відповідному повідомленні.

Перша і друга особливість не потребують коментарів. Третя особливість пов'язана з технічними аспектами її використання. Семантична надмірність використовується в тому випадку, коли W_i, по визначенню, може спотворюватися перш ніж буде отримана адресатом. Тому, від природи механізмів спотворення залежить той, чи інший метод синтезу семантично надмірного W_i. Наприклад, коли спотворення можуть носити в межах тексту W_i випадковий характер, то семантична надмірність повинна формуватись таким чином, щоб такі спотворення можна було елімінувати. З викладеного видно, що параметр χ є досить важливим для SS і залежить від багатьох факторів, що пов'язані з методами формування W_i та окремими технічними параметрами SS.

1. *Cox J., Miller M.L., Bloom J.A*. Digital watermarking. Morgan Kaufman Publizhers, 2002.
2. *Быков С.Ф.* Алгоритмы сжатия JPEG с позиций компьютерной стеганографии.// Защита информации. Конфидент. 2000, N3.
3. *Mlodkowski J.* Aktywnosc wizualna czlowieka. PWN, Warszawa, 2000.
4. *Вольф Е.М*. Функциональная семантика оценки. М.:URSS, 2006.

Поступила 15.01.2009р.

УДК 683.03

Б.В.Дурняк, Т.Равецки

МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОГО И НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЕМ

Управление предприятием в условиях отсутствия централизованного управления промышленностью и системой хозяйствования обуславливает необходимость в каждом отдельном предприятии решать задачи управления, с учетом особенностей соответствующих предприятий, условий рынка и рыночных отношений между субъектами предпринимательской деятельности.

В процессе функционирования фирмы, возникает целый ряд задач связанных с оптимизацией соответствующих производственных процессов. С формальной точки зрения, каждый процесс функционирования может быть описан в виде некоторой математической модели. В большинстве случаев, описание такого процесса в виде модели требует определенных допущений и ограничений. Такие ограничения представляются приемлемыми, если факторы, которые не укладываются в рамки той или иной модели не влияют существенно на желаемый результат. Примером такого желаемого результата может служить получение максимальной прибыли от производства продуктов различных ассортиментов или сокращение времени на перевозку грузов, которые в рамках решения задачи предполагается минимизировать и т. д. С формальной точки зрения, можно утверждать, что если множество допустимых решений представляет собой выпуклый многоугольник, а критерии оптимальности представляют собой скалярную функцию, которая принимается в качестве целевой функции, то в этом случае можно говорить о возможности решения задачи оптимизации методами линейного программирования. С точки зрения пользователя, которого принято называть лицом принимающим решение (LPR) , задача линейного программирования является детерминированной параметрической задачей, а процесс использования решений этой задачи является одношаговым. В большинстве случаев, задачи решаемые методами линейного программирования, являются задачами распределенного типа. Например, пусть некоторая система характеризуется наличием n видов производственной деятельности. Эти виды производственной деятельности обеспечиваются ресурсами, которые идентифицируются номерами $i = 1,...,m$. Объем потребления ресурса i ограничен величиной b_i , а величина его затрат на единицу продукции k -того вида равна a_{ik} . Каждый продукт или его единица характеризуется величиной удельной прибыли c_k . В этом случае, можно определить необходимый объем x_k каждого вида продукции, которые обеспечивают максимальную прибыль производства в целом. При этом, должны быть учтены все ограничения на используемые ресурсы. Такая задача в формальном виде описывается следующим образом:

$$\{[\sum_{i=1}^{n} c_k x_k \to \max];[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \le b_i; i = 1,...,m];[x_k \ge 0; k = 1,...,n] .$$

Для того, чтобы можно было воспользоваться такой моделью, соотношения между компонентами такой задачи должны удовлетворять условиям пропорциональности, аддитивности, не отрицательности. Пропорциональность для этой модели означает, что затраты ресурсов, вклад вида производства в суммарный доход должны быть прямо пропорциональны объему производства. Аддитивность указывает на то, что общий объем ресурсов, необходимых для производства, равен сумме затрат ресурсов, которые необходимы всему производству, а общий доход от производства всех видов товаров равный сумме доходов от каждого вида товаров. Не отрицательность означает, что объем производства не может быть отрицательным, что имеет естественную интерпретацию в реальных условиях функционирования предприятия. Математические модели линейного программирования достаточно широко исследованы и столь же широко используются для управления предприятиями, если условия их функционирования допускают выполнение приведенных выше ограничений [1,2].

Существует несколько методов решения задачи линейного программирования. Наиболее популярным методом является симплекс метод, который представляет собой итерационную процедуру. Алгоритм симплекс метода может быть представлен в содержательной форме в виде следующей последовательности действий.

1. Выбираем m переменных, задающих допустимое пробное решение. Исключаем эти переменные из целевой функции.
2. Проверяем, нельзя ли за счет одной из переменных, приравненной к нулю, улучшить значение целевой функции, придавая ей отличные от нуля, положительные значения. Если это возможно, то переходим к пункту 3. Если это не возможно, то прекращаем выполнение алгоритма.
3. Находим предельные значения переменной, за счет которой можно улучшить значения целевой функции. Увеличение значения этой переменной допустимо до тех пор, пока одна из m переменных, вошедших в пробное решение, не обратится в нуль. Исключим из целевой функции эту переменную и введем в пробное решение ту переменную, за счет которой результат может быть улучшен.
4. Разрешим систему m уравнений относительно переменных, вошедших в новое пробное решение. Исключим эти переменные из целевой функции и вернемся к пункту 2.

Лицу принимающему решение необходимо знать, как повлияют на оптимальное решение изменения спроса на выпускаемую продукцию. Определение зависимости оптимального решения от параметров целевой функции представляет собой анализ чувствительности математической модели. Ограничение, которое записывается в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \le b_i ; i = 1,...,m , \tag{1}$$

называется активным. Если в этом соотношении знак неравенства заменить на знак равенства, то это ограничение называется пассивным. Ресурс, который описывается соответствующими соотношениями, называется дефицитом во втором случае и не дефицитом – в первом случае. Анализ на чувствительность состоит в следующем. Определяется предельно допустимое увеличение запаса дефицитного ресурса, которое позволяет получить новое оптимальное решение в смысле значения целевой функции, являющееся более предпочтительным, чем предыдущее. Также, по соотношению (1) определяется предельно допустимое снижение запаса недефицитного ресурса, которое не изменяет найденное выше оптимальное решение. Определение влияния процесса сокращения дефицитного ресурса на оптимальное решение часто используется на практике, если возможна недопоставка дефицитного ресурса.

Приведенный выше алгоритм решения задачи линейного программирования обладает определенной интерпретацией. Интерпретация первого шага касается целевой функции. Каждый коэффициент целевой функции, если он положительный, означает приращение величины цели, при увеличении на единицу соответствующей переменной. На втором шаге реализуется симплекс критерий 1, который определяет, как нужно выбирать очередную переменную x_i, для ее включения в состав базисных переменных. Если в функции цели имеются не базисные переменные, коэффициенты при которых отрицательные, следует выбирать переменную с наибольшим абсолютным значением коэффициента, поскольку она приведет к наибольшему удельному приращению значений целевой функции. При этом, функция цели представляется как разница между максимальным значением функции цели x_0 и самой функцией цели. При этом, если все небазисные функции цели положительные или равны нулю, то оптимальное решение получено.

На третьем шаге рассматривается отношение чисел с правой стороны b_i, при условии замены неравенства на равенство, к коэффициентам новой небазисной переменной x_j. Выбирается отношение с наименьшим значением и в очередном пробном решении x_j приравниваются именно этому решению. Приведенное описание определяет симплекс критерий 2.

В результате использования в п. 3 симплекс - критерия 2 становится ясно, какую переменную в пробном решении необходимо положить равной нулю. Для этого выбирается наименьшее из всех отношений правых частей соотношения (1.1) к соответствующим коэффициентам при x_j.

На четвертом шаге, в соответствии с результатом полученным на третьем шаге, реализуется процедура замены опорного плана. Эта процедура соответствует процедуре исключения переменной из системы линейных уравнений (1.1). Содержательная интерпретация действий выполняемых в этом пункте может быть описана следующим образом. Прибыль для нового пробного решения равна прибыли при предыдущем пробном базисе плюс значение новой базисной переменной умноженной на удельный вклад новой базисной переменной в приращении прибыли.

После завершения текущей итерации, необходимо вернуться к п. 2 с тем, чтобы определить является ли полученное решение оптимальным. Если оптимум не достигнут, то необходимо в соответствии с симплекс алгоритмом перейти к следующей итерации.

Модели нелинейного программирования и соответствующие задачи, которые решаются этими моделями, встречаются значительно чаще, при решении проблем управления предприятием. Это обуславливается следующими факторами:

- большинство ситуаций управления в реальной действительности являются нелинейными или такими, которые в линейной форме можно представить при определенных ограничениях,

- чем больше факторов и обстоятельств необходимо учитывать в задачах управления, тем в большей степени нелинейности становятся существенными для получения адекватного решения по управлению предприятием,

- окружающая действительность, которая влияет на функционирование предприятия, в своем большинстве является нелинейной.

В общем случае, задачу нелинейного программирования можно записать в следующем виде:

$$\{[c(x_1,...,x_n) \to \max];[a_i(x_1,...,x_n) \le 0];[i=1,...,n];[x_i \ge 0]\} ,$$

где $c(x_1,...,x_n)$ и $a_i(x_1,...,x_n)$ - нелинейные регулярные функции n действительных переменных. В большинстве случаев нелинейности, которые необходимо учитывать, обуславливаются различными причинами, примерами которых могут служить:

- эмпирически наблюдаемые соотношения, такие как непропорциональное изменение затрат, непропорциональное изменение объема выхода продукции и показателей ее качества,

- структурно полученные соотношения, к которым относятся постулируемые физические явления, выведенные математически или установленные руководством зависимости или правила принятия частных решений и т.д.

Практические задачи, в которых возникают нелинейности и которые необходимо решать с помощью нелинейных методов программирования, встречаются в самых различных случаях управления производством и управления предприятием в целом. Примерами таких задач на уровне их интерпретации могут служить следующие задачи.

В модели приготовления бензина из отдельных фракций, полученных в результате перегона нефти, имеется нелинейное ограничение на октановое число смеси.

Спрос на продукцию компании может существенно зависеть от цен ее реализации. Например, пусть $x(p)$ объем реализации продукции зависящий от цены p. Тогда, выручка от реализации продукции равна $px(p)$. Пусть на некотором временном интервале реализации продукции функция объема реализации от цены имеет вид $x(p)=ap+b$. Тогда слагаемые целевой функции, относящиеся к выручке, являются квадратичными относительно управляющей переменной p и имеют следующий вид ap^2+bp .

В моделях общефирменного планирования длительность отрезков планового периода редко составляет менее квартала и часто превышает год. В таких случаях предусматривается наличие страховых запасов, которые выполняют роль буферов колебаний объемов реализации в более короткие периоды. Например, пусть c - максимально возможный недельный объем производства, s - прогнозируемый объем реализации соответствующего продукта, ns - уровень страхового запаса продукта, n - число недель, которое зависит от коэффициента использования производственных средств s/c. Например, если руководство приняло формулу расчета количества недель на которое необходимо формировать страховой запас в виде соотношения:

$$n = m + (f)(s/c),$$

Тогда уровень страхового запаса представляет собой квадратичную функцию прогнозированного среднего за неделю уровня реализации, которая имеет вид: $ms + (f/x)s^2$.

Во многих случаях коэффициенты модели математического программирования рассматриваются как случайные величины.

Целый ряд организаций занимающихся финансовой деятельностью встречаются с задачей определения наилучшего набора акций, облигаций и других ценных бумаг на выделенную сумму. В таких моделях учитывается оценка как ожидаемой прибыли так и вероятности колебаний действительного значения прибыли. Простой вариант такой модели может состоять в следующем. Пусть x_i - доля имеющихся средств, для приобретения ценных бумаг j. Прибыль на единицу вложенных средств в бумагу j характеризуется фактической прибылью a_i и ожидаемой прибылью α_i. Пусть задано условие состоящее в том, что прибыль на единицу вложения для всех ценных бумаг не должна быть меньше b. Тогда можно записать соответствующую модель в виде следующей системы соотношений:

$$\{[\sum_{j=1}^{n} x_j = 1; x_j \ge 0; j = 1,...,n]; [\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \ge b]\}.$$

Пусть x_i выбирается таким образом, что бы минимизировать дисперсию фактической прибыли. Тогда, целевая функция запишется в виде квадратичной формы:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j \to \min,$$

где $\sigma_{ij} = E[a_i - \alpha_i][a_j - \alpha_j]$ означает ковариацию прибыли для ценных бумаг вида i и j.

Основой решения задачи нелинейного программирования является решение задачи оптимизации нелинейной функции при заданных ограничениях. В более удобном виде такие ограничения описываются соотношением следующего вида:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + s_i = b_i; x_j \ge 0; s_i \ge 0; i = 1,...,m; j = 1,...,n \quad (2)$$

Чтобы сузить круг возможностей при решении задачи оптимизации целевой функции, принимаются следующие условия для (2).

1. Все $b_i \geq 0$ и поэтому существует допустимое базисное решение, при заданной системе ограничений.
2. Ограничения (2) обеспечивают то, что максимум функции цели является конечным на всем множестве допустимых x, при произвольно выбранных значениях коэффициентов c_j.
3. Функция цели $c(x)$ однозначна и конечна при любом x, удовлетворяющем ограничения (2).
4. Все частные производные $\partial c(x) / \partial x_j$ однозначны, конечны и непрерывны, следовательно, $c(x)$ непрерывна при любых x, удовлетворяющих (2).
5. На множестве всех значений x, удовлетворяющих ограничениям (2), функция $c(x)$ имеет конечный максимум c^*.

Условие 1 гарантирует, что модель имеет хотя бы одно допустимое решение, причем нахождение такого решения буде тривиальным. Поэтому, можно отказаться от этого условия, а взамен него в алгоритмы поиска решения необходимо включить приемы нахождения допустимого решения. Условие 2 представляет собой постулат регуляризации, который устраняет необходимость рассматривать неограниченные решения на промежуточных этапах и исключает возможность существования неограниченного оптимального решения исходной задачи.

Поскольку задачи нелинейного программирования сводятся к задачам отыскания максимума, то один из алгоритмов этого типа, который соответствует алгоритму скорейшего подъема с оптимальной длиной шага включает следующие шаги.

1. Выбираем произвольную исходную допустимую точку x^0.
2. На итерации k определяем направление d_j^k.
3. Определяем длину шага t^k, позволяющую максимизировать значение $c(x)$ по всем допустимым точкам, лежащим в выбранном направлении от точки x^k. Если $t^k = 0$, то прекращаем расчет. В противном случае переходим к шагу 3.
4. определяем новое проверяемое решение $x_j^{k+1} = x_j^k + t^k d_j^k$.

   Возвращаемся к шагу 2 изменив x^k на x^{k+1}.

В настоящее время существует достаточно много методов решения задачи оптимизации целевой функции, которые приводят к различным шаговым алгоритмам поиска максимума целевой функции [3,4]. Одним из таких методов является метод выпуклых комбинаций, который заключается в том, чтобы на шаге 2 определять направление с помощью оптимизационной задачи линейного программирования, используя линейную аппроксимацию $c(x)$. Пусть x^k является проверяемой точкой. Тогда $c(x)$ в точке z будем аппроксимировать разложением в ряд Тейлора с использованием первых производных, что запишется в виде:

$$c(z) \approx c(x^k) + \sum_{j=1}^{n} [(\partial c(x^k))/(\partial x_j)](z_j - x_j^k) .$$

Если выполняются условия линейных ограничений и имеется допустимая точка z^*, то ввиду непрерывности $c(x)$ и ее частных производных существуют средневзвешенные x^k и z^*, которые позволяют получать увеличение $c(x)$ по сравнению с $c(x^k)$. Это означает, что существует такое t, $0 < t \le 1$, что приняв $x_j^{k+1} = (1-t)x_j^k + tz_j^*$, получим $c(x^{k+1}) > c(x^k)$. Определим каждое направление в виде $d_j^k = z_j^* - x_j^k$, тогда можно записать: $x_j^{k+1} = x_j^k + td_j^k$. В этом случае шаги 2 и 3 можно описать следующим образом.

1. Определим значения всех частных производных $\partial c / \partial x_j$ в проверяемой точке x^k.
2. Решим задачу линейного программирования, которая описывается целевой функцией вида:

$$\sum_{j=1}^{n} [\partial c(x^k) / \partial x_j] z_j .$$

Во всех ограничениях x_j заменяется на z_j. Определяется направление d_j^k.

3. Если неравенство, имеющее вид:

$$\sum_{j=1}^{n} [\partial c(x^k) / \partial x_j] z_j^* > \sum_{j=1}^{n} [\partial c(x^k) / \partial x_j] x_j^k$$

не выполняется, то прекращаются расчеты.

4. В противоположном случае определяем такую длину шага t^k, при которой максимизируется значение $c(x^k - td^k)$, при $0 < t \le 1$.

В теории нелинейного программирования известны и другие методы решения задачи поиска максимума или минимума целевой функции. К таким методам можно отнести следующие:

- симплексный метод вогнутого программирования, который используется, если функция $c(x)$ вогнута,
- метод секущих плоскостей,
- метод проецируемых градиентов и другие методы.

Важной разновидностью задач нелинейного программирования являются задачи с нелинейными ограничениями, которые описываются в виде:

$$c(x_1, ..., x_n) \to \max ,$$

$$a_i(x_1, ..., x_n) \le 0; i = 1, ..., m; x_j \ge 0; j = 1, ..., m \qquad (3)$$

Для упрощения рассмотрения, целесообразно сделать некоторые упрощающие допущения относительно $c(x)$ и $a_i(x)$. Принимается, что $a_i(x)$ в (3) удовлетворяет следующим допущениям о виде гладкости.

1. Каждая из $a_i(x)$ однозначно определена, конечна и выпукла при всех значениях $(x_1,...,x_n)$.
2. Каждая производная $\partial a_i(x)/\partial x_j$ непрерывна при всех x удовлетворяющих ограничениям (3).
3. Существует, по крайней мере, одна точка $x^0 \geq 0$ такая, что все $a_i(x^0) < 0$.

Приведенные допущения означают, что существует такое решение, которое лежит строго во внутренней части области, которая ограничена соотношением (3). Важным следствием первого допущения является то, что все множество точек удовлетворяющее соотношению (3) образует выпуклое множество.

Целевая функция должна удовлетворять допущениям о гладкости, которые приведены выше. Добавив к ним еще одно условие, получим следующие ограничения.

1. Функция $c(x)$ однозначна и конечна при любом x, удовлетворяющем (3).
2. Все частные производные $\partial c(x)/\partial x_j$ однозначны, конечны и непрерывны при любом значении x, удовлетворяющем ограничениям (3).
3. На множестве всех значений x, удовлетворяющим условиям (3), функция $c(x)$ имеет конечный максимум.
4. Функция $c(x)$ вогнута при всех значениях x удовлетворяющих ограничениям (3).

Один из алгоритмов решения задачи нелинейного программирования, который основывается на методе допустимых направлений, можно представить в виде следующих шагов, которые реализуются на шагах 2 и 3 симплексного алгоритма с двусторонними ограничениями, который используется в линейном программировании. В этом случае реализуются следующие операции.

1. Вычисляются все значения частных производных $\partial c(x^k)/\partial(x_j)$ в проверяемой точке x^k.
2. Решается задача линейного программирования.
3. Прекращаем расчеты, если оптимальное значение переменной x_0 равно нулю.
4. В противном случае находим такую длину шага t, при которой $c(x^k + td)$ максимизируется по всем допустимым точкам, лежащим

в направлении d от точки x^k .

1. *Банди Б.* Основы линейного программирования. М.: радио и связь, 1989.
2. *Dantzing G.B.* Linear Programming and Extensions.Princeton University Press. Princeton, NJ, 1998.
3. *Bazaraa M.S., Sherali M.D., Shetty C.M.* Nonlinear Programming: Theory and Algoritms. *NewYork: John Wiley, 1993.*
4. *Himmelblan* D. Applied Nonlinear Programming. NY:McGraw-Hill, 1992.

Поступила 16.02.2009р.

УДК 683.03

Б.В.Дурняк, Я.Равецки

АНАЛИЗ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ СРЕДСТВ ФУНКЦИОНАЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННЫХ МЕТОДОВ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Необходимость анализа принимаемого решения по управлению предприятием, в большинстве случаев обуславливается следующими причинами:

- если решение по управлению принимается специалистом в соответствующей области, которого будем называть: лицом принимающим решение (LPR),
- если существуют или возникают альтернативные решения,
- если в результате использования управляющего решения, не достигнут планируемый результат,
- если возник запрос пользователя на проведение анализа сформированного решения.

В значительном количестве случаев, для формирования решений, которые принимаются LPR, используются различные системы, например, экспертные системы, системы формирования рекомендаций по принятию решений и др. Во всех случаях, полученное решение, если оно является критическим, которые чаще всего касаются решений по инвестированию, решений о изменении профиля производства, других критических для предприятия преобразований или затрат, требует дополнительной проверки или анализа некоторой альтернативной системой, которой является система анализа принятых решений. Это особенно важно, поскольку, критическое управление характерно тем, что кроме технических последствий от такого управления возникают юридические и социальные последствия. В связи с этим, решения по управлению должны иметь высокий уровень достоверности. Такая достоверность является важным параметром

