

УДК 521.95

Применение статистического критерия Эйхгорна — Вильямс для подбора оптимальных моделей редукции пластинок широкоугольного астрографа

Л. К. Пакуляк

Анализируются различные редукционные модели для серии астронегативов, полученных в площадке области Северного полюса Галактики в целях создания астрометрического стандарта. Выбор оптимальной модели редукции выполняется с помощью статистического критерия Эйхгорна — Вильямс.

APPLICATION OF EICHHORN — WILLIAMS STATISTICAL CRITERION FOR THE CHOICE OF OPTIMUM REDUCTION MODELS FOR THE WIDE-ANGLE ASTROGRAPH PLATES, by Pakulyak L. K.— For astrographic set of observations in the area near the North Galactic pole the structure of reductional models is studied. The choice of optimum models is made by using the Eichhorn — Williams statistical criterion.

Общие замечания о критерии Эйхгорна — Вильямс и его использовании. Работы, ведущиеся в ГАО АН УССР по фотографическому обзору северного неба (ФОН) [4], позволяют решить некоторые частные вопросы астрометрии. К ним можно отнести и задачи создания каталогов специального назначения для небольших участков неба с повышенной точностью, так называемых астрометрических стандартов (АС) [7, 8]. При создании АС основные усилия, как правило, направляются на достижение максимальной при данном исходном материале точности за счет тщательного учета особенностей фотопластинок и выбора адекватной методики обработки. Если качество изображений на разных пластинках и характер аберраций примерно одинаковы, то на предварительных этапах (редукция отдельных пластинок) особых трудностей не возникает [7]. Опыт, однако, показывает, что весь фотографический материал может оказаться неоднородным, и структура редукционных моделей будет различной [1, 8]. Тогда возникает задача подбора оптимальной модели для редукции каждой пластинки в отдельности.

Способы такого подбора тщательно разработаны и неоднократно применялись [1, 2, 5, 6]. Сущность их заключается в том, что на основе некоторого статистического критерия оценивается значимость членов редукционной модели. При этом от корреляции между ними либо избавляются путем ортогонализации [2, 5], либо учитывают ее, включая множественный коэффициент корреляции в систему признаков для определения оптимального значения критерия в нормальной схеме регрессионного анализа [1]. Иногда удобно использовать более простой критерий целесообразности включения того или иного члена в модель редукции, например критерий Эйхгорна — Вильямс [9]. При этом должно выполняться неравенство:

$$\frac{1}{ab} \int \int [f(x, y, R_1, \dots, R_m, R_{m+1}) - f(x, y, R_1, \dots, R_m)]^2 dx dy > > n | \sigma_{R_{m+1}}^2 \langle \Sigma_{R_{m+1}}^2 \rangle - \sigma_{R_m}^2 \langle \Sigma_{R_m}^2 \rangle |. \quad (1)$$

Левая (Л) часть (интегрирование проводится по всей пластинке) содержит средний квадрат разности координат, полученных по двум редукционным моделям, отличающимся на один член R_{m+1} , необходимость включения которого в модель требуется проверить. В данной

работе она вычислялась по всем опорным звездам ($N=150-200$ для разных пластинок), равномерно распределенным по площади квадрата $4 \times 4^\circ$, как сумма квадратов разностей одноименных координат, полученных по двум моделям, деленная на число звезд:

$$Л = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\xi_i^{M1} - \xi_i^{M2})^2.$$

Правая (П) часть представляет собой разность средних дисперсий для этих же моделей, которую можно вычислить по ковариационной матрице системы нормальных уравнений после обработки пластинки [6]. В нашей работе она получена по тем же опорным звездам:

$$П = \frac{1}{n} \left| \left(\sum_{i=1}^n A_i \mathbf{Q}_{M1} A_i^T - \sum_{i=1}^n A_i \mathbf{Q}_{M2} A_i^T \right) \right|,$$

где A_i — строки матрицы условных уравнений; \mathbf{Q}_{M1} и \mathbf{Q}_{M2} — ковариационные матрицы двух моделей. В левой части неравенства учитываются как систематические, так и случайные отличия систем координат, заданных одними и теми же опорными звездами для двух моделей редукции, поскольку в ней, в сущности, отражено влияние эффекта, описываемого дополнительным членом (дисторсия, кома и т. д.). Правая часть выражает только случайные отличия с учетом корреляционных связей между различными членами редукционной модели. Таким образом, неравенство (1) будет выполняться только тогда, когда упомянутый эффект значим и вносит некоторую систематическую ошибку, а следовательно, дополнительный член R_{m+1} , его отражающий, в модели должен быть сохранен. В противном случае его влиянием можно пренебречь, поскольку случайные различия двух систем координат явно превышают систематические. Добавляя по одному члену и попарно сравнивая предыдущую и последующую модели, можно обосновать необходимость включения в нее тех или иных элементов в целом для астронегативов данного инструмента или в случае неустойчивости их характеристик подобрать оптимальные модели для каждого конкретного случая. Первый вопрос, по-видимому, имеет смысл ставить в случае массовых работ на основе наблюдательного материала программы ФОН, при которых потребуется максимально унифицировать его обработку, второй — возникает при создании каталогов специального назначения.

Конкретные модели редукции для пластинок широкоугольного астрографа ГАО АН УССР. Модели редукции для астронегативов двойного широкоугольного астрографа (ДША) ГАО АН УССР ($D=40$ см, $F=2$ м) получены для 16 пластинок, снятых в площадке вблизи Северного полюса Галактики ($\alpha_{1985}=12^h 24^m$, $\delta_{1985}=+26^\circ$), в целях создания для этой области АС. Пластинки отсняты в 1983—1985 гг. Поскольку исходный материал можно считать достаточно однородным, то вначале для всех пластинок была принята одна и та же модель — обычно используемый для пластинок ДША неполный кубический полином с добавлением членов, учитывающих уравнение блеска и кому

$$\xi, \eta = 3L + 2Q + 2D + 1S + 1C, \quad (2)$$

где $3L$ — обычный линейный полином $a_1 + a_2x + a_3y$ и $b_1 + b_2x + b_3y$; $2Q = a_4x^2 + a_5xy$ и $b_4y^2 + b_5xy$; $2D = a_6x^3 + a_7xy^2$ и $b_6y^3 + b_7x^2y$; $1S = a_8(d-d_0)^2$ и $b_8(d-d_0)^2$; $1C = a_9(d-d_0)x$ и $b_9(d-d_0)y$ для координат ξ и η соответственно. Здесь x, y — измеренные координаты звезд на пластинках; a, b — коэффициенты членов редукционной модели; d — диаметры изображений звезд; d_0 — среднее значение диаметра для системы опорных звезд (в единицах шкалы измерительного прибора).

Для проверки значимости членов в выражении (2) для каждой пластинки последовательно сравнивались между собой восемь следующих моделей:

- M1: $\xi, \eta = 3L$; M5: $\xi, \eta = 3L + 2Q + 2D$;
 M2: $\xi, \eta = 3L + 2Q$; M6: $\xi, \eta = 3L + 2Q + 2D + 1S$;
 M3: $\xi, \eta = 3L + 2Q + 1S$; M7: $\xi, \eta = 3L + 2Q + 2D + 1C$;
 M4: $\xi, \eta = 3L + 2Q + 1C$; M8: $\xi, \eta = 3L + 2Q + 2D + 1S + 1C$.

При сравнении кроме статистического критерия учитывались также средние квадратичные ошибки единицы веса и их изменения от модели к модели, соотношение значений параметров и их изменения от пластинки к пластинке. Сравнение по ξ и η выполнялось отдельно.

Для проверки значимости квадратичных членов левая и правая части неравенства (1) вычислялись по моделям M1 и M2 (табл. 1; здесь и далее в таблицах для примера приводятся результаты вычислений по пяти пластинкам из шестнадцати). Сравнение показало, что в большинстве случаев применение квадратичных членов не ухудшает решение в систематическом отношении (для обеих координат). Мень-

Таблица 1. Результаты сравнения моделей по статистическому критерию

| Номер пластинки | Квадратичные члены M1 и M2 | | Дисторсия M2 и M5 | | Уравнение блеска M5 и M6 | | Кома M5 и M7 | |
|-----------------|----------------------------|------------|-------------------|------------|--------------------------|------------|--------------|------------|
| | \sqrt{L} | \sqrt{P} | \sqrt{L} | \sqrt{P} | \sqrt{L} | \sqrt{P} | \sqrt{L} | \sqrt{P} |
| 141 | ξ 25.7 | 6.6 | 71.2 | 7.4 | 10.9 | 8.7 | 25.0 | 10.2 |
| | η 29.5 | 4.8 | 64.8 | 5.5 | 13.2 | 4.6 | 19.9 | 7.9 |
| 350 | ξ 8.0 | 6.5 | 38.9 | 7.3 | 7.0 | 5.9 | 4.1* | 9.9 |
| | η 5.3 | 4.4 | 45.2 | 5.3 | 12.4 | 3.3 | 6.7* | 7.0 |
| 351 | ξ 20.1 | 4.7 | 68.4 | 1.7 | 5.2* | 7.9 | 14.3 | 5.7 |
| | η 21.0 | 5.0 | 58.0 | 6.8 | 24.1 | 10.0 | 17.9 | 8.9 |
| 326 | ξ 18.3 | 4.8 | 70.6 | 13.1 | 31.5 | 7.7 | 52.8 | 7.8 |
| | η 3.5* | 4.7 | 59.5 | 9.6 | 14.2 | 8.9 | 24.0 | 9.5 |
| 370 | ξ 0.6* | 4.6 | 62.6 | 8.5 | 28.1 | 11.5 | 8.3* | 9.2 |
| | η 3.1* | 7.1 | 52.1 | 7.3 | 13.9 | 3.2 | 22.9 | 11.8 |

Примечание. Значения \sqrt{L} и \sqrt{P} даны в 10^{-4} мм. Звездочкой отмечены случаи, когда $L < P$.

шие значения левой части неравенства, отмеченные в табл. 1 звездочкой, соответствуют случаям, в которых значения самих квадратичных коэффициентов меньше их средних квадратичных ошибок. Разница между значениями левой и правой частей неравенства (1) мала и может быть вызвана случайными причинами, поэтому для таких пластинок квадратичные члены включались в более сложные модели и проверялись по статистическому критерию как совместно (т. е. выполнено сравнение моделей вида $3L + 2Q + 2D$ и $3L + 2D$ и т. д.), так и в отдельности (сравнивались модели $3L + Q_1 + Q_2$ и $3L + Q_1$ или $3L + Q_1 + Q_2$ и $3L + Q_2$). Такая проверка показала желательность сохранения обоих квадратичных членов для всех астронегативов.

В модели 5—8 включены члены, описывающие эффект кубической дисторсии. Для проверки необходимости их введения выполнялось сравнение моделей M2 и M5 (табл. 1). Для всех пластинок по обеим координатам критерий дал положительный результат, свидетельствующий о том, что введение этих членов в редуцированную модель всегда приводит к улучшению решения в систематическом смысле. Для всех пласт-

тенок коэффициенты дисторсии значимы по сравнению с их средними квадратичными ошибками, и значения их близки между собой (табл. 2). Это позволило определить их средневзвешенные значения с ошибками, не превышающими $\pm 0.036 \cdot 10^{-7}$ мм⁻², которые в дальнейшем можно считать постоянными инструмента (табл. 2; средневзвешенные получены по всем 16 пластинкам). Необходимо отметить также хорошее совпадение соответствующих коэффициентов по координатам ξ и η , что подтверждает надежность их определения.

Таблица 2. Коэффициенты дисторсии и их ошибки (в 10^{-7} мм⁻²)

| Номер пластинки | ξ | | | | η | | | |
|------------------|-------|----------------|--------|-----------------|--------|----------------|--------|-----------------|
| | x^2 | σ_{x^2} | xy^2 | σ_{xy^2} | y^2 | σ_{y^2} | x^2y | σ_{x^2y} |
| 141 | 0.61 | ± 0.08 | 0.64 | ± 0.07 | 0.55 | ± 0.06 | 0.58 | ± 0.07 |
| 350 | 0.51 | 0.08 | 0.34 | 0.08 | 0.58 | 0.07 | 0.44 | 0.07 |
| 351 | 0.60 | 0.10 | 0.71 | 0.10 | 0.69 | 0.09 | 0.42 | 0.07 |
| 326 | 0.29 | 0.10 | 0.56 | 0.09 | 0.45 | 0.07 | 0.56 | 0.08 |
| 370 | 0.69 | 0.07 | 0.52 | 0.08 | 0.41 | 0.09 | 0.59 | 0.08 |
| Средневзвешенное | 0.55 | 0.04 | 0.52 | 0.02 | 0.52 | 0.02 | 0.56 | 0.03 |

Таблица 3. Изменение коэффициентов уравнения блеска и комы и ошибок их определения в зависимости от d_0

| Номер пластинки | $10^{-5} \text{УБ}_{21} \pm \sigma_{21}$ мм·(ед.диам) ⁻² | $10^{-5} \text{УБ}_5 \pm \sigma_5$ мм·(ед.диам) ⁻² | $\sigma_{0.21}$, мм | $\sigma_{0.5}$, мм |
|-----------------|--|--|----------------------|---------------------|
| | 141 <i>x</i> | 0.72 ± 0.80 | 0.02 ± 0.32 | 0.0052 |
| 141 <i>y</i> | -0.99 ± 0.67 | -0.58 ± 0.29 | 0.0042 | 0.0038 |
| 317 <i>x</i> | 0.30 ± 0.64 | -0.08 ± 0.29 | 0.0048 | 0.0040 |
| 317 <i>y</i> | 0.32 ± 0.69 | 0.32 ± 0.30 | 0.0045 | 0.0038 |
| 336 <i>x</i> | -1.52 ± 0.64 | 0.12 ± 0.30 | 0.0041 | 0.0032 |
| 336 <i>y</i> | 0.97 ± 0.58 | 0.98 ± 0.28 | 0.0041 | 0.0032 |

| Номер пластинки | $10^{-5} \text{Кома}_{21} \pm \sigma_{21}$ (ед.диам) ⁻¹ | $10^{-5} \text{Кома}_5 \pm \sigma_5$ (ед.диам) ⁻¹ | $\sigma_{0.21}$, мм | $\sigma_{0.5}$, мм |
|-----------------|---|---|----------------------|---------------------|
| | 141 <i>x</i> | -0.44 ± 0.17 | -0.45 ± 0.18 | 0.0063 |
| 141 <i>y</i> | -0.39 ± 0.12 | -0.32 ± 0.14 | 0.0050 | 0.0047 |
| 317 <i>x</i> | -0.28 ± 0.17 | -0.29 ± 0.17 | 0.0060 | 0.0052 |
| 317 <i>y</i> | -0.57 ± 0.14 | -0.53 ± 0.15 | 0.0051 | 0.0047 |
| 336 <i>x</i> | -0.24 ± 0.15 | -0.21 ± 0.16 | 0.0049 | 0.0045 |
| 336 <i>y</i> | -0.36 ± 0.17 | -0.32 ± 0.18 | 0.0051 | 0.0047 |

Учет уравнения блеска (УБ) и комы. Как выяснилось из анализа предварительных результатов редукии, основное внимание при подборе оптимальных моделей необходимо уделять эффектам УБ и комы. Для более уверенного их учета на каждой пластинке получалось по две экспозиции длительностью $22^m 30^s$ и 1^m , что давало по два изображения опорных звезд с разностью диаметров, соответствующей примерно 3^m . Совместное использование обеих экспозиций позволяет повысить точность определения коэффициентов УБ [2]. Поскольку при совместном решении диапазон диаметров опорных звезд значительно расширяется в сторону более слабых (для звезд АГКЗ десятой величины диаметр изображения короткой экспозиции соответствует примерно 13^m длинной экспозиции), то коэффициент УБ был взят квадратичным с целью ослабить возможный систематический крен в сторону слабых звезд.

Значение d_0 принято равным среднему значению диаметра для системы опорных звезд с учетом обеих экспозиций ($d_0=21.0$, что соответствовало примерно 11^m). При редукции пластинок статистический критерий во многих случаях дал отрицательный результат. Кроме того, ошибки

Таблица 4. Коэффициенты уравнения блеска и комы, полученные по разным моделям

| Номер пластинки | M3 | M6 | M8 |
|--------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| | 10^{-5} мм·(ед.диам) ⁻² | 10^{-5} мм·(ед.диам) ⁻² | 10^{-5} мм·(ед.диам) ⁻² |
| Уравнение блеска | | | |
| 141 <i>x</i> | -0.12 ± 0.39 | 0.02 ± 0.32 | -0.12 ± 0.31 |
| <i>y</i> | -0.59 ± 0.32 | -0.58 ± 0.29 | -0.48 ± 0.29 |
| 350 <i>x</i> | -0.33 ± 0.43 | -0.34 ± 0.37 | -0.32 ± 0.36 |
| <i>y</i> | 0.62 ± 0.33 | 0.50 ± 0.31 | 0.49 ± 0.31 |
| 351 <i>x</i> | 0.01 ± 0.32 | -0.01 ± 0.31 | -0.03 ± 0.30 |
| <i>y</i> | 0.72 ± 0.34 | 0.68 ± 0.29 | 0.67 ± 0.29 |
| 326 <i>x</i> | 1.00 ± 0.50 | 1.09 ± 0.46 | 0.74 ± 0.43 |
| <i>y</i> | -0.30 ± 0.38 | -0.24 ± 0.33 | -0.24 ± 0.32 |
| 370 <i>x</i> | 0.82 ± 0.29 | 0.98 ± 0.27 | 1.01 ± 0.28 |
| <i>y</i> | -0.42 ± 0.36 | -0.46 ± 0.30 | -0.43 ± 0.30 |
| Номер пластинки | M4 | M7 | M8 |
| | 10^{-5} (ед.диам) ⁻¹ | 10^{-5} (ед.диам) ⁻¹ | 10^{-5} (ед.диам) ⁻¹ |
| Кома | | | |
| 141 <i>x</i> | -0.40 ± 0.16 | -0.45 ± 0.18 | -0.36 ± 0.15 |
| <i>y</i> | -0.33 ± 0.13 | -0.32 ± 0.14 | -0.35 ± 0.13 |
| 350 <i>x</i> | -0.03 ± 0.15 | -0.03 ± 0.16 | 0.42 ± 0.17 |
| <i>y</i> | -0.08 ± 0.15 | -0.06 ± 0.15 | -0.07 ± 0.14 |
| 351 <i>x</i> | -0.32 ± 0.14 | -0.23 ± 0.15 | -0.26 ± 0.14 |
| <i>y</i> | -0.23 ± 0.18 | -0.28 ± 0.14 | -0.18 ± 0.15 |
| 326 <i>x</i> | -0.77 ± 0.20 | -0.84 ± 0.20 | -0.69 ± 0.20 |
| <i>y</i> | -0.20 ± 0.15 | -0.36 ± 0.17 | -0.24 ± 0.14 |
| 370 <i>x</i> | -0.07 ± 0.16 | -0.11 ± 0.18 | -0.11 ± 0.16 |
| <i>y</i> | -0.34 ± 0.15 | -0.36 ± 0.17 | -0.28 ± 0.16 |

определения коэффициентов УБ превышали их значения иногда на порядок, что, по-видимому, связано с неверным выбором значения d_0 , смещающим кривую квадратичной зависимости относительно ее фактического положения. Когда в качестве d_0 было принято минимальное значение диаметров ($d_0=5.0$), ошибки уменьшились в два — три раза с одновременным уменьшением средних квадратичных ошибок единицы веса для этих редукционных моделей (табл. 3). В этой же таблице для трех пластинок приведены значения коэффициентов комы, вычисленные по двум вариантам d_0 . Точность их определения осталась прежней, средние квадратичные ошибки единицы веса также уменьшились.

В табл. 4 представлены значения коэффициентов УБ и комы с их средними квадратичными ошибками для разных редукционных моделей по тем же пяти пластинкам. При переходе от модели к модели величины обоих коэффициентов и точность их определения достаточно стабильны, при переходе же от пластинки к пластинке коэффициент УБ изменяется по величине и знаку. Кроме того, он различен даже для пластинок, полученных в течение полутора часов в одну ночь, что заставляет считать его величиной случайной. Сравнение моделей по статистическому критерию дает для УБ различные результаты. Сравнение выполнялось для моделей M2 и M3, M2 и M4, M5 и M6, M5 и M7, M5

и М8. В табл. 1 для примера приведены результаты сравнения моделей М5 и М6 (УБ) и М5 и М7 (кома).

Для всех 16 пластинок значение коэффициента комы практически постоянно (табл. 4), кроме трех случаев, для которых и статистический критерий дал отрицательный результат. Хорошая сходимость значений коэффициента по пластинкам позволила получить его средневзвешенное значение как постоянную инструментальную величину: $a_9 = -0.30 \cdot 10^{-5}$ (ед. диам) $^{-1}$ и $b_9 = -0.27 \cdot 10^{-5}$ (ед. диам) $^{-1}$.

Выводы. Проведенное с помощью статистического критерия сравнение восьми редуцированных моделей по 16 пластинкам ДША ГАО АН УССР позволяет сделать следующие выводы. При массовых работах, основанных на наблюдательном материале, полученном с этим инструментом, наилучшей редуцированной моделью является неполный квадратичный полином при условии хорошего определения коэффициентов кубической дисторсии и комы и предварительного исправления измеренных координат за эти эффекты. Вводить добавочные кубические члены в редуцированную модель не обязательно, поскольку дополнительная проверка таких моделей по критерию, но с заранее введенным коэффициентом дисторсии из табл. 2, показала, что последний определен достаточно надежно и учитывает ее практически полностью. К неполному квадратичному полиному может быть добавлен (там, где это требуется) член, учитывающий в той или иной форме УБ, являющееся величиной случайной и изменяющееся от пластинки к пластинке. Поэтому вопрос о его включении в каждом конкретном случае должен рассматриваться отдельно. Что касается возможной перекачки случайных ошибок в систему при усложнении редуцированной модели [3], то, по-видимому, критерий Эйхгорна — Вильямс позволяет для любой пластинки и любого набора опорных звезд на ней подобрать оптимальную модель редукиции, избежав этого, поскольку он учитывает и корреляционные связи между членами разложения.

По результатам выполненного сравнения для всех 16 пластинок АС установлены оптимальные модели, учитывающие их характерные особенности, по которым выполнялась окончательная редукиция. Эти модели использовались в процессе первичной обработки пластинок на первом этапе получения каталога АС, результаты которого будут изложены в специальной статье.

1. Валеев С. Г., Шамарин М. Г., Даутов И. А., Целищев И. Е. Регрессионные модели в фотографической астрометрии // Кинематика и физика небес. тел.— 1987.— 3, № 5.— С. 30—35.
2. Иванов Г. А., Курьянова А. Н., Яценко А. И. Определение коэффициентов дисторсии, комы и уравнения блеска телескопа ДША ($D=40$ см, $F=2$ м) ГАО АН УССР // Там же.— 3, № 2.— С. 82—88.
3. Киселев А. А. Теоретические основы фотографической астрометрии // Проблемы астрометрии: 22-я астрометр. конф. СССР, 1—5 июня 1981 г.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.— С. 44—56.
4. Колчинский И. Г., Онегина А. Б. О программе фотографирования неба широкоугольными астрографами // Астрометрия и астрофизика.— 1979.— Вып. 39.— С. 57—62.
5. Курьянова А. Н., Кизюн Л. Н. Опыт использования ортогональных полиномов для установления связи между измеренными и идеальными координатами // Кинематика и физика небес. тел.— 1985.— 1, № 2.— С. 9—14.
6. Шокин Ю. А. О редукиции измеренных координат к идеальным с использованием членов, зависящих от блеска и цвета звезд // Сообщ. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга.— 1974.— № 190.— С. 3—19.
7. Шокин Ю. А., Евстигнеева Н. М. Широкоугольный астрометрический стандарт в Московской зенитной зоне // Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга.— 1983.— 55.— С. 3—20.
8. Eichhorn H., Googe W. P., Lukač C. F., Murphy J. K. Accurate positions of 502 stars in the region of the Pleiades // Mem. Roy. Astron. Soc.— 1970.— 73, N 2.— P. 125.
9. Eichhorn H., Williams C. A. On the systematic accuracy of photographic astrometric data // Astron. J.— 1963.— 68, N 4.— P. 221—231.