УДК 624.07:534.1

Оптимизация по двум мерам формы упругих тел в задачах устойчивости

Петро Доманский

к. ф.-м. н., доцент кафедри математичного моделювання механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка, e-mail: domanskyy@gmx.net

Предложены формулировка и методика решения задачи оптимизации критических значений параметров устойчивости упругих тел по двум мерам путем соответствующего выбора формы. Для исследования устойчивости используют аналог прямого метода Ляпунова для систем с распределенными параметрами. Полученные результаты используются для изучения устойчивости стержней переменного поперечного сечения, нагруженных осевыми силами сжатия. Задача оптимизации сведена к поиску максимума по параметрам формы поперечного сечения от минимума по фазовым переменным некоторого неаддитивного функционала. Решение этой задачи осуществляют методами вариационного исчисления. Найдены оптимальные формы для случая шарнирного опирания концов стержня. Показано, что выбором формы стержня можно существенно увеличить критические значения осевого нагружения.

Ключевые слова: оптимизация формы упругих тел, стержень переменного поперечного сечения, устойчивость по двум мерам.

Вступление. Задача о нахождении распределения материала вдоль оси стержня, при котором значение критической силы потери устойчивости при заданных объеме и длине стержня является наибольшим, была поставлена Ж.-Л. Лагранжем [15]. Для шарнирно закрепленного стержня оптимальная форма была найдена Т. Клаузеном [14]. В работе [10] приведено обобщение этой задачи путём введения ограничения на минимально допустимые значения площади поперечного сечения. Аналитическое решение задачи Лагранжа для других видов граничных условий получено в [16]. Общие вопросы постановок и решения задач оптимизации формы упругих тел, исходя из их устойчивости, систематизированы в ряде монографий, например [1, 2, 11, 13]. В указанных работах исходным является критерий Эйлера исследования устойчивости равновесия упругих тел. В данной работе предлагается постановка и методика решения задачи оптимизации формы упругих тел при изучении их устойчивости по двум мерам. Для исследования устойчивости используется аналог прямого метода Ляпунова для системы с распределёнными параметрами [9, 12]. Для выбранных мер отклонения базового решения от возмущённого предложено функционал, который играет ту же роль, что и функции Ляпунова для систем с сосредоточенными параметрами. На основе этого функционала получены достаточные условия устойчивости движения, которые имеют вид интегрального неравенства. Это неравенство является базовым для постановки задачи оптимизации формы упругих тел. Для решения задачи оптимизации используются методы вариационного исчисления. Применение полученных результатов иллюстрируется на примере стержней переменного поперечного сечения, на которые действуют осевые сжимающие усилия.

1. Постановка задачи

Рассматривается изотропное упругое тело *K*. Различаем три конфигурации этого тела: γ_0, γ_τ, $\overset{*}{\gamma}_\tau$. Первую из них называем отсчетной, а две другие — актуальными. Отсчетная γ_0-конфигурация считается естественной (недеформированной) — в теле отсутствуют напряжения и деформации. Область отсчетной конфигурации и поверхность, ограничивающую её, обозначим X_0 и ∂X_0 соответственно. Актуальную γ_τ-конфигурацию назовём базовой (невозмущённой). Она возникла вследствие воздействия на тело *K* с момента времени $\tau = \tau_0$ массовых и поверхностных сил. Вектор перемещения с γ_0 в γ_τ-конфигурацию обозначим $\vec{u}_0$. Другую актуальную $\overset{*}{\gamma}_\tau$-конфигурацию, которая соответствует возмущению начальных условий в γ_τ-конфигурации, назовём возмущённой. Считая, что напряженно-деформированное состояние γ_τ-конфигурации является известным, в работе [5] при условии, что массовые и поверхностные силы являются «мёртвыми», выведено линеаризированное уравнение устойчивости движения тела *K* относительно возмущений

$$\vec{\nabla}_0 \cdot \hat{P}_0^{\bullet} = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \tau^2}. \qquad (1)$$

Здесь $\hat{P}_0^{\bullet} = \hat{P}_0^{\bullet}\left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0\right)$ — конвективная производная тензора напряжений Пиола-Кирхгоффа; $\vec{u}$ — возмущение вектора перемещения в γ_τ-конфигурации; $\vec{\nabla}_0$ — набла-оператор Гамильтона в γ_0-конфигурации; ρ_0 — плотность распределения массы относительно γ_0-конфигурации; «$\cdot$» — операция скалярного (внутреннего) умножения; «$\otimes$» — операция тензорного (внешнего) умножения.

На границе ∂X_0 рассматриваем следующие граничные условия

$$\vec{э}_\alpha^{\,0} \cdot \vec{u}\Big|_{\partial X_1 \cup \partial X_2} = 0, \quad \vec{э}_3^{\,0} \cdot \left(\vec{n}_0 \cdot \hat{P}_0^{\bullet}\right)\Big|_{\partial X_1 \cup \partial X_2} = 0, \quad \vec{n}_0 \cdot \hat{P}_0^{\bullet}\Big|_{\partial X_3} = 0\,. \qquad (2)$$

Здесь $\vec{n}_0$ — единичная внешняя нормаль к поверхности ∂X_0, $\partial X_1 \cup \partial X_2 \cup \partial X_3 = \partial X_0$, $\{\vec{э}_k^{\,0}\}$ — ортонормированный базис в γ_0-конфигурации, $\alpha = 1, 2$.

Задача (1), (2) имеет решение $\vec{u} \equiv 0$. Для исследования устойчивости этого решения в качестве мер отклонения базового решения от возмущённого принимаем функционалы

$$d_0[(\vec{u}(\cdot,\tau))] = \int\limits_{X_0} \left[\rho_0 \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \right)^2 + \left| \hat{P}_0^{\bullet} \cdot\cdot \vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0 \right| \right] dV_0, \tag{3}$$

$$d[(\vec{u}(\cdot,\tau))] = \int\limits_{X_0} \rho_0 \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \right)^2 dV_0, \tag{4}$$

определённые на решениях $\vec{u}$ задачи (1), (2).

Определение. Решение $\vec{u} \equiv 0$ называем устойчивым по мерам (3), (4), если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \vec{u})(\forall \tau \geq \tau_0)\left[d_0\left[(\vec{u}(\cdot,\tau_0)) \right] < \delta \Rightarrow d\left[(\vec{u}(\cdot,\tau)) \right] < \varepsilon \right].$$

На основании рассмотрения свойств функционала

$$V\left[(\vec{u}(\cdot,\tau)) \right] = \int\limits_{X_0} \left[\rho_0 \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \right)^2 + \hat{P}_0^{\bullet} \cdot\cdot \vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0 \right] dV_0,$$

который играет ту же роль, что и функции Ляпунова для систем с сосредоточенными параметрами, в работах [3, 4] показано, что достаточным условием устойчивости решения $\vec{u} \equiv 0$ задачи (1), (2) по мерам (3), (4) при условии, что градиент базового решения не зависит от времени, является выполнение неравенства

$$W[\vec{u}] = \int\limits_{X_0} \hat{P}_0^{\bullet} \cdot\cdot \vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0 dV_0 \geq 0 \tag{5}$$

на возмущениях, удовлетворяющих условиям (2).

Принимаем, что в γ_0-конфигурации тело K является стержнем с переменным поперечным сечением $D(\xi^3)$, два характерных размера которого значительно меньше высоты. Положение точек оси тела характеризуем радиус-вектором $\vec{r}_{30} = \xi^3 \, \vec{э}_3^{\,0}$, где ξ^3 — осевая координата $(0 \leq \xi^3 \leq l)$, $\vec{э}_3^{\,0}$ — базисный орт в направлении этой оси. Положение произвольной точки определяем радиус-вектором $\vec{r}_0 = \vec{R}_0 + \vec{r}_{30}$, $\vec{R}_0 = \vec{R}_0(\xi^1, \xi^2) = \xi^\alpha \, \vec{э}_\alpha^{\,0}$, $(\alpha = 1, 2)$, $(\xi^1, \xi^2) \in D(\xi^3)$.

Представим возмущение вектора перемещения $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}_{30} + \vec{R}_0, \tau)$ в виде разложения по заданному базису тензорных функций $\{\hat{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0)\}$ следующим образом

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{N} \hat{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0) \overset{i-1}{\cdot} \hat{u}^{(i)}(\vec{r}_{30}, \tau). \tag{6}$$

Здесь верхнии индексы $(i-1)$ и (i) указывают на ранг тензорных функций, « $\overset{i-1}{\cdot}$ » обозначает $(i-1)$ - кратное внутреннее произведение тензоров. Как следует из формулы Тейлора для отображения одного нормированного пространства в другое, в качестве базиса можно выбрать, в частности, систему тензорных функций $\{\vec{R}_0^n\}$, где $\vec{R}_0^n$ — n-кратное внешнее произведением вектора $\vec{R}_0$ на себя, $\vec{R}_0^0 \equiv 1$.

Подставим (6) в (5). В результате получим

$$W[\vec{u}] = W_1\left[\left\{\hat{u}^{(i)}\right\}\right] = \int_0^l \sum_{m,n=1}^{N} \left[\hat{M}^{(m+n)} \overset{m+n}{\cdot} \hat{P}_3^{(n)} \otimes \frac{\partial \hat{u}^{(m)}}{\partial \xi^3} + \right.$$

$$\left. + \delta^{\alpha\beta} K_\alpha^{(m+n)} \overset{m+n}{\cdot} \hat{P}_\beta^{(n)} \otimes \hat{u}^{(m)} \right] d\xi^3 \geq 0, \quad (\alpha, \beta = 1, 2). \tag{7}$$

Здесь

$$\hat{M}^{(m+n)} = \int_{D(\xi^3)} \vec{\mathrm{Э}}_0^k \otimes \hat{\Phi}^{(m-1)} \otimes \vec{\mathrm{Э}}_k^0 \otimes \hat{\Phi}^{(n-1)} \, d\Sigma_0,$$

$$\hat{K}_\alpha^{(m+n)} = \int_{D(\xi^3)} \vec{\mathrm{Э}}_0^k \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(m-1)}}{\partial \xi^\alpha} \otimes \vec{\mathrm{Э}}_k^0 \otimes \hat{\Phi}^{(n-1)} \, d\Sigma_0, \tag{8}$$

$\hat{P}_j^{(n)}$ — коэффициенты разложения векторов $\hat{P}_j^{\bullet} = \vec{\mathrm{Э}}_j^0 \cdot \hat{P}_0$ по базису $\{\hat{\Phi}^{(n-1)}\}$; $\{\vec{\mathrm{Э}}_0^k\}$ — базис, биортогональный базису $\{\vec{\mathrm{Э}}_k^0\}$.

Принимаем, что в формуле (2) ∂X_1 — нижнее основание стержня $(\xi^3 = 0)$, ∂X_2 — его верхнее основание $(\xi^3 = l)$, ∂X_3 — боковая поверхность. Поскольку на нижнем и верхнем основаниях вектор $\vec{n}_0$ коллинеарен базисному орту $\vec{\mathrm{Э}}_3^0$, то граничным условиям (2) соответствуют следующие условия на коэффициенты $\hat{u}^{(i)}$ разложения возмущения вектора перемещения

$$\hat{u}^{(i)} \cdot \vec{\mathrm{Э}}_\alpha^0 \Big|_{\xi^3 = 0, l} = 0, \quad \hat{P}_3^{(i)} \cdot \vec{\mathrm{Э}}_3^0 \Big|_{\xi^3 = 0, l} = 0, \quad (\alpha = 1, 2). \tag{9}$$

Следовательно, для определения условий устойчивости стержня нужно найти те значения параметров нагружения, при которых выполняется неравенство $W_1\left[\left\{\hat{u}^{(i)}\right\}\right] \geq 0$ для всех наборов тензорных функций $\left\{\hat{u}^{(i)}\right\}$, удовлетворяющих граничным условиям (9).

Пусть стержень из стандартного материала второго порядка находится под воздействием осевой сжимающей нагрузки интенсивности N_0, равномерно распределённой по граничных поперечных сечениях. Боковую поверхность считаем свободной от силовых нагружений. Влиянием массовых сил пренебрегаем. Пусть область $D(\xi^3)$ имеет площадь $S(\xi^3)$, а моменты поперечного сечения первого порядка и центробежный момент равны нулю. Найдём значения параметра N_0, при которых стержень является устойчивым по мерам (3), (4).

В работах [6, 7] показано, что тензор $\hat{P}_0^{\bullet}$ для стандартного материала второго порядка имеет вид

$$\hat{P}_0^{\bullet} = \left(\hat{I} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0\right) \cdot \hat{T}(\vec{u}) + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot \hat{T}(\vec{u}_0) + \lambda \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 \cdot\cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \hat{I} +$$
$$+ \mu\left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0\right). \qquad (10)$$

Здесь $\hat{T}(\vec{u}_0)$ — тензор напряжений Коши; λ, μ — постоянные Ляме; $\hat{I}$ — единичный тензор.

За базовое выбираем решение соответствующей задачи, сформулированной в рамках статической линейной теории упругости [8] $\hat{T}(\vec{u}_0) = -QE\, \vec{э}_3^{\,0} \otimes \vec{э}_3^{\,0}$. Здесь $Q = N_0/(ES)$, E — модуль упругости. Для упрощения расчётов пренебрегаем деформацией базовой конфигурации, то есть вместо формулы (10) принимаем, что $\hat{P}_0^{\bullet} = \hat{T}(\vec{u}) + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot \hat{T}(\vec{u}_0)$.

В качестве базиса разложения возмущения вектора перемещения выберем $\{\vec{R}_0^n\}$ и ограничимся в формуле (6) двумя слагаемыми, то есть, принимаем, что $\vec{u} = \hat{u}^{(1)} + \vec{R}_0 \cdot \hat{u}^{(2)}$. Пусть $\hat{u}^{(1)} = u_k\, \vec{э}_0^{\,k}$, $\hat{u}^{(2)} = u_{\alpha k}\, \vec{э}_0^{\,\alpha} \otimes \vec{э}_0^{\,k}$. Для рассматриваемого случая неравенство (7) можно записать в виде

$$W_1 = \int_0^l S \left\{ \lambda \left(u_{11} + u_{22} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi^3} \right)^2 + \left(2\mu - \frac{N_0}{S} \right) \left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi^3} \right)^2 + 2\mu \left(u_{11}^2 + u_{22}^2 \right) + \right.$$
$$+ \mu \left(u_{12} + u_{21} \right)^2 + \sum_{\alpha=1}^{2} \left[\mu \left(u_{\alpha 3} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^3} \right)^2 - \frac{N_0}{S} u_{\alpha 3}^2 + \right.$$
$$\left. \left. + \frac{J^{\alpha\alpha}}{S} \left(\lambda + 2\mu - \frac{N_0}{S} \right) \left(\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3} \right)^2 \right] + \frac{\mu}{S} \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} J^{\alpha\alpha} \left(\frac{\partial u_{\alpha\beta}}{\partial \xi^3} \right)^2 \right\} d\xi^3 \ge 0 . \qquad (11)$$

Здесь $J^{\alpha\alpha} = \iint\limits_{D(\xi^3)} \left(\xi^\alpha\right)^2 d\xi^1 d\xi^2$ — моменты инерции поперечного сечения стержня.

Функционал (11) оценим снизу

$$W_1 \geq W_2 = \int_0^l S \sum_{\alpha=1}^{2} \left[\mu \left(u_{\alpha 3} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^3} \right)^2 - \frac{N_0}{S} u_{\alpha 3}^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{J^{\alpha\alpha}}{S} \left(\lambda + 2\mu - \frac{N_0}{S} \right) \left(\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3} \right)^2 \right] d\xi^3 \geq 0 . \tag{12}$$

Для любого $\alpha = 1, 2$ из неравенства (12) получаем

$$W_3 = \int_0^l S \left[\mu \left(u_{\alpha 3} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^3} \right)^2 - \frac{N_0}{S} u_{\alpha 3}^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{J^{\alpha\alpha}}{S} \left(\lambda + 2\mu - \frac{N_0}{S} \right) \left(\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3} \right)^2 \right] d\xi^3 \geq 0 . \tag{13}$$

Из последнего неравенства находим оценку параметра силового нагружения

$$N_0 \leq \frac{\displaystyle\int_0^l \left[\mu S \left(u_{\alpha 3} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^3} \right)^2 + (\lambda + 2\mu) J^{\alpha\alpha} \left(\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3} \right)^2 \right] d\xi^3}{\displaystyle\int_0^l \left[u_{\alpha 3}^2 + \frac{J^{\alpha\alpha}}{S} \left(\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3} \right)^2 \right] d\xi^3} . \tag{14}$$

Из соотношений (9) следуют граничные условия на функции u_α, $u_{\alpha 3}$

$$u_\alpha \big|_{\xi^3 = 0, l} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3} \right|_{\xi^3 = 0, l} = 0 . \tag{15}$$

Очевидно, что критическое значение параметра нагружения $N_0^{\text{кр.}}$ при фиксированной площади поперечного сечения определяется как минимум функционала, находящегося в правой части формулы (14), при выполнении граничных условий (15). Правая часть неравенства (14) принимает наименьшее значение при $u_{\alpha 3} = -\dfrac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^3}$. В дальнейшем полагаем, что $u_\alpha = y$, $J^{\alpha\alpha} = J$, $\xi^3 = x$. Итак, $N_0^{\text{кр.}} = \min\limits_y J_0$, где

$$J_0 = \frac{\int\limits_0^l (\lambda + 2\mu)\, J\left(y''\right)^2 dx}{\int\limits_0^l \left[\left(y'\right)^2 + \frac{J}{S}\left(y''\right)^2\right] dx}, \tag{16}$$

при граничных условиях

$$y\big|_{x=0,l} = 0, \quad y''\big|_{x=0,l} = 0\,. \tag{17}$$

Функционал (16) является инвариантным относительно замен вида $y(x) = k\, z(x)$, где k — произвольная постоянная. Поэтому принимаем, что

$$\int\limits_0^l \left[\left(y'\right)^2 + \frac{J}{S}\left(y''\right)^2\right] dx = 1\,. \tag{18}$$

Отметим, что в соотношениях (16)-(18) и далее для упрощения записей штрихами обозначены производные по x.

Далее форму поперечного сечения стержня будем полагать выбранной, а также принимаем, что момент инерции J и площадь поперечного сечения S связаны степенной зависимостью [1, 2, 11, 13]

$$J = a_k S^k\,. \tag{19}$$

В формуле (19) суммирование по индексу k отсутствует, a_k — постоянная при каждом $k = 1, 2, 3$.

Сформулируем задачу оптимизации в следующей форме: среди непрерывно дифференцируемых функций $y = y\,(x)$, имеющих кусочно-непрерывную вторую производную, и непрерывных функций $S = S\,(x)$, удовлетворяющих условиям (17) и соотношениям (18), (19), а также ограничениям

$$\int\limits_0^l S(x)\, dx = V^*, \tag{20}$$

найти те, которые реализуют $\max\limits_S \min\limits_y \Pi\left[y, S\right]$, где

$$\Pi\left[y, S\right] = \int\limits_0^l (\lambda + 2\mu)\, J\left(y''\right)^2 dx\,, \tag{21}$$

V^* — заданный объем тела.

2. Решение задачи оптимизации

Задачу оптимизации будем решать последовательно, то есть, сначала исследуем функционал (21) на минимум по переменной y при соответствующих ограничениях, а затем находим максимум по переменной S. Составим функционал Лагранжа

$$\Pi^* = \int_0^l \left\{ (\lambda + 2\mu) J \left(y'' \right)^2 - \lambda_1 \left[\left(y' \right)^2 + \frac{J}{S} \left(y'' \right)^2 \right] + \lambda_2 S \right\} dx , \tag{22}$$

где λ_1, λ_2 — множители Лагранжа. Из необходимого условия минимума функционала (22) по переменной y получим следующее уравнение

$$\left[\left((\lambda + 2\mu) J - \lambda_1 \frac{J}{S} \right) y'' \right]'' + \lambda_1 y'' = 0 . \tag{23}$$

Если дважды проинтегрировать уравнение (23), учитывая граничные условия (17) и соотношения (19), то будем иметь

$$a_k S^{k-1} \left[(\lambda + 2\mu) S - \lambda_1 \right] y'' + \lambda_1 y = 0 . \tag{24}$$

Введём новую функцию $f(x)$, связанную с функцией $S(x)$ соотношением

$$S(x) = \frac{\lambda_1 (f(x) + a_k)}{a_k (\lambda + 2\mu)} . \tag{25}$$

Подставим (25) в (24). Тогда

$$B_{1k} f (f + a_k)^{k-1} y'' + y = 0, \quad B_{1k} = \left[\frac{\lambda_1}{a_k (\lambda + 2\mu)} \right]^{k-1} . \tag{26}$$

Если учесть соотношения (18), (19), (25), (26), то функционал Π^* можно записать в виде

$$\Pi^* = \lambda_1 \int_0^l \left[\frac{y^2}{B_{1k} f (f + a_k)^{k-1}} - \left(y' \right)^2 + \frac{\lambda_2 (f + a_k)}{a_k (\lambda + 2\mu)} \right] dx . \tag{27}$$

Из необходимого условия экстремума функционала (27) по переменной f получим

$$y^2 = B_{2k} \frac{f^2 (f + a_k)^k}{a_k + kf}, \quad B_{2k} = \frac{\lambda_2 B_{1k}}{a_k (\lambda + 2\mu)} . \tag{28}$$

Подставим y, найденное из формулы (28), в уравнение (26). В результате получим дифференциальное уравнение для определения функции $f = f(x)$

$$B_{1k}(f+a_k)^{k-1}\left\{\frac{a_k^2+a_k(k+1)f+\frac{k}{2}(k+1)f^2}{(a_k+f)(a_k+kf)}f''+\right.$$

$$\left.+\frac{k(k-1)f\left[6a_k^2+4(k+1)a_kf+k(k+1)f^2\right]}{4\left[(a_k+kf)(a_k+f)\right]^2}\left(f'\right)^2\right\}+1=0. \qquad (29)$$

Заметим, что в уравнение (29) переменная x явно не входит. Это даёт возможность проинтегрировать данное нелинейное дифференциальное уравнение. Проиллюстрируем эту возможность для конкретных значений k.

При $k = 1$ уравнение (29) имеет вид

$$f''+1=0. \qquad (30)$$

Из формул (28) и (17) для функции f получаем граничные условия

$$f(0)=f(l)=0. \qquad (31)$$

Решением уравнения (30), удовлетворяющим условиям (31), является функция

$$f(x)=-\frac{x^2}{2}+\frac{l}{2}x.$$

Учитывая соотношения (25) и (20), получаем

$$S(x)=\frac{6V^*(-x^2+lx+2a_1)}{l^3+12a_1l}. \qquad (32)$$

Из формул (28) при $k = 1$ и интегрального ограничения (18) находим функцию $y(x)$

$$y(x)=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{l^3+12a_1l}}(-x^2+lx). \qquad (33)$$

Оптимальное значение $N_0^{\text{опт.}}$ критического нагружения найдём из функционала (21), подставив функции (32), (33) и интегрируя полученное соотношение. Придем к следующей формуле оптимального значения

$$N_0^{\text{опт.}}=\frac{12a_1(\lambda+2\mu)V^*}{l^3\left(1+\dfrac{12a_1}{l^2}\right)}.$$

Критическое значение параметра нагружения $N_0^{\text{кр.}}$ при постоянной площади поперечного сечения стержня найдено в работе [3]

$$N_0^{\text{кр.}} = \frac{(\lambda + 2\mu)J\pi^2}{l^2\left(1 + \frac{\pi^2 J}{l^2 S}\right)}. \tag{34}$$

Легко проверить, что

$$\frac{N_0^{\text{опт.}}}{N_0^{\text{кр.}}} = \frac{12\left(1 + \frac{\pi^2 a_1}{l^2}\right)}{\pi^2\left(1 + \frac{12 a_1}{l^2}\right)} \approx 1{,}216.$$

Следовательно, за счет оптимального выбора формы поперечного сечения можно на 21,6 % повысить критическое значение параметра нагружения по сравнению с цилиндрическим телом постоянного поперечного сечения такого же объёма и высоты.

Если в уравнении (29) принять $k = 2$, то будем иметь

$$(a_2 + 2f)(a_2^2 + 3a_2 f + 3f^2)f'' + 3f(a_2 + f)\left(f'\right)^2 + \frac{(a_2 + 2f)^2}{B_{12}} = 0. \tag{35}$$

Перейдём к новой неизвестной функции $v(f) = f'$. Тогда $f'' = \frac{dv}{df} f' = v'v$ и уравнение (35) принимает вид

$$(a_2 + 2f)(a_2^2 + 3a_2 f + 3f^2)vv' + 3f(a_2 + f)v^2 + \frac{(a_2 + 2f)^2}{B_{12}} = 0. \tag{36}$$

Пусть теперь $v^2 = z(f)$. Отсюда имеем $2vv' = z'$. В результате уравнение (36) можно переписать в следующей форме

$$(a_2 + 2f)(a_2^2 + 3a_2 f + 3f^2)z' + 6f(a_2 + f)z + \frac{2(a_2 + 2f)^2}{B_{12}} = 0.$$

Решением этого линейного неоднородного уравнения является функция

$$z = \frac{(a_2 + 2f)^2}{(3f^2 + 3a_2 f + a_2^2)^2}\left[\frac{-12f^2 + (8C_1B_{12} - 6a_2)f + 4C_1B_{12}a_2 + a_2^2}{4B_{12}}\right],$$

где C_1 — постоянная интегрирования.

Возвращаясь к функции $f(x)$, для её нахождения получаем дифференциальные уравнения

$$\pm\frac{\sqrt{3B_{12}}\left[\left(f+\frac{a_2}{2}\right)^2+\frac{a_2^2}{12}\right]df}{\left(f+\frac{a_2}{2}\right)\sqrt{-4\left(f+\frac{a_2}{2}\right)^2+8C\left(f+\frac{a_2}{2}\right)+\frac{a_2^2}{3}}}=dx\,, \tag{37}$$

где $4C = a_2 + 4C_1\, B_{12}/3$. В результате интегрирования уравнений (37) получаем два семейства решений

$$\mp\left[\sqrt{-3(2f+a_2)^2+12C(2f+a_2)+a_2^2}+2C\sqrt{3}\arccos\frac{\sqrt{3}(2f+a_2-2C)}{\sqrt{12C^2+a_2^2}}+\right.$$

$$\left.+a_2\ln\left|\frac{a_2^2+6C(2f+a_2)+a_2\sqrt{-3(2f+a_2)^2+12C(2f+a_2)+a_2^2}}{2f+a_2}\right|\right]=$$

$$=\frac{4x}{\sqrt{B_{12}}}+C_{\mp}\,, \tag{38}$$

которые определяют *f* как неявно заданную функцию переменной *x*. Здесь $C_{\mp}$ — постоянные интегрирования. Из формулы (37) следует, что одно из этих семейств определяет *f* как монотонно возрастающую функцию (знак «–» в формуле (38)), а другое — как монотонно убывающую функцию (знак «+» в формуле (38)) на отрезке [0, *l*]. Поэтому на каждом из этих семейств удовлетворить граничные условия (31) невозможно. Следовательно, для построения оптимального проекта необходимо использовать оба семейства. Обозначим выражение в квадратных скобках левой части формулы (38) через *F* (*f,* C*)*. Тогда на отрезке [0, *l*] должна существовать такая точка x_0, что оптимальный проект будет иметь вид

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\in[0,x_0],\\ f_2(x), & x\in[x_0,l],\end{cases} \tag{39}$$

где f_1 и f_2 — функции, определяемые уравнениями

$$-F(f_1,C)=\frac{4x}{\sqrt{B_{12}}}+C_-,\quad x\in[0,x_0]\,, \tag{40}$$

$$F(f_2,C)=\frac{4x}{\sqrt{B_{12}}}+C_+,\quad x\in[x_0,l]\,. \tag{41}$$

Запишем уравнения для определения постоянных интегрирования C_+, C_-,

C; множителей Лагранжа λ_1, λ_2 и точки x_0.

Если в (40) принять $x = 0$, а в (41) — $x = l$, и учесть граничные условия (31), то получим два соотношения

$$-\sqrt{12Ca_2 - 2a_2^2} - 2C\sqrt{3}\arccos\frac{\sqrt{3}(a_2 - 2C)}{\sqrt{12C^2 + a_2^2}} -$$

$$-a_2 \ln\left| a_2 + 6C + \sqrt{12Ca_2 - 2a_2^2} \right| = C_-, \tag{42}$$

$$C_+ = -C_- - \frac{4l}{\sqrt{B_{12}}}. \tag{43}$$

Положим в уравнениях (40), (41) $x = x_0$, учтем формулу (43), а также то, что из условия непрерывности f в точке $x = x_0$ следует равенство $f_1(x_0) = f_2(x_0) = f(x_0)$. В результате будем иметь

$$-F(f(x_0), C) = \frac{4x_0}{\sqrt{B_{12}}} + C_-, \quad F(f(x_0), C) = \frac{4x_0}{\sqrt{B_{12}}} - C_- - \frac{4l}{\sqrt{B_{12}}}.$$

Сложив эти равенства, из полученного уравнения находим, что $x_0 = l/2$.

Поскольку функция f_1 является монотонно возрастающей на [0, l/2], а f_2 — монотонно убывающей на [l/2, l], то функция f в точке l/2 достигает максимума. Следовательно, если существует производная функции f в точке l/2, то она равна нулю. Существование и даже непрерывность производной функции f в точке l/2 следует из непрерывной дифференцированности функции y на интервале (0, l) и необходимого условия оптимальности (28). Из условия $f'(l/2) = 0$ и возрастания f на [0, l/2] находим

$$2f(l/2) + a_2 = 2C + \sqrt{4C^2 + a_2^2/3}. \tag{44}$$

Если теперь в (40) или (41) принять $x = l/2$ и учесть (44), то найдём

$$C_- = -\frac{2l}{\sqrt{B_{12}}} - a_2 \ln\sqrt{36C^2 + 3a_2^2}. \tag{45}$$

Подставим (45) в (42). В результате получим первое из искомых уравнений

$$\sqrt{12Ca_2 - 2a_2^2} + 2C\sqrt{3}\arccos\frac{\sqrt{3}(a_2 - 2C)}{\sqrt{12C^2 + a_2^2}} +$$

$$+a_2 \ln\left|\frac{a_2+6C+\sqrt{12Ca_2-2a_2^2}}{\sqrt{36C^2+3a_2^2}}\right| = \frac{2l}{\sqrt{B_{12}}}. \tag{46}$$

Из построения функции f следует, что $f(x)=f(l-x)$. Поэтому проведем параметризацию функции f только на отрезке $[0, l/2]$. Положим

$$f = C-\frac{a_2}{2}+\frac{\sqrt{12C^2+a_2^2}}{2\sqrt{3}}\cos t. \tag{47}$$

Тогда из соотношений (38) имеем

$$x = -\frac{\sqrt{B_{12}}}{4}\left[C_- + \sqrt{12C^2+a_2^2}\,\sin t + 2C\sqrt{3}t + \right.$$

$$\left. +a_2 \ln\left|\frac{3\sqrt{12C^2+a_2^2}\left(2C\sin t-\frac{a_2}{\sqrt{3}}\cos t\right)}{\sqrt{12C^2+a_2^2}\,\sin t - a_2}\right|\right]. \tag{48}$$

Из формул (44) и (47) следует, что $t=0$ при $x=l/2$. Из условия $f(0)=0$ и формулы (47) следует, что $t=\arccos\frac{\sqrt{3}(a_2-2C)}{\sqrt{12C^2+a_2^2}}=t_1$ при $x=0$. Следовательно, формулы (47), (48) определяют параметрически заданную функцию f переменной x. Параметр t при этом изменяется на отрезке $[0, t_1]$. Используя формулы (25), (28), (47), можно записать параметрические представления функций S и y на отрезке $[0, l/2]$

$$S = B_{12}\left(C+\frac{a_2}{2}+\frac{\sqrt{12C^2+a_2^2}}{2\sqrt{3}}\cos t\right), \quad t\in[0,t_1], \tag{49}$$

$$y=\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}B_{12}\frac{c^2-\frac{a_2^2}{4}+\frac{C\sqrt{12C^2+a_2^2}}{\sqrt{3}}\cos t+\frac{12C^2+a_2^2}{12}\cos^2 t}{\left(2C+\frac{12C^2+a_2^2}{\sqrt{3}}\cos t\right)^{1/2}}, \; t\in[0,t_1]. \tag{50}$$

При этом x определяется формулой (48). Если использовать параметрическое задание функций S и y посредством (48), (49), (50), то изопериметрические условия (18), (20) после интегрирования и соответствующих преобразований можно привести к виду

$$\frac{\lambda_2 B_{12}^{3/2}}{16\lambda_1}\left[\sqrt{3}(3a_2^2+8Ca_2+12C^2)\arccos\frac{\sqrt{3}(a_2-2C)}{\sqrt{12C^2+a_2^2}}+\right.$$

$$\left.+(7a_2+6C)\sqrt{12a_2C-2a_2^2}+4(a_2^2-3a_2C)\ln\left|\frac{a_2+6C+\sqrt{12Ca_2-2a_2^2}}{\sqrt{36C^2+3a_2^2}}\right|\right]=1\text{ ,}\tag{51}$$

$$\frac{B_{12}^{3/2}}{8}\left[\sqrt{3}(a_2^2+4Ca_2+12C^2)\arccos\frac{\sqrt{3}(a_2-2C)}{\sqrt{12C^2+a_2^2}}+3(a_2+2C)\sqrt{12a_2C-2a_2^2}+\right.$$

$$\left.+2a_2^2\ln\left|\frac{a_2+6C+\sqrt{12Ca_2-2a_2^2}}{\sqrt{36C^2+3a_2^2}}\right|\right]=V^*.\tag{52}$$

Из функционала (21) получим формулу для оптимального значения $N_0^{\text{опт.}}$ силового нагружения

$$N_0^{\text{опт.}}=\frac{a_2(\lambda+2\mu)B_{12}^{5/2}\lambda_2}{16\lambda_1}\left[\sqrt{3}(3a_2^2+8Ca_2+12C^2)\arccos\frac{\sqrt{3}(a_2-2C)}{\sqrt{12C^2+a_2^2}}+\right.$$

$$\left.+(7a_2+6C)\sqrt{12a_2C-2a_2^2}+4(a_2^2-3a_2C)\ln\left|\frac{a_2+6C+\sqrt{12Ca_2-2a_2^2}}{\sqrt{36C^2+3a_2^2}}\right|\right].\tag{53}$$

Подставим (51) в (53). В результате получим

$$N_0^{\text{опт.}}=a_2(\lambda+2\mu)B_{12}\,.\tag{54}$$

Уравнения (46), (52) следует рассматривать как исходные для определения неизвестных C и $\sqrt{B_{12}}$ при заданных геометрических характеристиках l и V^*. Заметим, что $a_2=1/4\pi$. Подставляя найденные из этих уравнений указанные неизвестные в формулы (48), (49), получим параметрическое представление оптимальной площади поперечного сечения, а из соотношения (54) — численное значение $N_0^{\text{опт.}}$.

Числовые расчеты проводились на ПК для $l = 10, 20, \ldots, 100$, $V^*=\pi\, l$. При этом определялись величины: C, $\sqrt{B_{12}}$, λ_2/λ_1, $k=N_0^{\text{опт.}}/N_0^{\text{кр.}}$. Значения $N_0^{\text{кр.}}$ находились из формулы (34). Приведем некоторые полученные данные:

при $l = 20$: $C = 6{,}476804$, $\sqrt{B_{12}}=0{,}567491$, $k = 1{,}3306$;

при $l = 60$: $C = 58{,}079285$, $\sqrt{B_{12}}=0{,}189854$, $k = 1{,}3330$;

при $l = 100$: $C = 161{,}284196$, $\sqrt{B_{12}} = 0{,}113946$, $k = 1{,}3332$.

Расчеты показали, что за счет выбора оптимальной формы можно на 33 % повысить критическое значение параметра нагружения по сравнению со стержнем постоянного поперечного сечения при тех же значениях высоты и объёма.

Литература

[1] *Баничук Н. В.* Введение в оптимизацию конструкций. — М.: Наука, 1986. — 302 с.
[2] *Баничук Н. В.* Оптимизация форм упругих тел. — М.: Наука, 1980. — 255 с.
[3] *Бурак Я. И., Доманский П. П., Ардан Р. В.* Устойчивость по двум мерам сжатых осевыми силами упругих цилиндрических тел // Прикладная механика. — 2000. — Т. 36, № 8. — С. 79-86.
[4] *Доманський П. П.* Дослідження стійкості руху за двома мірами пружних циліндричних тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1998. — Т. 41, № 3. — С. 29-36.
[5] *Доманський П. П.* Метод розкладу за тензорними функціями в побудові рівнянь стійкості руху пружних циліндричних тіл // Доп. НАН України. — 1997. — № 6. — С. 53-59.
[6] *Доманський П. П.* Про умови стійкості руху за двома мірами пружних тіл в лінеаризованому формулюванні задачі // Вісник Львівського ун-ту. Сер. мех.-матем. — 1998. — Вип. 51. — С. 42-54.
[7] *Доманський П. П.* Рівняння стійкості руху циліндричних тіл із матеріалу Мурнагана // Вісник Львівського ун-ту. Сер. мех.-матем. — 1999. — Вип. 54. — С. 51-63.
[8] *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. — М.: Наука, 1980. — 512 с.
[9] *Мовчан А. А.* Устойчивость процессов по двум метрикам // Прикл. мат. и мех. — 1960. — Т. 29. — С. 3-20.
[10] *Николаи Е. Л.* Задача Лагранжа о наивыгоднейшем очертании колонн // Изв. Петерб. политех. ин-та. — 1907. — Т. 8, вып. 1. — С. 255-288.
[11] *Ольхофф Н.* Оптимальное проектирование конструкций. — М.: Мир, 1981. — 277 с.
[12] *Сиразетдинов Т. К.* Устойчивость систем с распределёнными параметрами. — Новосибирск: Наука, 1987. — 153 с.
[13] *Троицкий В. А., Петухов Л. В.* Оптимизация формы упругих тел. — М.: Наука, 1982. — 432 с.
[14] *Clausen T.* Uber die form architektonischer Säulen // Bull. St.-Petersbourg, Acad. Sci. Phys.-Math. Cl. — 1851. — Vol. 9. — P. 369-380.
[15] *Lagrange J.-L.* Sur la figure des colonnes // In: Ouvres de Lagrange (Publ. de M. J.-A.: Serret). — Vol. 2. — Paris: Gauthier-Villars, 1868. — P. 125-170.
[16] *Tadibakhsh I., Keller J. B.* Strongest columns and isoperimetric inequalities for eigenvalues. // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. — 1962. — Vol. 29, № 1. — P. 159-164.

Оптимізація за двома мірами форми пружних тіл у задачах стійкості

Петро Доманський

Запропоновано постановку і методику розв'язування задачі оптимізації критичних значень параметрів стійкості пружних тіл за двома мірами шляхом належного вибору форми. Для дослідження стійкості використовують аналог прямого методу Ляпунова для систем із розподіленими параметрами. Отримані результати застосовуються для вивчення стій-

кості стержнів змінного поперечного перерізу, навантажених осьовими силами стиску. Задачу оптимізації зведено до пошуку максимуму за параметрами форми поперечного перерізу від мінімуму за фазовими змінними деякого неадитивного функціоналу. Розв'язування цієї задачі здійснюють методами варіаційного числення. Знайдено оптимальні форми для випадку шарнірного опирання кінців стержня. Показано, що вибором форми стержня можна істотно підвищити критичні значення осьового навантаження.

Two-Measure Optimization of the Elastic Body Form in Stiffness Problems

Petro Domans'kyj

A two-measure formulation and solution method for problems of elastic bodies geometry optimization with respect to their stiffness are suggested. The analogue of the Lyapunov direct method for systems with distributed parameters is applied. The obtained results are illustrated on on rods with varying cross sections which are affected by axial compressing forces. The optimization problem is reduced to a minimax problem for some non-additive functional. To solve this problem the variational calculus methods are applied. Optimal geometry for the pin-ended rod is obtained. It is shown that the critical loading can be substantially increased choosing the optimal rod cross-section geometry.

Отримано 25.07.05