



ТОКОВИЙ

Юрій Владиславович — доктор фізико-математичних наук, заступник директора з наукової роботи Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ МЕХАНІКИ НЕОДНОРІДНИХ ТІЛ: СУЧАСНИЙ СТАН ТА ПЕРСПЕКТИВИ РОЗВИТКУ

За матеріалами доповіді на засіданні Президії НАН України 12 липня 2023 року

Структурно неоднорідні тіла, для яких характерною є залежність усіх або деяких властивостей матеріалу від просторових координат, становлять інтерес як для науковців в академічних колах, так і для інженерів-виробничників. Більш як 100-річний період досліджень механічної поведінки неоднорідних тіл спонукає до спроб математичного моделювання та розроблення адекватних методів аналізу. У доповіді простежено основні етапи розвитку досліджень з механіки неоднорідних структур, виокремлено найголовніші напрацювання та проаналізовано сучасні виклики. Розглянуто отримані в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України найвагоміші результати за цим напрямом та окреслено перспективи розвитку цих досліджень.

Ключові слова: структурно неоднорідні тіла, багатошарові та волокнисті композити, багатошарові покриття, функціонально-градієнтні тіла, метаматеріали, напружено-деформований стан, прями та обернені задачі.

Класична механіка деформівного твердого тіла, як і будь-яка інша галузь математичної фізики, ґрунтується на певній системі вихідних положень, аксіом, постулатів [1, 2]. Так, стосовно властивостей матеріалу постулюються суцільність середовища та його однорідність. Втім, як відомо, в реальних тілах, зокрема на мікрорівні, завжди є різні недосконалості структури: включення, тріщини, дефекти тощо. Під впливом певних чинників їх наявність у досліджуваному зразку може навіть перевищити критеріальні обмеження [3], що впливає на макрохарактеристики матеріалу, зокрема залежність його властивостей від просторових координат [4]. Зазначеними чинниками можуть бути природні або технологічні фактори, а також навмисні дії, коли неоднорідність властивостей створюють цілеспрямовано для забезпечення потрібних функціональних характеристик елемента конструкції [5].

Урахування неоднорідності матеріалу суттєво впливає на адекватність оцінки термомеханічної поведінки відповідаль-

них елементів конструкцій. Водночас це спричинює значні ускладнення при аналітичному розв'язанні задач теорії пружності й термопружності. Основна складність полягає у потребі розв'язання ключових диференціальних рівнянь зі змінними, наперед невідомими коефіцієнтами. Це унеможливує, за винятком деяких тривіальних випадків, аналітичне розв'язання задач з використанням класичних методів [6], що спонукає до розвитку наявних та розроблення принципово нових аналітичних, аналітично-числових та числових підходів до розв'язання задач термомеханіки неоднорідних деформівних твердих тіл.

У розвитку домінуючих підходів до побудови розв'язків задач термомеханіки для макро-неоднорідних тіл простежуються певні визначальні етапи [7, 8]. На початку ХХ ст. піонерські роботи з механіки неоднорідних структур, зокрема з урахуванням неперервності профілів залежності властивостей тіл від просторових координат, були пов'язані з вивченням процесів поширення пружних хвиль у неоднорідних тілах з плоскою межею у дослідженнях сейсмічної активності [9, 10].

Великий пласт досліджень з проблем геомеханіки стосується вивчення розподілу напружень у неоднорідних ґрунтових покладах унаслідок локального тиску на поверхню будівельних конструкцій [11–13].

Широко проводилися дослідження, пов'язані з використанням композитних матеріалів (шаруватих, волокнистих, армованих тощо), складники яких мають значний вплив на загальну термомеханічну поведінку виробу [3, 14–16].

Новітній етап розвитку зумовлений появою вдосконалених композитів, таких як функціонально-градієнтні матеріали, метаматеріали. Зокрема, функціонально-градієнтні матеріали відкривають можливості для поєднання складників з контрастними властивостями за допомогою проміжного шару з неперервними з точки зору макромеханіки профілями зміни характеристик за товщиною шару, які можна формувати технологічно [17, 18].

Напрацьовані аналітичні та напіваналітичні підходи можна умовно поділити на окремі,

відмінні за своєю логікою, групи [7, 8]. Методи, які належать до однієї з них, передбачають подання профілів залежностей характеристик матеріалу від просторових координат відомими наперед елементарними функціями. Такий підхід найчастіше має на меті отримання таких ключових рівнянь відповідних задач термомеханіки неоднорідних тіл, розв'язки яких вдається побудувати з використанням класичних методів математичної фізики в аналітичному вигляді. Очевидними перевагами такого підходу є, по-перше, можливість побудови явних аналітичних розв'язків сформульованих задач, які можна використовувати як еталонні при вивченні складніших типів неоднорідності, а також для верифікації методик розрахунку напружено-деформованих станів неоднорідних тіл, а по-друге, його застосовність при дослідженні тіл із залежністю властивостей матеріалу від багатьох змінних. Однак істотними недоліками цього підходу є обмежена застосовність розв'язку, побудованого для конкретного типу неоднорідності, та висока ймовірність порушення обмежень моделі деформівного твердого тіла, зокрема за подання профілів неоднорідності монотонними функціями [19].

Інша група підходів до побудови наближених розв'язків задач теорії пружності та термопружності для неоднорідних тіл ґрунтується на поданні неперервно неоднорідного тіла у вигляді багатошарового композиту тієї самої форми зі сталими характеристиками матеріалу в межах кожного шару [20–22]. При цьому властивості шарів підібрано так, щоб наблизити профіль неоднорідності вихідного тіла кусково-сталою функцією. Такий підхід дає змогу використовувати класичні методи при побудові розв'язків відповідних задач у кожному однорідному шарі з достатньою кількістю ступенів вільності для задоволення умов ідеального контакту та заданих межових умов. Поряд з очевидною перевагою можливості використання класичних методів, такий підхід дозволяє будувати наближені аналітичні розв'язки задач для довільних профілів залежності властивостей матеріалу від товщинної координати. Разом з тим, попри такі суттєві переваги, спо-

стерігаються ускладнення обчислювального характеру, особливо для значних градієнтів властивостей матеріалу, і, крім того, внаслідок розривності властивостей матеріалу на лініях поділу шарів модельного багатошарового композиту з'являються ефекти, не характерні для вихідного неперервно неоднорідного матеріалу. Для уникнення цих та інших недоліків використовують поєднання двох попередніх підходів, моделюючи неперервно неоднорідне тіло багатошаровим композитом, властивості шарів у якому є змінними за товщиною за заданим профілем розподілу (наприклад, лінійним [23] чи експоненціальним [24]), для забезпечення неперервності властивостей матеріалу на лініях поділу шарів.

Розвинуто також низку числових [25–27], аналітично-числових [28, 29] та інших наближених методів, заснованих на використанні варіаційних принципів [30–32], для аналізу пружної поведінки неоднорідних тіл. У роботах [33, 34] із використанням методів функцій комплексної змінної плоскі статичні задачі теорії пружності для неоднорідних тіл зведено до задач спряження, які розв'язано за допомогою методу послідовних наближень.

Попри розмаїття підходів до розв'язання задач теорії пружності й термопружності для неоднорідних тіл бракує аналітичних методів, які давали б можливість знаходити розв'язки таких задач у вигляді явної функціональної залежності від факторів навантаження та були б ефективними у використанні для різних випадків неоднорідності матеріалів, навантажень чи різної форми досліджуваних тіл. Така необхідність зумовлена, зокрема, потребою у розв'язанні задач оптимізації характеристик матеріалу для досягнення заданих розподілів напружень у межах неоднорідного тіла [35, 36] або ж оптимального керування термонапруженим станом [37]. В останні роки цій проблемі присвячено велику кількість досліджень, які проводять у наукових та виробничих центрах багатьох країн світу, зокрема в США, Японії, Швейцарії, Великій Британії, Німеччині, Італії [38–40]. Про важливість цих робіт свідчить значна кількість тематичних конференцій,

конгресів, симпозіумів, а також наукових журналів та монографій, присвячених виключно цій тематиці. В Україні також широко проводять такі дослідження, зокрема в наукових установах Відділення механіки НАН України та Відділення математики НАН України, в дослідницьких групах національних університетів Києва, Львова, Луцька, Дніпра та ін.

Активно виконуються дослідження з механіки неоднорідних структур і в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України (ІППММ). Специфікою Інституту є глибоке поєднання потенціалу відомих наукових шкіл: з теорії диференціальних рівнянь та математичної фізики професора Віталія Скоробагатька та з математичних проблем механіки і математичного моделювання взаємодії полів різної фізичної природи академіка Ярослава Підстригача. Таке поєднання математичного та фізичного підходів визначило траєкторію досліджень ІППММ, окреслену такими основними напрямками:

- методи нелінійного функціонального аналізу, лінійної алгебри, диференціальної геометрії та топології;
- неklasичні проблеми теорії диференціальних та інтегральних рівнянь і математичної фізики;
- математичне і термодинамічне моделювання та дослідження взаємопов'язаних процесів різної природи в складних технічних і медико-біологічних структурах;
- методи визначення та оптимізації напружено-деформованого стану і граничної рівноваги структурно неоднорідних систем стосовно до проблем оцінювання їх міцності, прогнозування ресурсу та надійності функціонування.

Від часів керівництва Ярослава Підстригача і дотепер в Інституті постійно проводять цільові міжнародні наукові конференції «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур»¹, «Сучасні проблеми термомеханіки»² та «Сучасні проблеми математики і ме-

¹ <http://iapmm.lviv.ua/mpmns2019>

² <http://iapmm.lviv.ua/cpt2021>

ханіки»³. Результати за цим напрямом публікують, зокрема, в наукових періодичних виданнях Інституту, серед яких науковий журнал «Математичні методи та фізико-механічні поля»⁴, який віднесено до категорії «А» та перекладається видавництвом Springer у складі міжнародного наукового журналу «Journal of Mathematical Sciences»⁵ (входить до міжнародної бази Scopus), і збірники наукових праць «Прикладні проблеми механіки і математики»⁶ та «Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології»⁷, які віднесено до категорії «Б», а також науково-технічний журнал «Mathematical Modeling and Computing»⁸, який видається спільно з Національним університетом «Львівська політехніка», належить до категорії «А» і входить до міжнародної бази Scopus.

Традиційно виконувани в Інституті дослідження поєднують у собі фундаментальну та прикладну складові. Зокрема, відповідно до генеральної угоди про науково-технічне співробітництво між НАН України та ДП «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля» в галузі створення ракетно-космічної техніки на 2018–2022 рр. в ІППММ виконано низку завдань перспективного плану спільної науково-дослідної діяльності. За одним із них реалізовано науково-технічний проект «Розроблення методики розрахункового моделювання руйнівних випробувань конструкцій ракет та ракет-носіїв», у результаті якого створено математичне і програмне забезпечення для визначення й дослідження напружено-деформованого стану навантажених конструкцій ракетної техніки з урахуванням геометрично й фізично нелінійних процесів деформування [41, 42] і укладено відповідний госпдогівір на нього. За допомогою розробленого програмного забезпечення досліджено механічну поведінку великогабаритного бака паливного від-

сіку під час руйнівного експерименту. Дослідження процесів його деформування під час зростання навантаження, аж до руйнівного, дозволило оцінити таке навантаження та визначити місце руйнування бака. Комп'ютерне моделювання дало змогу уникнути руйнівних натурних випробувань і зменшити кількість неруйнівних, а також забезпечило економію коштів при визначенні фактичних руйнівних навантажень для одного паливного бака ракетноносія (до 24 млн грн).

Шаруваті композити є одним із поширених типів неоднорідних тіл, поведінка яких є цікавою, зокрема щодо відповіді на динамічні навантаження. В ІППММ розроблено методику вивчення процесів хвилеутворення у кусково-однорідних п'єзокерамічних тілах з тонкими включеннями малої контрастності при ustalених навантаженнях та вивчено вплив гармонічного хвильового навантаження на кусково-однорідні пружні тіла з податливими дисковими включеннями [43–45]. Встановлено окремі частотні діапазони гармонічного навантаження, за яких спостерігається ефект зміцнення внаслідок композитності структури. Побудовано розв'язки тривимірних задач відбиття пружних хвиль, коли неідеальні умови контакту півпросторів моделюють наявність тонкої міжфазної неконтрастної неоднорідності. Виявлені закономірності дали змогу розглянути обернену задачу дистанційного визначення механічних властивостей тонкостінних плоских неконтрастних включень за допомогою полів зондуючих пружних хвиль та розробити метод її розв'язання.

Важливим класом неоднорідних тіл є волокнисті композити, для яких ключовим питанням є методи оцінки ефективних пружних характеристик, зокрема за неідеального контакту волокон з матеріалом наповнювача. Співробітники ІППММ на прикладі композитів, армованих впорядкованими і випадково орієнтованими короткими циліндричними волокнами з ковзанням на їх поверхнях, встановили якісні і кількісні відмінності в ефективних модулях пружності порівняно з випадком ідеального міжфазного контакту. Зокрема, виявлено зна-

³ <http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023>

⁴ <http://journals.iapmm.lviv.ua/ojs/index.php/MMPMF>

⁵ <https://www.springer.com/journal/10958>

⁶ <http://journals.iapmm.lviv.ua/ojs/index.php/APMM>

⁷ <http://www.fmmit.lviv.ua/index.php/fmmit>

⁸ <https://science.lpnu.ua/mmc>

чне зменшення ефективних модулів Юнга і зсуву, відповідальних за осьове навантаження композиту. Показано, що зміни ефективних пружних властивостей унаслідок порушення адгезії наповнювача з матричним матеріалом необхідно враховувати як при розрахунку довговічності нових композитних елементів конструкцій, так і при визначенні залишкового терміну служби вже експлуатованих елементів конструкцій [46].

Окремим важливим класом композитів є метаматеріали — штучно синтезовані композитні структури, унікальні властивості яких забезпечуються впорядкуванням або внутрішньою «архітектурою» наповнювачів у матричному середовищі. Особливий інтерес при вивченні хвильових збурень у метаматеріалах становлять фононні явища. Науковці Інституту розробили новий математичний апарат для дослідження хвильових процесів у метаматеріалах на основі гранично-інтегрального формулювання та числового аналізу тривимірних задач проходження пружних гармонічних хвиль через масиви періодичних тонкостінних (тріциноподібних) включень [47, 48]. Вперше виявлено властивості, які є ключовими для створення фононних кристалів із селективною хвилепровідністю, застосовних як конструктивні елементи суперкомп'ютерів, акустичних фільтрів і лінз з винятковою роздільною здатністю, а також вібраційних демпферів різноцільового призначення.

Великий доробок мають співробітники Інституту і в аналізі термомеханічної поведінки тіл із покриттями. Найбільшою проблемою, що виникає при дослідженні таких об'єктів, є досить значна контрастність геометричних і фізичних параметрів покриттів та основи. Для подолання цих ускладнень розроблено методологію розв'язування такого класу задач, яка ґрунтується на моделюванні впливу покриттів на тепловий і механічний стани тіла узагальненими граничними умовами [49]. На цій основі розроблено напіваналітичні підходи до дослідження процесу накопичення пошкоджень в елементах конструкцій з керамічними тонкими шаруватими і товсти-

ми неоднорідними покриттями під впливом теплових навантажень.

Великий пласт результатів стосується дослідження термомеханічної поведінки неперервно неоднорідних та функціонально-градієнтних тіл [7]. Потужним інструментом для цього виявився метод безпосереднього інтегрування [50], започаткований учнем академіка Ярослава Підстригача професором Василем Вігаком. На відміну від класичного підходу методу потенціальних функцій, визначальні функції методу Вігака запроваджують не диференціальними, а інтегральними співвідношеннями [51], що має низку переваг при аналізі неоднорідних структур, основна з яких — побудова розв'язку у вигляді явної функціональної залежності від факторів навантаження. Таку форму розв'язку можна ефективно використовувати у подальших дослідженнях, наприклад у задачах оптимізації, керування напружено-деформованим станом, ідентифікації термомеханічних характеристик та невідомого навантаження. Зокрема, розроблено методику розв'язування задач ідентифікації теплового навантаження на недоступних для безпосередніх вимірювань поверхнях неоднорідних багат шарових тіл циліндричної та сферичної геометрії з використанням додаткової інформації про компоненти напружено-деформованого стану на доступній поверхні [52, 53]. Показано високу ефективність запропонованого алгоритму та його стійкість до малих похибок вхідних даних.

Метод безпосереднього інтегрування з використанням апарату узагальненого диференціювання виявився ефективним при дослідженні багат шарових неоднорідних у кожному шарі тіл у контексті подання профілів зміни властивостей матеріалу кусково-змінними функціями. Зокрема, вивчено вплив градієнтності проміжного шару метал-керамічного циліндра на його термонапружений стан та рівень залишкових напружень на поверхнях поділу шарів [54]. Така концепція є виграшною при реалізації методу як для малої, так і для великої кількості неоднорідних шарів [55].

Ці та інші результати було отримано в ІППММ при виконанні базових держбюджет-

них тем, таких як «Розробка математичних моделей, методів дослідження та оптимізації механічної поведінки функціонально-градієнтних тіл за дії комплексних навантажень» (2020–2021), «Моделювання та розвиток методів розрахунку раціонального функціонування конструкційних елементів і систем різного цільового призначення за комплексних навантажень» (2023–2024) за бюджетною програмою КПКВК 6541230 «Підтримка розвитку пріоритетних напрямів наукових досліджень», а також у межах цільової програми НАН України та УНТЦ «Цільові дослідження та розвиваючі ініціативи» (2017–2018). Вони стали основою для виконання Інститутом спільних міжнародних наукових проєктів, зокрема «Дослідження неоднорідних функціонально-градієнтних матеріалів: теоретичний аналіз та експериментальні вимірювання» (2019) разом із Національним тайванським університетом (Тайбей, Тайвань), «Вплив нано-, мікро-, та мезонеоднорідностей на макрохарактеристики термомеханічної поведінки композитних елементів конструкцій» (2022–2023) — з Інститутом будівництва та архітектури Словацької академії наук (Братислава, Словаччина) та «Ідентифікація термомеханічних параметрів неоднорідних композитних матеріалів та захисних покриттів» (2023–2024) — з Білостоцьким технологічним університетом (Білосток, Польща).

Отримані в ІППММ результати опубліковано в рейтингових міжнародних журналах, вони увійшли до двох фундаментальних енциклопедичних видань видавництва Springer (Encyclopedia of Thermal Stresses та Encyclopedia of Continuum Mechanics), їх також узагальнено в низці монографій.

Напрацьовані підходи, алгоритми та методи мають вагомe фундаментальне та прикладне значення. Крім зазначених вище робіт для КБ «Південне», розроблені моделі, методи та підходи було використано при відновленні котлів барабанів Бурштинської ТЕС, і є всі підстави для їх подальшого успішного застосування при

відновленні критичної інфраструктури. Перспективним у цьому контексті є використання напрацьованих методів з метою скорочення витрат на натурні експерименти з композитними структурами різних типів. Ефективними можуть також бути неруйнівні методи виявлення пошкоджень у композитних структурах.

Отримані колективом Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України важливі теоретичні та практичні результати в галузі механіки структурно неоднорідних тіл вказують на перспективність подальшого розвитку фундаментальних і прикладних досліджень з математики, математичних проблем механіки і математичного моделювання за пріоритетними напрямками діяльності Інституту, спрямування наукових досліджень співробітників установи на розв'язання важливих для оборони і безпеки держави проблем, спонукають до подальшого розширення співпраці з академічними установами та науково-виробничими організаціями, які працюють над розробленням сучасних технологій, приладів і матеріалів, щодо формування спільних проєктів для участі в конкурсах за програмами НАН України, Національного фонду досліджень України та міжнародними грантами, зміцнення міжнародних зв'язків, публікації наукових результатів у престижних міжнародних наукових журналах, проведенні та участі в основних за пріоритетною тематикою міжнародних конференціях.

Крім того, доцільно систематизувати напрацьовані результати у вигляді узагальнюючих монографій з термомеханіки структурно неоднорідних тіл за комплексного теплового, силового та електромагнітного навантаження й аналітично-чисельних методів розв'язування сформульованих на цій основі крайових задач. Особливу увагу слід також звернути на важливість підготовки наукових кадрів вищої кваліфікації відповідного профілю, а також на залучення до виконання цієї тематики вчених у рамках програми постдокторальних досліджень НАН України.

REFERENCES

[СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ]

1. Timoshenko S.P. *History of Strength of Materials: With a Brief Account of the History of Theory of Elasticity and Theory of Structures*. McGraw-Hill, New York, 1953.
2. Todhunter I., Pearson K. *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials: from Galilei to Lord Kelvin. V. 1. Galilei to Saint-Venant, 1639–1850*. Dover Pub., New York, 1960.
3. Maugin G.A. *Material Inhomogeneities in Elasticity*. Chapman and Hall, London, 1993. <https://doi.org/10.1201/9781003059882>
4. Olszak W. (ed.) *Non-Homogeneity in Elasticity and Plasticity*. Pergamon Press, New York, 1959.
5. Suresh S., Mortensen A. *Fundamentals of Functionally Graded Materials: Processing and Thermomechanical Behaviour of Graded Metals and Metal-Ceramic Composites*. Ashgate Publishing, London, 1998.
6. Tanigawa Y. Some Basic Thermoelastic Problems for Nonhomogeneous Structural Materials. *Applied Mechanics Reviews*. 1995. **48**(6): 287–300. <https://doi.org/10.1115/1.3005103>
7. Tokovyy Y., Ma C.-C. *The Direct Integration Method for Elastic Analysis of Nonhomogeneous Solids*. Cambridge Scholars Publishing, Newcastle, 2021.
8. Tokovyy Y., Ma C.-C. Elastic Analysis of Inhomogeneous Solids: History and Development in Brief. *J. Mechanics*. 2019. **35**(5): 613–626. <https://doi.org/10.1017/jmech.2018.57>
9. Ewing W.M., Jardetzki W.S., Press F. *Elastic Waves in Layered Media*. New York, Toronto, London: McGraw Hill Book Company Inc., 1957.
10. Muravskii B.G. *Mechanics of Non-Homogeneous and Anisotropic Foundations*. Springer, Berlin, 2001.
11. Fröhlich O.K. *Druckverteilung im Baugrunde mit Besonderer Berücksichtigung der Plastischen Erscheinungen*. Springer, Wien, 1934.
12. Föppl A. Versuche über die Elastizität des Erdbodens. *Zentralblatt der Bauverwaltung*. 1897. **17**: 276–278.
13. Gibson R.E. Some results concerning displacements and stresses in a non-homogeneous elastic half space. *Géotechnique*. 1967. **17**: 58–67.
14. Cristescu N.D., Craciun E.M., Soós E. *Mechanics of Elastic Composites*. Chapman & Hall, CRC Press, New York, 2004.
15. Gibson R.F. *Principles of Composite Material Mechanics*. CRC Press, Boca Raton, London, New York, 2016.
16. Guz A.N., Khoroshun L.P., Vanin G.A. et al. *Mekhanika kompozitnykh materialov i elementov konstruktivnykh (Mechanics of Composite Materials and Structural Elements)*. Vol. 1. Kyiv, Naukova Dumka, 1982 (in Russian).
[Гуз А.Н., Хорошун Л.П., Ванин Г.А. и др. *Механика композитных материалов и элементов конструкций*. Т. 1: *Механика материалов*. Киев: Наукова думка, 1982.]
17. Sam M., Jojith R., Radhika N. Progression in manufacturing of functionally graded materials and impact of thermal treatment. A critical review. *Journal of Manufacturing Processes*. 2021. **68A**: 1339–1377. <https://doi.org/10.1016/j.jmapro.2021.06.062>
18. Birman V., Byrd L.W. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures. *Applied Mechanics Reviews*. 2007. **60**(5): 195–216.
19. Plevako V.P. Equilibrium of a nonhomogeneous half-plane under the action of forces applied to the boundary. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1973. **37**(5): 858–866.
[Плевако В.П. Равновесие неоднородной полуплоскости под действием усилий, приложенных к границе. *Прикл. мат. мех.* 1973. Т. 37, № 5. С. 905–913.]
20. Grigorenko Ya.M., Vasilenko A.T., Pankratova N.D. On the calculation of the stress state of thick-walled inhomogeneous anisotropic shells. *Prykladnaya Mekhanika*. 1974. **10**(5): 86–93.
[Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. К расчету напряженного состояния толстостенных неоднородных анизотропных оболочек. *Прикладная механика*. 1974. Т. 10, № 5. С. 86–93.]
21. Lekhnitskii S.G. Radial distribution of stresses in a wedge and in a half-plane with variable modulus of elasticity. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1962. **16**(1): 146–151.
[Лехницкий С.Г. Радиальное распределение напряжений в клине и полуплоскости с переменным модулем упругости. *Прикл. мат. мех.* 1962. Т. 16, № 1. С. 146–151.]
22. Podstrigach Ya.S., Lomakin V.A., Kolyano Yu.M. *Termouprugost' tel neodnorodnoy struktury (Thermoelasticity of bodies of inhomogeneous structure)*. Moscow, 1984 (in Russian).
[Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. *Термоупругость тел неоднородной структуры*. Москва: Наука, 1984.]
23. Plevako V.P. *Obshchiye resheniya v zadachakh teorii uprugosti neodnorodnykh sred (General solutions in problems of the theory of elasticity of inhomogeneous media)*. Kharkov, 1997 (in Russian).

- [Плевако В.П. *Общие решения в задачах теории упругости неоднородных сред*. Харьков: Основа, 1997.]
24. Guo L.-C., Noda N. Modeling method for a crack problem of functionally graded materials with arbitrary properties – piecewise-exponential model. *Int. J. Sol. Struc.* 2007. **44**(21): 6768–6790. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.03.012>
 25. Sakharov A.S. et al. *Metod konechnykh elementov v mekhanike tverdykh tel (Finite element method in solid mechanics)*. Kyiv, 1982 (in Russian).
[Сахаров А.С. и др. *Метод конечных элементов в механике твердых тел*. Киев: Вища школа, 1982.]
 26. Gontarovskii V.P., Kozlov I.A., Gontarovskaya T.N. Stress and strain calculations on inhomogeneous bodies of rotation by finite-element methods. *Strength Mater.* 1975. **7**: 991–995. <https://doi.org/10.1007/BF01522403>
[Гонтаровский В.П., Козлов И.А., Гонтаровская Т.Н. Применение метода конечных элементов к расчету напряженного и деформированного состояний неоднородных тел вращения. *Проблемы прочности*. 1975. Т. 8, № 1. С. 72–76.]
 27. Pobedrya V.Ye., Gorbachev V.I. On statics problems of elastic composites. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya Matematika. Mekhanika*. 1977. **5**: 101–111.
[Победря Б.Е., Горбачев В.И. О статических задачах упругих композитов. *Вестник МГУ*. 1977. Т. 5. С. 101–111.]
 28. Kuharchuk Yu., Sulym G., Shevchuk S. Pruzhna rovnovaha dvovymirnykh til z kutovymy tochkamy ta tonkymy vkluchennyamy (Elastic equilibrium of two-dimensional bodies with corner points and thin inclusions). *Mechanical engineering*. 1997. **1**: 14–20.
[Кухарчук Ю., Сулим Г., Шевчук С. Пружна рівновага двовимірних тіл з кутовими точками та тонкими включеннями. *Машинознавство*. 1997. Т. 1. С. 14–20.]
 29. Kushnir R.M., Popovych V. Stress state of a thermosensitive plate in a central symmetric temperature field. *Physico-chemical mechanics of materials*. 2006. **42**(2): 5–12.
[Кушнір Р.М., Попович В.С. Напружений стан термочутливої пластини в центральносиметричному температурному полі. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2006. Т. 42, № 2. С. 5–12.]
 30. Abovsky N.P., Andreev N.P., Deruga A.P. *Variatsionnyye printsipy teorii uprugosti i teorii obolochek (Variational principles of the theory of elasticity and the theory of shells)*. Moscow, 1978 (in Russian).
[Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П. *Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек*. Москва: Наука, 1978.]
 31. Luciano R., Sacco E. Variational methods for the homogenization of periodic heterogeneous media. *Europ. J. Mech. A/Solids*. 1998. **17**(4): 599–617. [https://doi.org/10.1016/S0997-7538\(99\)80024-2](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(99)80024-2)
 32. Zhang N.H., Wang M.L. A mathematical model of thermoviscoelastic FGM thin plates and Ritz approximate solutions. *Acta Mechanica*. 2006. **181**(3-4): 153–167. <https://doi.org/10.1007/s00707-005-0300-9>
 33. Aleksandrov A.Ya., Solovyov Yu.I. *Prostranstvennyye zadachi teorii uprugosti (Spatial problems of the theory of elasticity)*. Moscow, 1978 (in Russian).
[Александров А.Я., Соловьев Ю.И. *Пространственные задачи теории упругости*. Москва: Наука, 1978.]
 34. Mishiku M., Teodosiu K. Solution of an elastic static plane problem for nonhomogeneous isotropic bodies by means of the theory of complex variables. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1966. **30**(2): 459–468. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(67\)90195-5](https://doi.org/10.1016/0021-8928(67)90195-5)
[Мишику М., Теодосиу К. Решение при помощи теории функции комплексного переменного статической плоской задачи теории упругости для неоднородных изотропных тел. *Прикладная математика и механика*. 1966. Т. 30, Вып. 2. С. 379–387.]
 35. Kheinloo M.L. Optimization of material properties of inhomogeneous circular discs subjected to pressure. *Int. Appl. Mech.* 1987. **23**(8): 777–782. <https://doi.org/10.1007/BF00886667>
 36. Nadeau J.C., Ferrari M. Microstructural optimization of a functionally graded transversely isotropic layer. *Mechanics of Materials*. 1999. **31**(10): 637–651. [https://doi.org/10.1016/S0167-6636\(99\)00023-X](https://doi.org/10.1016/S0167-6636(99)00023-X)
 37. Vigak V.M. *Upravleniye temperaturnymi napryazheniyami i peremeshcheniyami (Control of thermal stresses and displacements)*. Kyiv: Naukova Dumka, 1988 (in Russian).
[Вигак В.М. *Управление температурными напряжениями и перемещениями*. Киев: Наукова думка, 1988.]
 38. Dai H.L., Rao Y.N., Dai T. A review of recent researches on FGM cylindrical structures under coupled physical interactions. *Composite Structures*. 2016. **152**: 199–225. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.05.042>
 39. Thai H.T., Kim S.E. A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells. *Composite Structures*. 2015. **128**: 70–86.
 40. Jojith R., Sam M., Radhika N. Recent advances in tribological behavior of functionally graded composites: A review. *Engineering Science and Technology, an International Journal*. 2022. **25**: 100999. <https://doi.org/10.1016/j.jestch.2021.05.003>

41. Drobenko B.D., Klymenko D.V., Kushnir R.M., Marchuk M.V., Sirenko V.M., Kharchenko V.M. Methodology for researching the strength of rocket technology structures. *Kosmicheskaja tehnika. Raketnoe vooruzhenie (Space technology. Missile armaments)*. 2020. (2): 120.
[Дробенко Б.Д., Клименко Д.В., Кушнір Р.М., Марчук М.В., Сіренко В.М., Харченко В.М. Методологія дослідження міцності конструкцій ракетної техніки. *Космическая техника. Ракетное вооружение*. 2020. № 2. С. 120.]
42. Marchuk M.V., Sirenko V.M., Drobenko B.D. Methodology for determining destructive loads on large-sized thin-walled structures taking into account the results of non-destructive tests. *Applied problems of mechanics and mathematics*. 2020. **18**: 133–138. <https://doi.org/10.15407/apmm2020.18.133-138>
[Марчук М.В., Сіренко В.М., Дробенко Б.Д. Методологія визначення руйнівних навантажень на великогабаритні тонкостінні конструкції з урахуванням результатів неруйнівних випробувань. *Прикладні проблеми механіки і математики*. 2020. Т. 18. С. 133–138.]
43. Stankevich V.Z., Mykhaskiv V.V. Intensity of dynamic stresses of longitudinal shear mode in a periodically layered composite with penny-shaped cracks. *Matematychni metody ta fizyko-mekhanichni polya*. 2020. **63**(3): 46–54.
[Станкевич В.З., Михаськів В.В. Інтенсивність динамічних напружень поздовжнього зсуву у періодично шаруватому композиті з круговими тріщинами. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2020. Т. 63, № 3. С. 46–54.]
44. Kunets Ya.I., Matus V.V. Asymptotic approach in dynamic problems of the theory of elasticity for bodies with thin elastic inclusions. *Matematychni metody ta fizyko-mekhanichni polya*. 2020. **63**(1): 75–93.
[Кунець Я.І., Матус В.В. Асимптотичний підхід у динамічних задачах теорії пружності для тіл з тонкими пружними вклученнями. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2020. Т. 63, № 1. С. 75–93.]
45. Kunets Ya.I., Matus V.V., Maksimiv Yu.I., Rabosh R.V. Influence of a thin metal layer on the propagation of Blyushstein-Gulyaev type waves in a piezoelectric body. *Matematychni metody ta fizyko-mekhanichni polya*. 2020. **63**(3): 40–45.
[Кунець Я.І., Матус В.В., Максимів Ю.І., Рабош Р.В. Вплив тонкого металічного прошарку на поширення хвиль типу Блюштейна–Гуляєва у п'єзоелектричному тілі. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2020. Т. 63, № 3. С. 40–45.]
46. Mykhas'kiv V.V., Stasyuk B.M. Effective elastic moduli of short-fiber composite with sliding contact at interfaces. *Mechanics of Composite Materials*. 2021. **57**(5): 635–646. <https://doi.org/10.1007/s11029-021-09985-8>
47. Kushch V.I., Shmegera S.V., Mykhas'kiv V.V. Multiple spheroidal cavities with surface stress as a model of nanoporous solid. *International Journal of Solids and Structures*. 2018. **152–153**: 261–271. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.07.001>
48. Zhbadynskyi I.Y., Mykhas'kiv V.V. Acoustic Filtering Properties of 3D Elastic Metamaterials Structured by Crack-Like Inclusions. *2018 XXIII International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED)*, Tbilisi, Georgia, 2018. P. 145–148. <https://doi.org/10.1109/DIPED.2018.8543137>
49. Shevchuk V.A. Study of the thermal stress state of a half-space with a multilayer coating during cyclic convective heat exchange with the external environment. *Matematychni metody ta fizyko-mekhanichni polya*. 2022. **65**(3-4): 136–145. [Шевчук В.А. Дослідження термонапруженого стану півпростору з багат шаровим покриттям за циклічного конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2022. Т. 65, № 3-4. С. 136–145.]
50. Tokovyy Y.V. Direct integration method. In: Hetnarski R.B. (ed.) *Encyclopedia of Thermal Stresses*. Springer, Dordrecht, 2014. P. 951–960. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7>
51. Yuzvyak M., Tokovyy Y. Thermal stresses in an elastic parallelepiped. *Journal of Thermal Stresses*. 2022. **45**(12): 1009–1028. <https://doi.org/10.1080/01495739.2022.2120940>
52. Kushnir R.M., Yasinskyi A.V., Tokovyy Y.V. Effect of Material Properties in the Direct and Inverse Thermomechanical Analyses of Multilayer Functionally Graded Solids. *Adv. Eng. Mater.* 2022. **24**: 2100875. <https://doi.org/10.1002/adem.202100875>
53. Kushnir R.M., Yasinskyi A.V., Tokovy Yu.V. Reconstruction of the thermal load of a functional graded hollow sphere by surface displacements. *Matematychni metody ta fizyko-mekhanichni polya*. 2020. **63**(1): 149–160.
[Кушнір Р.М., Ясінський А.В., Токовий Ю.В. Відтворення теплового навантаження функціонально-градієнтної порожнистої кулі за поверхневими переміщеннями. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2020. Т. 63, № 1. С. 149–160.]
54. Tokova L., Yasinskyi A., Ma C.C. Effect of the layer inhomogeneity on the distribution of stresses and displacements in an elastic multilayer cylinder. *Acta Mech.* 2017. **228**: 2865–2877. <https://doi.org/10.1007/s00707-015-1519-8>
55. Tokovyy Y. Elastic and thermoelastic response of multilayer inhomogeneous hollow cylinders. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2023. <https://doi.org/10.1080/15376494.2023.2186548>

Yuriy V. Tokovyy

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
of the National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, Ukraine*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1610-0113>

APPLIED PROBLEMS OF MECHANICS OF NONHOMOGENEOUS SOLIDS:
THE CURRENT STATE AND PROSPECTS

According to the materials of scientific report at the meeting of the Presidium of NAS of Ukraine, July 12, 2023

Structurally nonhomogeneous solids, i.e., the ones exhibiting spatial variation of all or some material properties, present the interest for the scientists and engineers in both academia and industry. For over a hundred years, the mechanical responses of nonhomogeneous solids inspire numerous attempts of the mathematical modeling and the development of efficient methods of their analysis. This report addresses the basic aspects of the development in the mechanics of nonhomogeneous solids along with the main achievements and challenges. Special attention is given to the results gained in this direction at the Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine. The perspectives of such research are briefly overviewed.

Keywords: structurally nonhomogeneous solids, multilayer and fiber composites, multilayer coatings, functionally-graded solids, metamaterials, stress-strain state, direct and inverse problems.

Cite this article: Tokovyy Yu.V. Applied problems of mechanics of nonhomogeneous solids: the current state and prospects. *Visn. Nac. Akad. Nauk Ukr.* 2023. (9): 70–79. <https://doi.org/10.15407/visn2023.09.070>