

УДК 524.3—325.4

А. Л. Баладин

Фурье-анализ лучевых скоростей звезд. Метод восстановления функции распределения пространственных скоростей звезд

Развит удобный для численной реализации метод восстановления функции распределения вектора скоростей звезд по известным из наблюдений функциям распределения лучевых скоростей.

FOURIER-ANALYSIS OF RADIAL VELOCITIES OF STARS. A METHOD OF RECONSTRUCTING THE DISTRIBUTION FUNCTION OF SPATIAL VELOCITIES OF STARS. by Balandin A. L.— A method for reconstructing the distribution function of the velocity vector of stars was developed. The method may be useful for numerical realization and relies on distribution functions of radial velocities derived from observations.

В [5] отмечается, что одной из наиболее важных проблем звездной статистики является получение функции распределения пространственных скоростей звезд. Поскольку точное решение этой проблемы требует знания вектора скоростей большого числа звезд, задача вычисления функции распределения связана с большими наблюдательными трудностями. Вектор скорости данной звезды можно определить, если известны лучевая скорость, собственное движение и параллакс звезды. Все эти величины измеряются с разной относительной степенью точности, а также подвержены систематическим ошибкам различного характера. Кроме того, число надежных параллаксов обычно мало и сравнительно для немногих звезд с известными лучевыми скоростями известны параллаксы.

С другой стороны, современные каталоги лучевых скоростей содержат достаточно надежные и однородные данные. Поэтому в [5] ставится и решается задача нахождения функции распределения вектора скоростей звезд из наблюдаемых лучевых скоростей. Основное допущение, сделанное в [5] и которое остается в настоящей работе, состоит в том, что разные элементарные объемы пространства в нашей окрестности имеют практически идентичные функции распределения пространственных скоростей. Формулы обращения, полученные в [5], — это формулы обращения Радона [4] в пространстве скоростей; они содержат операцию дифференцирования каталожных данных, которая, как известно, при численной реализации представляет собой неустойчивую процедуру.

В настоящей статье разработан численный регуляризирующий алгоритм, основанный на методе фурье-анализа экспериментальных данных. Рассмотрим только трехмерный случай (двухмерный случай рассматривается аналогично). Введем обозначения, придерживаясь принятых в [5]: \mathbf{v} — вектор скорости звезды в трехмерном пространстве; $\psi(\mathbf{v})$ — функция распределения вектора скоростей; l, b — галактическая долгота и широта соответственно; $\mathbf{m}(l, b) = (\cos l \cos b, \sin l \cos b, \sin b)$ — вектор, в направлении которого проводится измерение скорости звезды; $n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{m}$ — скорость в направлении \mathbf{m} ; $f(v; \mathbf{m})$ — одномерная функция распределения звезд по проекциям скорости \mathbf{v} на направление вектора наблюдения \mathbf{m} ; $F(v; \mathbf{m}) = f(v; \mathbf{m}) / \int f(v; \mathbf{m}) dv$ — нормированная одномерная функция распределения.

Отметим, что функция $\psi(\mathbf{v})$ определяется так, что величина $\psi(\mathbf{v}) d^3v$ дает относительное число звезд, для которых вектор скорости

лежит в интервале $(\mathbf{v}, \mathbf{v} + d\mathbf{v})$. Для нее справедливо равенство: $\int \psi(\mathbf{v}) d^3\mathbf{v} = 1$.

Аналогично для функции $f(v; \mathbf{m})$ соотношение $f(v; \mathbf{m}) dv d\Omega$ определяет число звезд в телесном угле $d\Omega$ в направлении \mathbf{m} , у которых значение лучевых скоростей находится в интервале $(v, v + dv)$. Из этих определений видно, что функции $\psi(\mathbf{v})$ и $f(v; \mathbf{m})$ имеют смысл плотностей распределения. Нами используется терминология, принятая в теоретической физике, где функции, аналогичные $\psi(\mathbf{v})$ и $f(v; \mathbf{m})$, называются функциями распределения.

Выполнив выкладки, подобные приведенным в [5], получим

$$N(\mathbf{m}) \int \psi(\mathbf{v}) d^3\mathbf{v} = \int f(v; \mathbf{m}) dv, \quad (1)$$

где $N(\mathbf{m}) d\Omega = \int f(v; \mathbf{m}) dv d\Omega$ — общее число звезд, наблюдаемых в телесном угле $d\Omega$ в направлении \mathbf{m} . Равенство (1) можно переписать так:

$$N(\mathbf{m}) \int dv \int \psi(\mathbf{v}) \delta(v - \mathbf{m} \cdot \mathbf{v}) d^3\mathbf{v} = \int f(v; \mathbf{m}) dv$$

или

$$\int \psi(\mathbf{v}) \delta(v - \mathbf{m} \cdot \mathbf{v}) d^3\mathbf{v} = f(v, \mathbf{m}) / N(\mathbf{m}) = F(v, \mathbf{m}). \quad (2)$$

Интегрирование здесь и далее ведется по всей области изменения переменной интегрирования. Здесь $\delta(\)$ — функция Дирака, сосредоточенная на плоскости $v - \mathbf{m} \cdot \mathbf{v} = 0$ (звезды, радиус-вектор скорости которых лежит на этой плоскости, имеют в направлении \mathbf{m} скорость v). Далее функцию $\psi(\)$ будем помечать индексами D или S в зависимости от того, в декартовой или сферической системе координат она рассматривается.

Обозначим фурье-преобразование функции $F(v; \mathbf{m})$ по переменной v через $\hat{F}(k; \mathbf{m})$; тогда

$$\hat{F}(k; \mathbf{m}) = \int F(v; \mathbf{m}) \exp(-2\pi i k v) dv \quad (3)$$

или

$$\hat{F}(k; \mathbf{m}) = \int d^3\mathbf{v} \psi_D(\mathbf{v}) \int \delta(v - \mathbf{m}(l, b) \cdot \mathbf{v}) \exp(-2\pi i k v) dv.$$

Выполнив интегрирование по переменной v , получим

$$\hat{F}(k; \mathbf{m}) = \int \psi_D(\mathbf{v}) \exp(-2\pi i k \mathbf{m} \cdot \mathbf{v}) d^3\mathbf{v}. \quad (4)$$

Если трехмерное фурье-преобразование от функции $\psi_D(\mathbf{v})$ обозначить через $\hat{\psi}_D(\mathbf{k})$, т. е.

$$\hat{\psi}_D(\mathbf{k}) = \int \psi_D(\mathbf{v}) \exp(-2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) d^3\mathbf{v}, \quad (5)$$

то из сравнения (4) и (5), а также с учетом того, что вектор \mathbf{k} в сферической системе координат имеет вид $k \cdot \mathbf{m}$, заключаем, что

$$\hat{F}(k; \mathbf{m}) = \hat{\psi}_S(k \cdot \mathbf{m}), \quad (6)$$

т. е. фурье-образ функции $F(v; \mathbf{m})$ по переменной v равен значению трехмерного фурье-образа функции $\psi_D(\mathbf{v})$ на луче с направлением \mathbf{m} .

Таким образом, численная процедура восстановления функции $\psi_D(\mathbf{v})$ по известным функциям $F(v; \mathbf{m})$ сводится к следующему: 1. Вычисление функции $\hat{\psi}_S(k \cdot \mathbf{m})$ по формуле (6); 2. Перевод фурье-образа $\hat{\psi}_S(k \cdot \mathbf{m})$, заданного в сферической системе координат, в декартовы координаты, т. е. нахождение $\hat{\psi}_D(\mathbf{k}) = \mathbf{I} \hat{\psi}_S(k \cdot \mathbf{m})$, где \mathbf{I} — оператор интерполяции из сферической системы координат в декартову. В настоящей работе оператор \mathbf{I} выполняет линейную интерполяцию; 3. Выполнение

обратного фурье-преобразования от функции $\hat{\psi}_D(\mathbf{k})$, т. е.

$$\psi_D(\mathbf{v}) = \int \hat{\psi}_D(\mathbf{k}) \exp(2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) d^3\mathbf{k}. \quad (7)$$

Поскольку в реальных условиях функции $F(v; \mathbf{m}(l, b))$ определяются из наблюдательных (каталожных) данных, то при численной реализации алгоритма необходимо учитывать следующие факты: 1) ограниченность интервала лучевых скоростей $v \in [v_1, v_2]$ и ограниченность

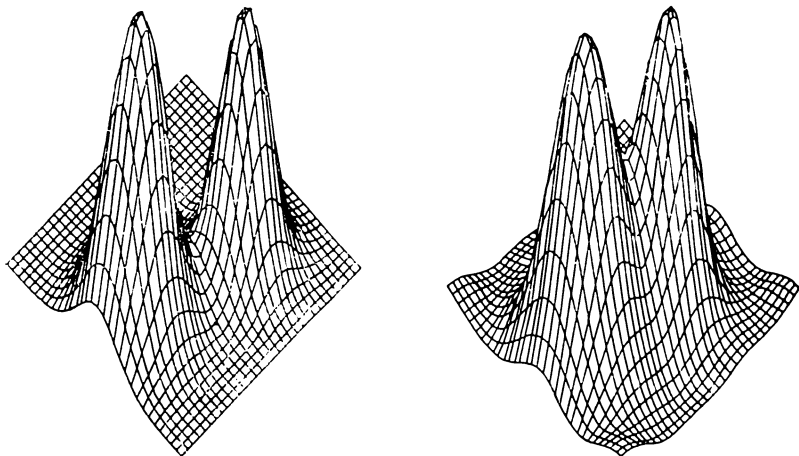


Рис. 1. Сечение модельной функции (8) плоскостью $Z=0$

Рис. 2. Сечение восстановленной модельной функции плоскостью $Z=0$

изменения угловых переменных l и b . Первое условие учитывается применением во всех формулах дискретного преобразования Фурье вместо непрерывного, второе — приводит к увеличению ошибки интерполяции; 2) экспериментальный шум.

Если функции $F(v; \mathbf{m})$ содержат экспериментальный шум, то функция $\hat{\psi}_D(\mathbf{k})$ будет включать в себя высокие гармоники, которые операцию обратного фурье-преобразования превращают в неустойчивую процедуру. Поскольку далее функции $\hat{\psi}$ и ψ будут рассматриваться только в декартовой системе координат, индексы D и S везде будут опущены.

Построим вместо функции $\hat{\psi}(\mathbf{k})$ ее регуляризованный аналог [1]:

$$\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{k}) = \hat{\psi}(\mathbf{k}) / \left[1 + \alpha \sum_{i=0}^n d_i (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^i \right].$$

Здесь k_x, k_y, k_z — компоненты вектора \mathbf{k} ; $|\mathbf{k}|^2 = k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$; α и n — параметр и порядок регуляризации соответственно; $d_i \geq 0$ — весовые множители. Выбор n и d_i определяется априорными сведениями о гладкости искомого решения.

В результате обратного преобразования Фурье получаем регуляризованную оценку $\psi_\alpha(\mathbf{v})$ для $\psi(\mathbf{v})$:

$$\psi_\alpha(\mathbf{v}) = \int \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{k}) \exp(2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) d^3\mathbf{k}.$$

Поскольку полученное решение существенно зависит от параметра α , выбор его осуществляется из условия согласования невязки с уровнем шума σ экспериментальных данных. Нами использованы два способа выбора α : один основан на минимизации функционала невязки [2], второй — на принципе максимума функции правдоподобия [3].

На модельной задаче проведено численное тестирование алгоритма. В качестве модельного распределения $\psi(\mathbf{v})$ использована функция

$$\psi(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^2 a_i \exp(-b_i^2 |\mathbf{v} + \mathbf{u}_i|^2) \quad (8)$$

при $a_1=1.0$; $a_2=2.0$; $b_1=5.0$; $b_2=6.0$; $\mathbf{u}_1=(0.3, 0.0, 0.0)$; $\mathbf{u}_2=(-0.15, 0.15, -0.10)$. Можно показать, что преобразование (2) функции (8) имеет следующий вид:

$$F(v; \mathbf{m}) = \pi \sum_{i=1}^2 (a_i/b_i^2) \exp[-b_i^2(v + \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{m})^2]. \quad (9)$$

Численные расчеты проводились на равномерной сетке по переменной v с числом отсчетов, равным $N_v=32$. Число ракурсов по углам l и b выбиралось равным соответственно $N_l=10$, $N_b=10$ ($l \in [0, \pi/2]$, $b \in [0, 2\pi]$) с равномерным шагом по l и b . Уровень зашумленности функции (9) задавался равным 1% от максимума $F(v; \mathbf{m})$. Сечения точной и восстановленной функции $\psi(\mathbf{v})$ плоскостью $Z=0$ изображены на рисунках 1 и 2 соответственно, из которых видно, что особенности функции распределения проявляются даже при достаточно малом числе отсчетов по углам l и b .

Автор благодарит В. В. Пикалова и А. И. Седельникова за полезные обсуждения.

1. Гончарский А. В., Черепащук А. М., Ягола А. Г. Некорректные задачи астрофизики.— М.: Наука, 1985.—346 с.
2. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1979.— 283 с.
3. Федотов А. М. Линейные некорректные задачи со случайными ошибками в данных.— Новосибирск: Наука, 1982.— 188 с.
4. Хелгасон С. Преобразование Радона.— М.: Мир, 1983.— 148 с.
5. Ambartsumian V. A. On the derivation of the frequency function of space velocities of the stars from the observed radial velocities // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.— 1935.— 96, N 2.— P. 172—180.

Сиб. ин-т зем. магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн.
Сиб. отд-ние АН СССР, Иркутск

Поступила в редакцию 01.08.88,
после доработки 10.12.88

Научные конференции

КОЛЛОКВИУМ МАС № 124 «ДВОЙНЫЕ И ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ ГАЛАКТИКИ»

Состоится 4—9 декабря 1989 г. в г. Таскалуса (штат Алабама, США). Научная программа: статистика двойных и взаимодействующих галактик; определение масс двойных галактик; слившиеся галактики, плотные группы; приливные эффекты; роль взаимодействий в стимулировании звездообразования.