КИНЕМАТИКА
И ФИЗИКА
НЕБЕСНЫХ
ТЕЛ том 5 N 1 1989

УДК 521.176

Релятивистские уравнения движения спутника Земли в геоцентрической системе отсчета

В. А. Брумберг, С. М. Копейкин

Выведены релятивистские уравнения движения спутника Земли в гармонической невращающейся геоцентрической системе координат. В релятивистских частях уравнений учтены шварцшильдовские, лензе-тирринговские и квадрупольные возмущения от Земли, а также приливные возмущения от Солнца и Луны. Уравнения выведены двумя различными методами — путем преобразования уравнений движения спутника из барицентрической в геоцентрическую систему координат и путем применения геодезического принципа непосредственно в геоцентрической системе координат. Оба метода приводят к одинаковому конечному результату.

RELATIVISTIC EQUATIONS OF MOTION OF THE EARTH'S SATELLITE IN THE GEOCENTRIC FRAME OF REFERENCE, by Brumberg V. A., Kopejkin S. M.— Relativistic equations of motion of the Earth's satellite in the harmonic nonrotating geocentric coordinate system are derived. In the relativistic parts of the equations the Schwarzschild, Lense — Thirring and quadrupole perturbations from the Earth as well as tidal perturbations from the Sun and the Moon are taken into account. The equations are derived by two different ways. The first way is the transformation of the satellite's equations of motion from the barycentric coordinate system to the geocentric one. The second way is an application of the geodesic principle in the geocentric coordinate system directly. Both methods give the same final result.

До недавнего времени релятивистская трактовка движения спутников Земли ограничивалась, как правило, лишь учетом шварцшильдовских и лензе-тирринговских членов (релятивистские члены, обусловленные соответственно сферически-симметричной составляющей гравитационного поля Земли и ее осевым вращением). Возмущения, вызванные этими членами, приведены для разных классов спутников в работе [8]. В настоящее время, однако, необходимо учитывать более тонкие релятивистские эффекты, обусловленные сжатием Земли и влиянием Солнца и Луны.

При исследовании релятивистского влияния Солнца и Луны важное значение приобретает выбор системы отсчета. Так как барицентрические (т. е. выведенные в барицентрической системе координат Солнечной системы) уравнения движения тел Солнечной системы и барицентрическая метрика гравитационного поля Солнечной системы хорошо известны [1, 3], то формулировка барицентрических уравнений движения спутника не вызывает никаких затруднений. Вычитая из барицентрических уравнений движения спутника барицентрические уравнения движения центра инерции Земли, нетрудно получить уравнения движения спутника в относительных геоцентрических координатах, представляющих собой разности барицентрических координат спутника и центра инерции Земли. Такие барицентрические уравнения движения спутника в относительных координатах использовались, например, в работах [13, 16].

Преимущество этих уравнений заключается в том, что координаты спутника и координаты возмущающих тел рассматриваются как функции одного и того же аргумента — барицентрического координатного времени. Однако в их правых частях релятивистские члены, обусловленные влиянием Солнца, имеют порядок $\varepsilon \sim GM_{\odot}/(c^2R) \sim 10^{-8}$ (R — гелиоцентрическое расстояние центра инерции Земли) по сравнению с главным ньютоновским членом, пропорциональным $GM_\oplus/\hat{r}^2$ ($\hat{r}$ — геоцентрическое расстояние спутника). Релятивистские возмущения, соответствующие отмеченному порядку малости, связаны с наличием в уравнениях движения спутника членов, непосредственно зависящих от орбитальной скорости движения Земли вокруг Солнца и абсолютного значения ньютоновского гравитационного потенциала Солнца на орбите Земли. Эти возмущения никак не отражают динамики геоцентрического движения спутника. Они возникают из-за плохого выбора геоцентрической системы координат в искривленном пространстве-времени и являются фиктивными, так как не дают вклада в реально наблюдаемые величины геоцентрической дальности и скорости спутника. Это происходит вследствие того [17], что барицентрические уравнения распространения света в относительных координатах также содержат «большие» релятивистские члены порядка ε, которые взаимно уничтожаются с подобными членами в барицентрических уравнениях движения спутника.

Адекватное описание геоцентрического движения спутника можно получить в другой («хорошей») геоцентрической системе координат, начало которой также движется вдоль мировой линии центра инерции Земли, однако релятивистское влияние Солнца проявляется в правых частях уравнений движения спутника только в виде приливных членов, пропорциональных $\varepsilon(M_\odot\hat{r}/R^3)$. Авторы работы [5] первыми отметили преимущество использования «хорошей» геоцентрической системы координат для описания движения спутника. Оно заключается в том, что динамические возмущения при описании движения спутника в этой системе координат сразу же дают правильный порядок величины реально измеряемых эффектов, что значительно облегчает сравнение теоретических расчетов с экспериментальными данными.

В последующей работе эти же авторы [6] (см. также [12]) построили в явном виде «хорошую» геоцентрическую систему координат путем введения обобщенных нормальных координат Ферми в окрестности массивного самогравитирующего тела. Однако построение этих координат — сложная и недостаточно хорошо обоснованная математическая процедура. Кроме того, способ построения обобщенных координат Ферми разработан лишь для идеализированной ситуации сферически-симметричных невращающихся масс и не может быть применен непосредственно к реальной Земле, сжатие и вращение которой невозможно игнорировать в астрономической практике.

Другой подход к построению «хорошей» геоцентрической системы координат предложен в [2] и развит в работах В. А. Брумберга и С. М. Копейкина, краткое изложение которых содержится в [7]. Он основан на использовании: 1) схемы постньютоновских аппроксимаций [4, 9] и мультипольного формализма [14, 15], используемых для решения уравнений Эйнштейна, построения барицентрической системы координат Солнечной системы и «хорошей» геоцентрической системы координат; 2) метода асимптотических сшивок гравитационных полей [10, 11] для установления формул перехода между координатными системами. Рассматриваемый метод можно непосредственно использовать в большинстве небесномеханических и астрометрических задач, в которых рассматриваются слабогравитирующие и медленно движущиеся тела, обладающие произвольной формой, внутренней структурой и распределением скоростей вещества.

Цель настоящей работы — вывод уравнений движения спутника в «хорошей» невращающейся системе координат (GRS), построенной в [2, 7]. Эта система, как и барицентрическая система координат (BRS), описывается компонентами метрического тензора, которые подчиняются гармоническим координатным условиям и находятся путем решения уравнений Эйнштейна. Барицентрическая метрика дается формулами (8), (16), (34)—(39) из [1, гл. 7] с учетом дипольной составляющей гравитационного поля в мультипольном разложении ньютоновского потенциала.

Сшивая барицентрическую и геоцентрическую метрики в окрестности Земли, получаем формулы перехода между BRS (t, x^i) и GRS (u, w^i) в следующем виде ($i=1, 2, 3$; c — скорость света; G — универсальная гравитационная постоянная):

$$u = t - c^{-2}\,[S(t) + v_E^k r_E^k] + O(c^{-4}); \tag{1}$$

$$w^i = r_E^i + c^{-2}\left\{\left[\frac{1}{2}\,v_E^i v_E^k + F^{ik}(t) + D^{ik}(t)\right] r_E^k + D^{ikm}(t)\, r_E^k r_E^m\right\} + O(c^{-4}), \tag{2}$$

где $r_E^i = x^i - x_E^i(t)$; $x_E^i(t)$ и $v_E^i = dx_E^i/dt$ — координаты и скорость центра инерции Земли в системе BRS. Функции S, F^{ik}, D^{ik}, D^{ikm} определяются согласно таким формулам (точка над функцией означает взятие полной производной по времени t, запятая в нижнем индексе — частное дифференцирование по пространственным координатам):

$$\dot{S}(t) = \frac{1}{2}\,v_E^2 + \bar{U}(\mathrm{x}_E); \tag{3}$$

$$\dot{F}^{ij}(t) = \frac{3}{2}\,(v_E^i a_E^j - v_E^j a_E^i) - 2\,[\bar{U}^i_{,j}(\mathrm{x}_E) - \bar{U}^j_{,i}(\mathrm{x}_E)]; \tag{4}$$

$$D^{ij}(t) = \delta^{ij}\bar{U}(\mathrm{x}_E), \qquad \delta^{ij} = \mathrm{diag}(1, 1, 1); \tag{5}$$

$$D^{ijk}(t) = \frac{1}{2}\,(\delta^{ij}a_E^k + \delta^{ik}a_E^j - \delta^{jk}a_E^i); \tag{6}$$

$$a_E^i(t) = dv_E^i/dt = \bar{U}_{,i}(\mathrm{x}_E) + \frac{1}{2}\,\hat{M}_E^{-1}\bar{U}_{,ijp}(\mathrm{x}_E)\,\hat{I}^{jp}_{(E)} + c^{-2}\bar{G}^i(t); \tag{7}$$

$$\bar{G}^i(t) = -4\bar{U}(\mathrm{x}_E)\bar{U}_{,i}(\mathrm{x}_E) - \bar{U}_{,k}(\mathrm{x}_E)\,v_E^k v_E^i + \bar{U}_{,i}(\mathrm{x}_E)\,v_E^2 -$$
$$- 3\dot{\bar{U}}(\mathrm{x}_E)\,v_E^i + 4\dot{\bar{U}}^i(\mathrm{x}_E) - 4\bar{U}^k_{,i}(\mathrm{x}_E)\,v_E^k + \bar{W}_{,i}(\mathrm{x}_E); \tag{8}$$

$$\bar{U}(\mathrm{x}) = \sum_{A\neq E}\frac{G\hat{M}_A}{r_A}; \tag{9}$$

$$\bar{U}^i(\mathrm{x}) = \sum_{A\neq E}\frac{G\hat{M}_A}{r_A}\,v_A^i; \tag{10}$$

$$\bar{W}(\mathrm{x}) = \frac{3}{2}\sum_{A\neq E}\frac{G\hat{M}_A}{r_A}\,v_A^2 - \sum_{A\neq E}\sum_{B\neq A}\frac{G^2\hat{M}_A\hat{M}_B}{r_A r_{AB}} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_{A\neq E}G\hat{M}_A r_A, \tag{11}$$

где $\mathrm{x} = x^i$; $r_A = (r_A^i r_{Ai})^{1/2}$; $r_A^i = x^i - x_A^i(t)$; $x_A^i(t)$ и $v_A^i(t) = dx_A^i/dt$ — координаты и скорость внешнего тела A (Солнца, Луны, планеты) в BRS. Подстановка $\mathrm{x} = \mathrm{x}_E$ осуществляется после выполнения дифференцирования. В формулах (3)—(11) функции $\bar{U}(\mathrm{x})$, $\bar{U}^i(\mathrm{x})$, $\bar{W}(\mathrm{x})$ являются возмущающими гравитационными потенциалами от Солнца, Луны и планет; $\hat{M}_E$ и $\hat{I}^{ij}_E$ — релятивистские масса и моменты инерции Земли, определенные в системе GRS; $\hat{M}_A$ $(A \neq E)$ — релятивистская масса тела A (Солнца, Луны, планеты), определенная соответственно в гелиоцентрической или планетоцентрической системах координат, построение которых аналогично построению GRS.

Отметим, что формулы (1) и (3) дают связь между земным динамическим (TDT) и барицентрическим динамическим (TDB) временами; формула (4) дает аналитическое выражение для скорости релятивистской прецессии (де Ситтера, Лензе — Тирринга и Томаса) пространственных осей GRS по отношению к пространственным осям BRS («неподвижным» звездам); формула (5) описывает гравитационное (эйнштейновское) сокращение размеров тел при переходе от одной системы отсчета к другой, которое в гармонических координатах является изотропным; формулы (7) и (8) представляют известные [1] релятивистские уравнения движения центра инерции Земли в BRS, выведенные с помощью метода асимптотических сшивок. Считаем важным отметить простоту формул перехода (1) и (2), которая достигнута благодаря использованию одного и того же гармонического координатного условия при нахождении барицентрической и геоцентрической метрик из уравнений Эйнштейна.

Мы рассматривали спутник как пробное тело, которое движется по геодезической мировой линии в искривленном пространстве-времени. Уравнения движения спутника в GRS выведены двумя способами. Первый — состоит в выводе уравнений геодезической в BRS и последующем преобразовании этих уравнений в GRS с помощью формул (1)—(11). При этом оказывается, что саму геоцентрическую метрику достаточно знать лишь в линейном по G приближении (без знания нелинейного члена в компоненте $\hat{g}_{00}$). Второй способ состоит в выводе уравнений геодезической непосредственно в GRS. Для реализации этого способа необходимо учитывать вклад нелинейного члена в компоненту $\hat{g}_{00}$ геоцентрической метрики. Естественно ожидать, что с учетом всех необходимых преобразований от одной системы отсчета к другой (преобразование пространственных координат и времени, левых и правых частей уравнения геодезической, преобразования мультипольных моментов геопотенциала и т. д.) оба способа дадут одинаковый конечный результат. Это оказалось действительно так. Уравнения движения спутника в системе GRS получены нами с точностью, более чем достаточной для современных потребностей, и имеют следующий вид:

$$\frac{d^2w^i}{du^2} = F_0^i + F_1^i + F_2^i + F_3^i + c^{-2}(\Phi_1^i + \Phi_2^i + \Phi_3^i + \Phi_4^i + \Phi_5^i + \Phi_6^i), \tag{12}$$

где силы F_n^i $(n = 0, 1, 2, 3)$ и Φ_k^i $(k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ даются такими выражениями:

$$F_0^i = -\frac{G\hat{M}_E}{\hat{r}_E^3} w^i; \tag{13}$$

$$F_1^i = \frac{3}{2}\frac{G}{\hat{r}_E^5}\left(\hat{I}_{(E)}^{kk} w^i + 2\hat{I}_{(E)}^{ik} w^k - \frac{5}{\hat{r}_E^2}\hat{I}_{(E)}^{km} w^k w^m w^i\right) + \dots; \tag{14}$$

$$F_2^i = \bar{U}_{,ik}(\mathrm{x}_E) w^k + \frac{1}{2}\bar{U}_{,ikm}(\mathrm{x}_E) w^k w^m + \dots; \tag{15}$$

$$F_3^i = -\frac{1}{2}\hat{M}_E^{-1}\bar{U}_{,ikm}(\mathrm{x}_E)\hat{I}_{(E)}^{km} + \dots; \tag{16}$$

$$\Phi_1^i = \frac{G\hat{M}_E}{\hat{r}_E^3}\left[4(w^k\dot{w}^k)\dot{w}^i + \left(4\frac{G\hat{M}_E}{\hat{r}_E} - \dot{w}^2\right)w^i\right]; \tag{17}$$

$$\Phi_2^i = -\frac{9}{\hat{r}_E^5} G\varepsilon_{kqp}\Omega_E^q \hat{I}^{pj}_{(E)} w^k w^j \dot{w}^j + \frac{4}{\hat{r}_E^3} G\Omega_E^j \hat{I}^{km}_{(E)} \left[\varepsilon_{ijk}\left(\delta^{mp} - \frac{3}{\hat{r}_E^2} w^m w^p\right) - \right.$$

$$\left. - \varepsilon_{pjk}\left(\delta^{im} - \frac{3}{\hat{r}_E^2} w^i w^m\right)\right] \dot{w}^p, \tag{18}$$

где ε_{ijk} — полностью антисимметричный символ Леви-Чивита ($\varepsilon_{123} = +1$);

$$\Phi_3^i = 4\frac{G^2\hat{M}_E}{\hat{r}_E^6}\left(-2\hat{I}^{k\,k}_{(E)} w^i - 3\hat{I}^{ik}_{(E)} w^k + \frac{9}{\hat{r}_E^2}\hat{I}^{km}_{(E)} w^k w^m w^i\right) +$$

$$+ \frac{3}{2}\frac{G}{\hat{r}_E^5}\dot{w}^2\left(\hat{I}^{kk}_{(E)} w^i + 2\hat{I}^{ik}_{(E)} w^k - \frac{5}{\hat{r}_E^2}\hat{I}^{km}_{(E)} w^k w^m w^i\right) +$$

$$+ 6\frac{G}{\hat{r}_E^5}\dot{w}^n \dot{w}^i\left(-\hat{I}^{kk}_{(E)} w^n - 2\hat{I}^{nk}_{(E)} w^k + \frac{5}{\hat{r}_E^2}\hat{I}^{km}_{(E)} w^k w^m w^n\right); \tag{19}$$

$$\Phi_4^i = -4\frac{G\hat{M}_E}{\hat{r}_E}\bar{U}_{,ij}(\mathrm{x}_E) w^j + 2\frac{G\hat{M}_E}{\hat{r}_E^3}\bar{U}_{,jp}(\mathrm{x}_E) w^j w^p w^i; \tag{20}$$

$$\Phi_5^i = w^q\,(-4\dot{w}^i\dot{w}^p\bar{U}_{,pq}(\mathrm{x}_E) + \dot{w}^2\bar{U}_{,iq}(\mathrm{x}_E) + 4\dot{w}^j\bar{U}^i_{,jq}(\mathrm{x}_E) - 4\dot{w}^j\bar{U}^j_{,iq}(\mathrm{x}_E) -$$

$$- 4v_E^i\dot{w}^j\bar{U}_{,jq}(\mathrm{x}_E) + 4v_E^j\dot{w}^j\bar{U}_{,iq}(\mathrm{x}_E) + 2\delta^{iq}a_E^j\dot{w}^j - 2a_E^i\dot{w}^q); \tag{21}$$

$$\Phi_6^i = w^j\Big(F^{ik}\bar{U}_{,kj}(\mathrm{x}_E) + F^{jk}\bar{U}_{,ki}(\mathrm{x}_E) - 4v_E^k\bar{U}^k_{,ij}(\mathrm{x}_E) + 2v_E^2\bar{U}_{,ij}(\mathrm{x}_E) -$$

$$- 2\bar{U}(\mathrm{x}_E)\bar{U}_{,ij}(\mathrm{x}_E) - \frac{1}{2}v_E^q v_E^i\bar{U}_{,qj}(\mathrm{x}_E) - \frac{1}{2}v_E^q v_E^j\bar{U}_{,qi}(\mathrm{x}_E) + \bar{W}_{,ij}(\mathrm{x}_E) +$$

$$+ \delta^{ij}\ddot{\bar{U}}(\mathrm{x}_E) + 2\dot{\bar{U}}^i_{,j}(\mathrm{x}_E) + 2\dot{\bar{U}}^j_{,i}(\mathrm{x}_E) - 3a_E^i a_E^j - v_E^i\dot{a}_E^j - v_E^j\dot{a}_E^i\Big). \tag{22}$$

В формулах (12) — (22) величины w^i представляют геоцентрические координаты спутника в GRS, зависящие от времени u; $\hat{r}_E = (w^i w_i)^{1/2}$; $\dot{w}^i$ — геоцентрическая скорость спутника; Ω_E^i — компоненты угловой скорости вращения Земли в GRS; точка над w^i означает дифференцирование по времени u; точка над функциями a_E^i, $\bar{U}$, $\bar{U}^i$ означает дифференцирование по времени t; F_0^i описывает ньютоновское гравитационное поле сферически-симметричной Земли; F_1^i — ньютоновские возмущения от мультипольных моментов Земли (квадрупольного, октупольного и т. д.); F_2^i — ньютоновские приливные возмущения от Солнца, Луны и планет; F_3^i — возмущения от сил инерции, возникающие из-за отклонения мировой линии Земли от геодезической [7]; Φ_1^i — релятивистское шварцшильдовское возмущение; Φ_2^i — релятивистское лензе-тирринговское возмущение, возникающее из-за вращения Земли; Φ_3^i — релятивистское возмущение от квадрупольного момента Земли; Φ_4^i — релятивистское возмущение, обусловленное нелинейным взаимодействием сферически-симметричной составляющей гравитационного поля Земли и ньютоновским приливным полем внешних масс; Φ_5^i — релятивистское (гравимагнитное) приливное возмущение от внешних масс; Φ_6^i — релятивистская поправка к силе F_2^i.

1. *Брумберг В. А.* Релятивистская небесная механика.— М.: Наука, 1972.—384 с.
2. *Копейкин С. М.* О методе решения внешней и внутренней задач в проблеме движения тел в ОТО // Тр. Гос. астрон. ин-та им. П. К. Штернберга.— 1987.—**59.**— С. 53—71.
3. *Уилл К.* Теория и эксперимент в гравитационной физике.— М.: Энергоатомиздат, 1985.—296 с.
4. *Фок В. А.* Теория пространства, времени и тяготения.— М.: Гостехтеориздат, 1955.—504 с.
5. *Ashby N., Bertotti B.* Relativistic perturbations of an Earth satellite // Phys. Rev. Lett.— 1984.—**52**, N 7.— P. 485—488.
6. *Ashby N., Bertotti B.* Relativistic effects in local inertial frames // Phys. Rev.— 1986.— **D34**, N 8.— P. 2246—2259.
7. *Brumberg V. A.* Contemporary problems of relativistic celestial mechanics and astrometry // Dynamics of the solar system / Ed. by M. Šidlichovský.— Praha, 1987.— P. 3—9.— (Publs Astron. Inst. Czech. Acad. Sci.; N 68).
8. *Cugusi L., Proverbio E.* Relativistic effects on the motion of Earth's artificial satellites // Astron. and Astrophys.— 1978.—**69**, N 3.— P. 321—325.
9. *Damour T.* The problem of motion in Newtonian and Einsteinian gravity // 300 years of gravitation.— Cambridge: Cambridge Univ. press, 1987.— P. 128—198.
10. *D'Eath P. D.* Dynamics of a small black hole in a background universe // Phys. Rev.— 1975.— **D11**, N 6.— P. 1387—1403.
11. *D'Eath P. D.* Interaction of two black holes in the slow-motion limit // Ibid.— 1975.— **D12**, N 8.— P. 2183—2199.
12. *Fukushima T., Fujimoto M. K., Kinoshita H., Aoki S.* Coordinate systems in the general relativistic framework // Relativity in celestial mechanics and astrometry.— Dordrecht: Reidel, 1986.— P. 145—168.
13. *Martin C. F., Torrence M. H., Misner S. W.* Relativistic effects on an Earth-orbiting satellite in the barycenter coordinate system // J. Geophys. Res.— 1985.—**90**, N B11.— P. 9403—9410.
14. *Thorne K. S.* Multipole expansions of gravitational radiation // Rev. Mod. Phys.— 1980.—**52**.— P. 299—339.
15. *Thorne K. S., Hartle J. B.* Laws of motion and precession for black holes and other bodies // Phys. Rev.— 1985.— **D31**, N 8.— P. 1815—1837.
16. *Vincent M. A.* The relativistic equations of motion for a satellite in orbit about a finite-size, rotating Earth // Celest. Mech.— 1986.—**39**, N 1.— P. 15—21.
17. *Zhu S. Y., Groten E., Pan R. S. et al.* Motion of satellites — the choice of reference frames // IAU Colloq. N 96.— Turku, 1987.— P. 207—210.

Ин-т прикл. астрономии АН СССР, Ленинград,
Гос. астрон. ин-т им. П. К. Штернберга, Москва

Поступила в редакцию
24.12.87