КИНЕМАТИКА И ФИЗИКА НЕБЕСНЫХ ТЕЛ том 5 № 4 1989

УДК 524.7

В. А. Антонов, О. А. Железняк

О гидродинамических вихрях в газовых дисках галактик

Рассматривается двумерное газодинамическое течение, стационарное по отношению к вращающейся системе координат, с полем скоростей $v_x \propto y$. Такое течение может реализоваться при наличии определенного заданного поля объемных (гравитационных) сил и моделировать локальную кинематику галактического газового диска. Доказано, что при пренебрежении самогравитацией, диссипацией и эффектами неоднородности вихря солитон как решение, локально нарушающее однородность течения, не существует.

ON HYDRODYNAMIC VORTEXES IN GASEOUS DISKS OF GALAXIES, by Antonov V. A., Zheleznyak O. A. — Two-dimensional gas stream with the velocity field $v_x \propto y$ was assumed to be stationary with respect to the rotating coordinate system. Such a stream may be realized if there is a certain field of the extensive (gravitational) forces and may represent the local kinematics of the galactic gaseous disk. It is shown that the local uniform stream cannot be developed into a soliton if we neglect the self-gravitation, the dissipation and the non-uniformity of vortex (β-effect of geophysics).

Введение. При изучении динамики газового слоя в галактиках возникает вопрос о возможности существования локальных вихрей (солитонов) в газовых дисках. К настоящему времени этот вопрос достаточно ясен в теории плазмы и в геофизике, однако из-за специфической особенности динамики галактик и сходных астрофизических объектов непосредственное перенесение на них тех же результатов не удается. Отсюда возникла необходимость в специальных теоретических работах и модельных экспериментах (например, [1, 2, 4]). Некоторые содержащиеся в этих работах дискуссионные положения отчасти возникают из-за различий в определении основных понятий. Поэтому вопрос о существовании солитонов в галактиках далеко не ясен. Весьма важно точно сформулировать используемые предпосылки. В настоящей работе под солитоном понимаем возмущение в круговых движениях галактического газа, которое занимает в галактической плоскости малую область по сравнению с размерами галактического диска. Отметим, что имеется в виду малость размеров в обоих направлениях в отличие от солитонов, рассмотренных в [6].

Основные наши предположения: 1. Равновесие в вертикальном направлении устанавливается существенно быстрее, чем в горизонтальном; поэтому пользуемся двумерными гидродинамическими уравнениями и некоторым эффективным уравнением состояния газа $P=f(\sigma)$ (P — двумерное давление, σ — поверхностная плотность). Уравнение состояния — единое для всего диска в отличие, например, от [2], где существенна его неоднородность (через зависимость толщины диска от внешнего гравитационного поля) уже в стационарном состоянии; 2. Пользуемся локальной декартовой системой координат, начало которой выбрано на расстоянии r_* от центра галактики, ось x направлена против вращения галактики, ось y — на антицентр. Система координат вращается со скоростью $\Omega_*=\Omega(r_*)$ вокруг центра галактики; 3. Эффект дифференциального вращения учитывается с точностью до членов, линейных относительно x и y; соответственно изменением плотности вихря пренебрегаем; 4. Возмущения, создающие солитон, сохраняют удельную плотность вихря, т. е. диссипативными эффектами пренебрегаем; 5. Пренебрегаем изменением плотности газа по радиусу в невозмущенном состоянии; 6. Гравитационное поле галактики считается заранее заданным, самогравитацию газа не учитываем.

Приведенные предположения исключают участие волн Россби в изучаемом процессе (действительно, для изучения волн Россби в галактиках существенны дальнейшие члены разложения поля скоростей). Таким образом, в данной работе рассматриваются возмущения типа звуковых волн с характерной скоростью порядка $c=\sqrt{dP/d\sigma}$. Хотя формально размер солитона a не используется в последующих выкладках, но фактически результат о невозможности существования солитона содержателен только при $a\approx c/(r_*\Omega')$ (штрих означает производную по r). Действительно, при $a\ll c/(r_*\Omega')$ распространение звуковых волн существенно не искажается дифференциальным движением газа в дисках галактик и компенсации нелинейности за счет дисперсии, необходимой для возникновения солитона, нет [4]. Наоборот, если $a\gg c/(r_*\Omega')$, то внутренние процессы в рассматриваемой области срабатывают недостаточно быстро, чтобы предотвратить размывание солитона дифференциальным вращением.

Анализ основных уравнений. Поскольку в невозмущенном состоянии предполагается баланс центробежных и гравитационных сил, то гравитационный потенциал галактики в галактической плоскости определяется соотношением

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r}=\Omega^2 r. \tag{1}$$

В соответствии с предположением 3 функцию Φ надлежит разлагать с точностью до членов второго порядка. Опираясь на (1), после несложных сокращений приходим к следующей системе гидродинамических уравнений для стационарного случая:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=2\Omega_* v-\frac{\partial W}{\partial x}\,; \tag{2}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-2\Omega_* u-2r_*\Omega_*\Omega'_* y-\frac{\partial W}{\partial y}\,; \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sigma u)+\frac{\partial}{\partial y}(\sigma v)=0, \tag{4}$$

где $W=\int\sigma^{-1}dP$ — известная тепловая функция; u, v — компоненты скорости в локальной системе координат. Уравнения (2), (3) и (4) допускают невозмущенное решение типа дифференциального движения:

$$u=-r_*\Omega'_* y;\qquad v=0;\qquad \sigma=\sigma_0;\qquad P=P_0;\qquad W=W_0 \tag{5}$$

(σ_0, P_0, W_0 — постоянные).

В принципе можно было бы ожидать решений уравнений (2), (3), (4), которые отличаются от невозмущенного решения, но асимптотически приближаются к нему при $x^2+y^2\to\infty$. Докажем, что при наших предположениях это невозможно. При этом амплитуда возмущения не ограничивается, а уравнение состояния газа подчинено только условию вещественности c. Предположение 4 означает, что сохраняется инвариант плотности вихря

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}+2\Omega_*=\eta\sigma, \tag{6}$$

где $\eta=(2\Omega_*+r_*\Omega'_*)/\sigma_0$. Для доказательства понадобится интеграл Бернулли

$$\psi=(u^2+v^2)/2+W+r_*\Omega_*\Omega'_* y^2. \tag{7}$$

Уточняя его смысл, продифференцируем (7) по x и y с учетом (2), (3). Получаем

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = v\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + 2\Omega_* v; \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = u\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) - 2\Omega_* u.$$

Если принять во внимание (6), то это эквивалентно

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \eta\sigma v; \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = -\eta\sigma u. \tag{8}$$

Как следствие, производная от ψ вдоль траектории равна нулю и функция ψ постоянна вдоль каждой линии тока.

Доказательство теоремы основано на методе вириальных соотношений в несколько обобщенной форме. Выделим достаточно широкую область, чтобы на ее границе отличием гидродинамических параметров от значения в невозмущенной среде можно было пренебречь, т. е. возмущение величин σ, u, v убывает быстрее, чем по закону обратной пропорциональности. Умножим уравнение (2) на $(3\sigma x - 2v/\eta)$, а выражение (3) на $(-\sigma y + 2u/\eta)$ и проинтегрируем по всей выбранной области. При этом используются такие тождества (с учетом уравнений (4) и (8)):

$$x\sigma\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x\sigma u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x\sigma uv) - u\left[\frac{\partial}{\partial x}(x\sigma u) + \frac{\partial}{\partial y}(x\sigma v)\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x\sigma u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x\sigma uv) - \sigma u^2;$$

$$\sigma y\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\sigma yuv) + \frac{\partial}{\partial y}(x\sigma v^2) - \sigma v^2;$$

$$x\sigma v = \frac{x}{\eta}\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{\eta}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x\psi) - \psi\right]; \qquad \sigma yu = -\frac{1}{\eta}\left[\frac{\partial}{\partial y}(y\psi) - \psi\right];$$

$$x\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[(P - P_0)x] - P + P_0; \qquad y\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[(P - P_0)y] - P + P_0;$$

$$v\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) - u\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}[v(u^2 + v^2)] -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}[u(u^2 + v^2)] + \frac{3}{2}(u^2 + v^2)\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}[v(u^2 + v^2)] -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}[u(u^2 + v^2)] + \frac{3}{2}(u^2 + v^2)(2\Omega_* - \eta\sigma);$$

$$v\frac{\partial W}{\partial x} - u\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(vW) - \frac{\partial}{\partial y}(uW) + W(2\Omega_* - \eta\sigma).$$

Встречающиеся в правых частях этих тождеств производные по x и y приводят к появлению контурных интегралов, значения которых постоянны в смысле независимости от конкретного решения системы уравнений (2), (3), (4). Остальные члены, если раскрыть ψ согласно (7), дают следующие двойные интегралы:

$$\iint [4\sigma v^2 + (4\Omega_*^2 r_* \Omega_*' y^2/\eta) - 2r_*\Omega_*\Omega_*'\sigma y^2 - 2(P - P_0) + (4r_*\Omega_*\Omega_*' yu/\eta) +$$

$$+ 2\sigma(W - W_0])\,dxdy = \text{const}. \tag{9}$$

С другой стороны, если умножить (6) на y^2 и проинтегрировать по всей области, то после несложных преобразований получаем еще одно вспомогательное равенство

$$\iint (-\eta y^2\sigma + 2\Omega_* y^2 + 2yu)\, dxdy = \text{const}. \tag{10}$$

Из равенства (9) вычитаем (10), умноженное на $2r_*\Omega_*\Omega'_*/\eta$. Постоянная в правой части полученного соотношения определяется подстановкой невозмущенного решения и оказывается равной нулю.

Итак,

$$\iint [2\sigma v^2 + Q(\sigma)]\, dxdy = 0, \tag{11}$$

где $Q(\sigma) = \sigma(W - W_0) - P + P_0$ — плотность добавочной внутренней энергии газа. Анализ функции $Q(\sigma)$ дает $Q(\sigma_0) = 0$, а $Q'(\sigma) = W - W_0$ и совпадает по знаку с $(\sigma - \sigma_0)$, т. е. Q в точке $\sigma = \sigma_0$ имеет абсолютный минимум.

Таким образом, равенство (11) может быть соблюдено только в случае $v = 0$ и $\sigma = \sigma_0$, тогда подстановка в (3) дает $u = -r_*\Omega'_* y$. Поэтому единственным решением системы (2), (3), (4) является невозмущенное, что и требовалось доказать.

Обсуждение. Наш результат об отсутствии солитонов относится только к звуковым бездиссипативным возмущениям, вращающимся вместе с галактикой. Вопрос о создании солитонов за счет вихревых или энтропийных возмущений, нарушающих инвариант (6), значительно более сложен. В реальных галактиках такие возмущения отличаются бóльшими масштабами в сравнении с рассматриваемыми звуковыми модами. Во всяком случае вопрос об устойчивости солитонов Россби и вообще длительно существующих неоднородностей по отношению к размывающему воздействию дифференциального вращения далеко не прост и не может считаться решенным в известных публикациях. Однако соответствующая дискуссия не является целью данной работы. Нашей задачей было только исключение некоторого, вполне конкретного класса солитонов из числа приемлемых моделей.

Включение самогравитации также радикально меняет положение: всякое достаточно сильное уплотнение газа в галактическом диске должно поддерживаться своим тяготением и сохраняться, несмотря на дифференциальность вращения. Наконец, отметим локальный характер нашего анализа, перестающего быть справедливым, когда область, захваченная вихрем, достаточно широка и пользоваться предположением о постоянстве η нельзя.

В заключение приведем более простое доказательство нашей теоремы в частном случае твердотельного вращения. Если $\psi(x, y)$ не сводится к постоянной, то у этой функции должен быть хотя бы один максимум с $\psi > \psi_0 = W_0$ или минимум с $\psi < W_0$. В обоих случаях для такой экстремальной точки из (8) следует $u = v = 0$ и $\psi = W$. Например, в точке максимума получаем $W > W_0$ и, стало быть, $\sigma > \sigma_0$. Однако нахождение вторых производных из (8) ведет к

$$\Delta\psi = \eta\left[\frac{\partial}{\partial x}(\sigma v) - \frac{\partial}{\partial y}(\sigma u)\right] = \eta\sigma\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \eta\sigma(\eta\sigma - 2\Omega_*) =$$

$$= \eta^2\sigma(\sigma - \sigma_0) > 0,$$

что противоречит необходимому условию максимума $\Delta\psi \leqslant 0$. Аналогичное противоречие получилось бы в точке максимума. Остается допустить, что $\psi \equiv \text{const}$, $u = v = 0$, т. е. данный тип солитона не существует. В [3] можно найти доказательство этого же результата, но только в геострофическом приближении.

Экспериментальные результаты М. В. Незлина [4] представляются противоречащими нашему теоретическому выводу, так как солитон в них возникает и без β-эффекта [4, с. 29]. Однако интерпретация этих экспериментов вызывает сомнение по следующей причине: скорость движения жидкости в сосуде достигает 2.5 м/с (как видно из [4, табл. 1]), а при такой скорости аэродинамический эффект взаимодействия жидкости и находящегося над ней воздуха уже играет существенную роль (см., например, [5]). Таким образом, указанные эксперименты непосредственно ничего не говорят о процессах в галактиках, поскольку в них не учитывается довольно существенный гетерофазный эффект.

Авторы благодарят участников Ленинградского семинара по звездной динамике за обсуждение работы, а также А. Д. Чернина — за полезные советы и замечания, Б. П. Кондратьева — за участие в разработке доказательства описанного частного случая.

1. *Антипов С. В., Незлин М. В., Родионов В. К. и др.* Столкновения солитонов Россби // Письма в Астрон. журн.— 1983.— 9, № 1.— С. 58—64.
2. *Корчагин В. И., Петвиашвили В. И.* Солитоны Россби в галактическом диске // Там же.— 1985.— 11, № 4.— С. 298—301.
3. *Корчагин В. И., Петвиашвили В. И., Рябцев А. Д.* Уединенный вихрь в галактическом диске, поддерживаемый неоднородностью вращения // Там же.— 1988.— 14, № 4.— С. 317—322.
4. *Незлин М. В.* Солитоны Россби // Успехи физ. наук.— 1986.— 150, вып. 1.— С. 3—60.
5. *Филлипс О. М.* Динамика верхнего слоя океана.— М.: Мир, 1969.— 321 с.
6. *Фридман А. М.* О кольцевых структурах в спиральных галактиках // Письма в Астрон. журн.— 1978.— 4, № 6.— С. 243—244.

Астрон. обсерватория Ленингр. ун-та,
Шемахин. астрофиз. обсерватория АН АзССР

Поступила в редакцию 09.06.88,
после доработки 15.12.88

Научные конференции

КОЛЛОКВИУМ МАС № 125 «РЕКОМБИНАЦИОННЫЕ РАДИОЛИНИИ: 25 ЛЕТ ИССЛЕДОВАНИЙ»

Состоится 11—16 сентября 1989 г. в Пущино (СССР). Научная программа: результаты исследований рекомбинационных радиолиний (РРЛ) в диапазоне радиоволн от миллиметровых до декаметровых; РРЛ от областей H II, C II, межзвездного газа внегалактических источников; теоретические исследования РРЛ; лабораторные исследования высоковозбужденных атомов.

КОЛЛОКВИУМ МАС № 126 «ПРОИСХОЖДЕНИЕ И ЭВОЛЮЦИЯ МЕЖПЛАНЕТНОЙ ПЫЛИ»

Состоится 27—30 августа 1990 г. в Киото (Япония). Научная программа: природа межпланетных и кометных частиц; происхождение пыли в Солнечной системе; эволюция пыли в межпланетном пространстве.