	48,309	48,113	48,046	48,012	47,991
66,1	48	48,691	48,328	48,134	48,068	48,034	48,014
66	47,9	48,555	48,189	47,994	47,927	47,893	47,873
66	47,9	48,531	48,165	47,969	47,902	47,868	47,848

2. Використання різницевих методів

Досить часто для розв'язування нестаціонарних задач математичної фізики використовуються різницеві методи. На модельній задачі проаналізуємо вплив процедури дискретизації та використання методу прогонки (метод скінченних різниць) на розв'язок рівнянь типу теплопровідності

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial f}{\partial t}=0, \tag{5}$$

за нульової початкової умови та при $f(0,t)=\sqrt{\pi}/a\sqrt{t}$. Точний розв'язок даного рівняння задається формулою

$$f(x,t)=\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right). \tag{6}$$

Зауважимо, що рівняннями такого типу у разі відповідної фізичної інтерпретації шуканого розв'язку та параметру a описують процеси поширення тепла, руху газу в довгих трубопроводах і т. п.

Якщо сформульовану задачу розв'язувати методом скінченних різниць, то диференціальний оператор у рівнянні (5) дискретизується і записується наступним чином (різницевий варіант)

$$\frac{f_{m+1}^{n+1}-2f_m^{n+1}+f_{m-1}^{n+1}}{h^2}-\frac{1}{a^2}\frac{f_m^{n+1}-f_m^n}{\tau}=0. \tag{7}$$

Отже, в результаті дискретизації отримуємо однорідне різницеве рівняння. Оскільки точний розв'язок задачі відомий, то можемо перевірити адекватність диференціального рівняння (5) та різницевого (7). На рис. 1, 3, 5 показано залежність функції

$$\Delta_r(f)=\frac{f_{m+1}^{n+1}-2f_m^{n+1}+f_{m-1}^{n+1}}{h^2}-\frac{1}{a^2}\frac{f_m^{n+1}-f_m^n}{\tau} \tag{8}$$

від координати для a = 0,5 з кроками дискретизації $\tau = h$ = 0,01 та при $n=m=70$. Бачимо, що заміна диференціального оператора різницевим, приводить до значної похибки для малих значень часу та координати, тобто в примежевих зонах. З відходом цих параметрів (часу та координати) від примежевої зони похибка дискретизації суттєво зменшується.

Приведена вище похибка дискретизації за умови, що всі параметри обчислюються в межах розрядної сітки обчислювальної машини. Однак, на практиці вхідні дані задаються з деякою похибкою (так, при дослідженні процесів транспортування газу похибка вхідних даних складає близько 3%). Тому доцільно перевірити похибку дискретизації й у цьому випадку. На рис. 2, 4 та 6 показано залежності функції (8) від координати при тих же значеннях вхідних параметрів, що і на рис. 1, 3 та 5 відповідно, за винятком того, що в значення функції $f(x,t)$

внесено систематичну похибку порядку 0,1%. Аналіз цих залежностей показує, що наявність похибки вхідних даних значно збільшує як похибку дискретизації, так і ширину примежевої зони, в якій ця похибка є значною.

У роботі [2] відзначається, що стійкість різницевої схеми (7) залежить від кроків дискретизації і побудовано стійку обчислювальну схему, що базується на використанні «оберненого ходу» обчислення шуканого розв'язку і полягає в наступному.

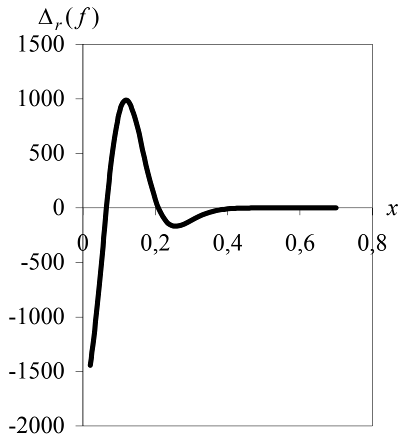

Рис. 1. Залежність функції $\Delta_r(f)$ від координати для t = 0,02 с

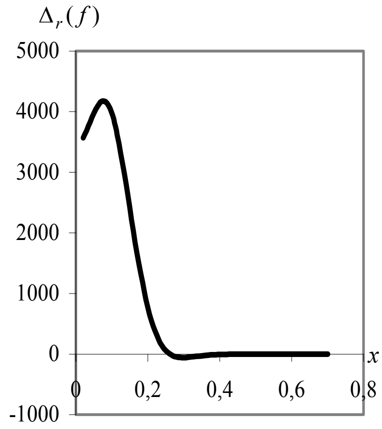

Рис. 2. Залежність функції $\Delta_r(f)$ від координати для t = 0,02 с у разі наявності вхідної похибки.

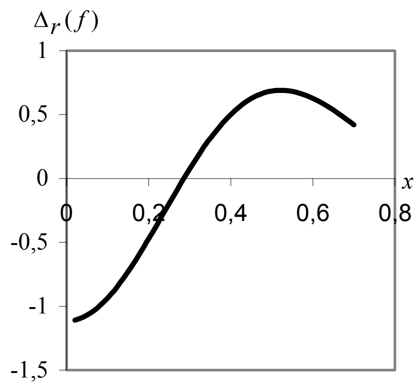

Рис. 3. Залежність функції $\Delta_r(f)$ від координати для t = 3 с

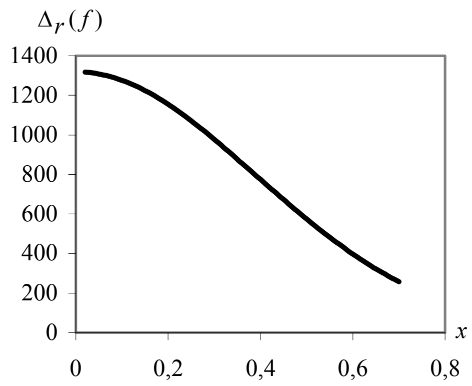

Рис. 4. Залежність функції $\Delta_r(f)$ від координати для t = 3 с у разі наявності вхідної похибки

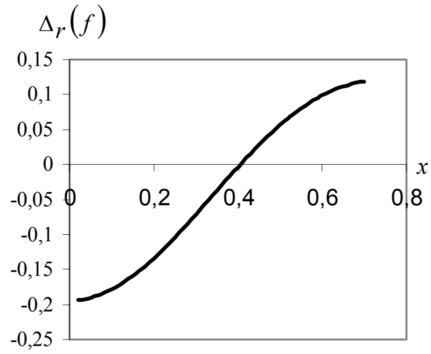

Рис. 5. Залежність функції $\Delta_r(f)$ від координати для t = 6 с

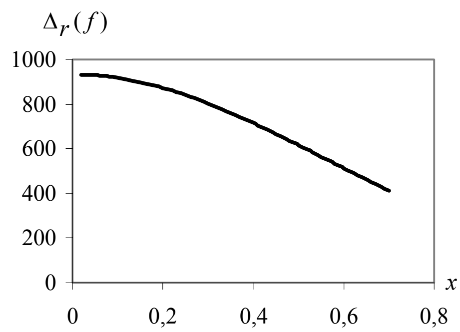

Рис. 6. Залежність функції $\Delta_r(f)$ від координати для t = 6 с у разі наявності вхідної похибки

Нехай

$$x_i = ih,\ t_j = j\tau \quad (i, j = \overline{0,n}),$$

де $h = l/n$, та τ — деяка додатна величина, $f_{ij} = f(x_i, t_j)$ з граничними і початковими умовами

$$f(0,t) = \varphi(t),\quad f(l,t) = \phi(t),\quad f(x,0) = \gamma(x). \tag{9}$$

Метод прогонки з використанням «оберненого ходу» полягає у введені додаткових величин a_{ij} та b_{ij}, які обчислюються за формулами

$$a_{i,j+1} = \frac{1}{2 + s - a_{i-1,j+1}},\ b_{i,j+1} = a_{i-1,j+1} b_{i-1,j+1} + s f_{ij}, \tag{10}$$

де $s = h^2/\tau$. Зокрема

$$a_{1,j+1} = \frac{1}{2+s},\quad b_{1,j+1} = \varphi(t_{j+1}) + s f_{1j}. \tag{11}$$

Користуючись формулами (10) та (11), визначаються дві послідовності чисел a_{ij} та b_{ij} (прямий хід). Невідомі значення шуканого розв'язку знаходяться на основі «оберненого ходу» згідно формул

$$\begin{aligned} & f_{n,j+1} = \phi(t_{j+1}), \\ & f_{n-1,j+1} = \left(f_{n,j+1} + b_{n-1,j+1}\right) a_{n-1,j+1}, \\ & f_{n-2,j+1} = \left(f_{n-1,j+1} + b_{n-2,j+1}\right) a_{n-2,j+1}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & f_{1,j+1} = \left(f_{2,j+1} + b_{1,j+1}\right) a_{1,j+1}. \end{aligned} \tag{12}$$

Система співвідношень (12) дозволяє побудувати шуканий розв'язок вихідної задачі математичної фізики (5) за вказаних крайових умов. При цьому $f_{0,j+1} = \varphi(t_{j+1})$, $f_{n,j+1} = \phi(t_{j+1})$.

Запропонована схема використана для побудови розв'язку рівняння (5) при нульовій початковій умові та при $f(0,t) = \sqrt{\pi}/a\sqrt{t}$. На рис. 7 показано абсолютну похибку між точним значенням розв'язку вихідної задачі і значенням, отриманим за допомогою методу «оберненого ходу».

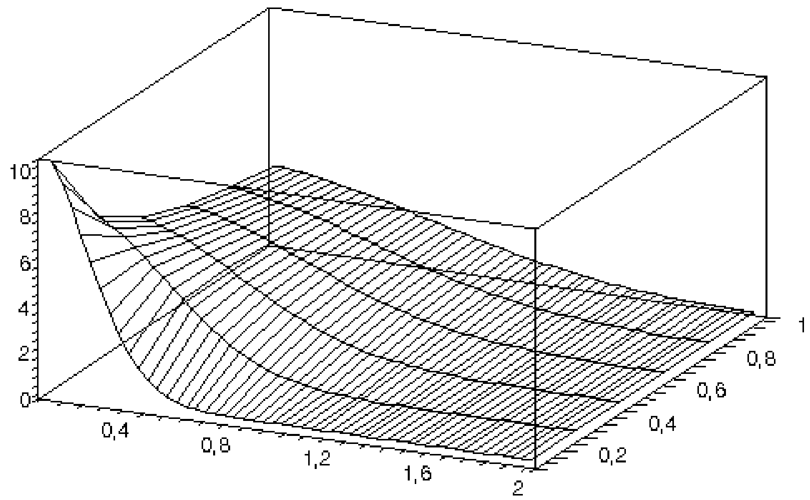

Рис. 7. Абсолютна похибка між точним значенням розв'язку вихідної задачі і значенням, отриманим за допомогою методу «оберненого ходу»

При $a = \dfrac{c}{\sqrt{k}}$, $k = \dfrac{\lambda \upsilon_c}{2D}$, де c — швидкість звуку в газі, λ — коефіцієнт гідравлічного опору, D — діаметр трубопроводу, υ_c — середня швидкість газу в трубопроводі, рівняння (5) описує розподіл тиску в довгих трубопроводах. Параметричний розв'язок задачі математичної фізики при початковому розподілі тиску

$$p(x,0) = p_{00} + p_{kk}e^{bx}, p_{00} = \frac{p_0 - p_k e^{-bl}}{1 - e^{-bl}}, p_{kk} = \frac{p_0 - p_k}{1 - e^{-bl}} e^{-bl}, \qquad (13)$$

та граничних умовах

$$p(0,t) = p_0(t) = p_{op} + \left(p_0 - p_{op}\right)e^{-\gamma_0 t}, \; p(l,t) = p_l(t) = p_{kp} + \left(p_k - p_{kp}\right)e^{-\gamma_k t} \qquad (14)$$

задається співвідношеннями

$$p(x,t)=\zeta_1\left(x,\frac{l-x}{a},\frac{l}{a},t\right)+\zeta_l\left(x,\frac{x}{a},\frac{l}{a},t\right)+p_{00}+p_{kk}\exp\left[bx+(ab)^2t\right], \qquad (15)$$

$$\zeta_i\left(x,v,u,t\right)=-\frac{1}{u}\left\{v\left[-\beta_i\left(1-e^{-\gamma_i t}\right)+\frac{p_{kk}^{(i)}}{a^2b^2}\right]+\right.$$

$$\left.2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin a_k v}{a_k}\left[\frac{\gamma_i\beta_i}{\gamma_i-a_k^2}\left(e^{-a_k^2t}-e^{-\gamma_i t}\right)+\frac{p_{kk}^{(i)}}{a^2b^2+a_k^2}\left(e^{-a_k^2t}-e^{-a^2b^2t}\right)\right]\right\},\ i=\{1,\,l\},$$

$$a_k=\frac{k\pi}{a},\quad p_{kk}^{(i)}=\begin{cases}1, & i=0,\\ e^{-bl}, & i=l,\end{cases}\quad \beta_i=\begin{cases}p_0-p_{0p}, & i=0,\\ p_k-p_{kp}, & i=l.\end{cases}$$

Тут p_0 та p_k — значення тисків на початку та в кінці трубопроводу при вихідному стаціонарному стані, p_{0p} та p_{kp} — значення тисків на початку та в кінці трубопроводу при встановленому стаціонарному стані, γ_0 та γ_k — параметри, які характеризують швидкість переходу тиску з одного стаціонарного стану в інший,

$$b=\frac{\lambda\,\upsilon_1\upsilon_2}{2D\chi RT},$$

де T — абсолютна температура, υ_1 та υ_2 — нижня та верхня межі зміни швидкості газу в трубопроводі.

На рис. 8 показано різницю між значеннями розподілу тиску в трубопроводі довжиною 100 км, діаметру 1,4 м, отриманими згідно алгоритму (10)-(12) та значеннями, обчисленими за формулою (15) при таких вхідних значеннях термогідравлічних параметрів $\lambda = 0{,}01$; $R = 500$ дж/кг$\cdot\,^\circ$K; $T_г = 300\,^\circ$K; $\chi = 0{,}91$; c = 400 м/с; $\gamma_0 = 0{,}5$; $p_0 = 50$ атм; $p_k = 38$ атм; $p_{0p} = 55$ атм; $p_{kp} = 44{,}37$ атм для значень часу із проміжку $t\in[0{,}5000]$.

Рис. 7, 8 показують, що відхилення від значення тиску, обчисленого за точною формулою та різницевим методом є найбільшим у примежевих точках зміни аргументів x та t.

Висновки. Оскільки при моделюванні газотранспортних мереж необхідно знати значення тисків на вході $\left(x=0\right)$ та виході $\left(x=L\right)$ трубопроводу, то отримані результати показують, що використання різницевих методів для розрахунку режимів роботи газотранспортних мереж може привести до значних похибок. Окрім цього,

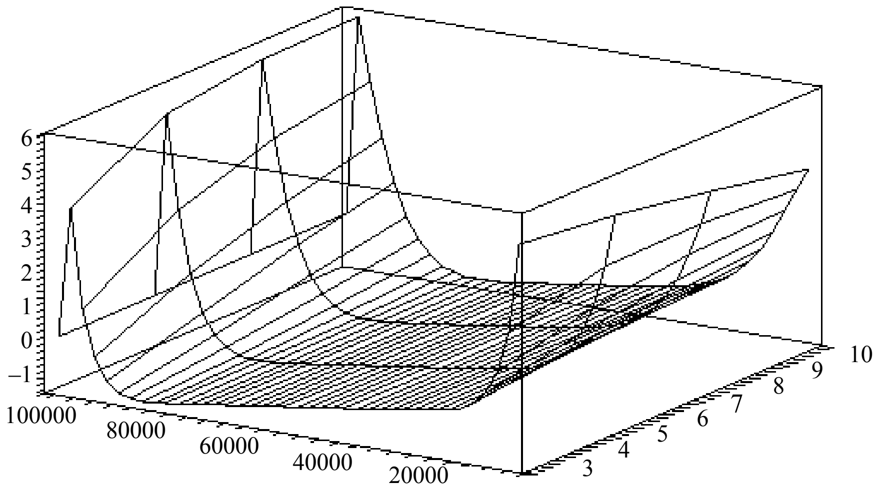

Рис. 8. Абсолютна похибка обчислення розподілу тиску $p(x, t)$ у трубопроводі від координати та часу

враховуючи, що значення вхідних гідродинамічних параметрів, які входять у рівняння руху газу, відомі з певною похибкою, то, як видно з рис. 1-6, використання різницевих методів призводить до значного збільшення похибки шуканого розв'язку. Це особливо важливо в тих випадках, коли на основі знайдених розв'язків обчислюються різного роду балансові величини, зокрема об'єми газу, що перекачується. Відомо, наприклад, що для трубопроводу з вказаними вище параметрами похибка обчислення тиску в одну атмосферу спричиняє похибку в обчисленні об'єму газу в десятки тисяч метрів кубічних за годину. На основі проведених досліджень можна запропонувати деякі способи підвищення ефективності застосування числових різницевих методів до розв'язування задач математичної фізики.

- З аналізу фізичного процесу відомо, що при стаціонарному русі газу в трубопроводі основним є вклад квадратичної залежності тиску від об'ємного перенесення газу. Використання методу Рунге-Кутта з порядком точності вище двох призводить до підвищення порядку залежності тиску від об'ємного перенесення газу. Тому аналіз фізичного процесу дає можливість вибрати необхідний порядок точності даного методу. На вибір кількості вузлів суттєво впливає точність задання вхідної інформації.
- При використанні різницевих методів аналіз функції $\Delta_r(f)$ дає змогу визначити вплив примежевого шару, в якому розв'язок відповідної задачі математичної фізики різницевим способом має значну похибку. Варіація кроків дискретизації допомагає зменшити величину функції $\Delta_r(f)$ і тим самим уточнити розв'язок задачі.

- У тому випадку, коли примежеві зони є невеликими, балансові величини, обчислені на основі знайденого числового розв’язку, будуть незначно відрізнятися від реальних величин. У протилежному випадку необхідно знаходити розв’язок задачі математичної фізики іншим способом, наприклад, на основі теорії збурення.

Література

[1] *Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З.* Численные методы анализа. — М., 1967. — 368 с.
[2] *Бобровский С. А., Щербаков С. Г.* и др. Трубопроводный транспорт газа. — М.: Наука, 1976. — 495 с.
[3] *П’янило Я. Д.* Дослідження неусталеного руху газу в пористих середовищах // Прикл. проблеми мех. і мат. — 2004. — Вип. 2. — С. 178−184.

Features of Application of Numerical Method of Differences under Physical Processes Modelling

Roman Kushnir, Yaroslav P’yanylo, Andriy P’yanylo

The features of application of Runge-Kutta method for solving of nonlinear differential equations describing a gas motion in pipelines are considered. Adequacy of parabolic differential operator to its difference analogue is analysed. On a model problem the influence of the input data errors on the procedure of the differential operator discretization is shown. Applying the counter motion method the problem of determination of pressure distribution in the pipeline at non-stationary gas flow is solved. Some methods to increase the efficiency of application of the numerical difference method in mathematical physics problems are offered.

Особенности применения численного разностного метода при моделировании физических процессов

Роман Кушнир, Ярослав Пяныло, Андрий Пяныло

Рассмотрены особенности применения метода Рунге-Кутта к решению нелинейных дифференциальных уравнений, которыми описывается движение газа в трубопроводах. Проанализирована адекватность параболического дифференциального оператора его разностному аналогу. На основе модельной задачи показано влияние погрешности входных данных на процедуру дискретизации дифференциального оператора. Методом обратного хода решена задача о распределении давления в трубопроводе при нестационарном движении газа в нем. Предложены некоторые способы повышения эффективности применения числовых разностных методов к решению задач математической физики.

Отримано 02.12.05