УДК 517.5

©2008. **О.Р. Шлепаков**

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КЛАССОВ ФУНКЦИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ОБРАТНОМУ НЕРАВЕНСТВУ ГЕЛЬДЕРА

В работе изучаются свойства самоулучшения показателей классов функций, удовлетворяющих обратному неравенству Гельдера.

1. Введение. Все рассматриваемые в работе функции неотрицательны на некотором интервале $I_0 \subset \mathbb{R}$. Для функции ω, числа $r \neq 0$ и интервала $I \subset I_0$ введем обозначение $\omega_I^r = \left(1/|I| \int_I \omega(t)\,dt\right)^r$, где $|\cdot|$ мера Лебега.

Пусть ненулевые числа $\alpha < \beta$. Тогда функция ω удовлетворяет неравенству Гельдера $(\omega^\alpha)_I^{1/\alpha} \leq \left(\omega^\beta\right)_I^{1/\beta}$ на любом интервале $I \subset I_0$. Для фиксированных ненулевых $\alpha < \beta$ и $\delta > 1$ через $RH_{\alpha,\beta}(\delta)$ будем обозначать класс всех функций ω, удовлетворяющих обратному неравенству Гельдера

$$\left(\omega^\beta\right)_I^{1/\beta} \leq \delta\,(\omega^\alpha)_I^{1/\alpha} \tag{1.1}$$

равномерно по всем интервалам $I \subset I_0$, т.е. постоянная $\delta > 1$ не зависит от интервала I.

При $p > 1$ класс $RH_{-1/(p-1),1}(\delta) \equiv A_p(\delta)$ называют классом весовых функций Макенхаупта (см. [1]), а при $q > 1$ класс $RH_{1,q}(\delta) \equiv G_q(\delta)$ – классом Геринга (см. [2]). Эти классы находят применения в теории весовых пространств, теории квазиконформных отображений и в других вопросах. Основные свойства классов Макенхаупта и Геринга, обуславливающие их различные применения, состоят в так называемом "самоулучшении показателей". Именно, для данных $p, \delta > 1$ существуют такое $\varepsilon > 0$, что при некотором δ' справедливо вложение

$$A_p(\delta) \subset A_{p-\varepsilon}(\delta'). \tag{1.2}$$

Аналогично, для $q, \delta > 1$ найдутся такие $\varepsilon > 0$ и δ', что

$$G_q(\delta) \subset G_{q+\varepsilon}(\delta'). \tag{1.3}$$

Эти вложения получены Б.Макенхауптом и Ф.В.Герингом в [1] и [2] соответственно. В работе Р.Р.Койфмана и Ч.Фефферманa [3] установлена связь классов Макенхаупта и Геринга друг с другом. Именно, в [3] показано, что каждый класс Макенхаупта содержится в некотором классе Геринга и наоборот, т.е.

$$A_p(\delta) \subset G_q(\delta'), \quad G_q(\delta) \subset A_p(\delta'). \tag{1.4}$$

Изучению свойств (1.2)–(1.4) посвящено большое число работ различных авторов. Сначала отметим некоторые известные в данном направлении результаты. В работах [4, 5] Б.Боярским было получено асимптотическое поведение $\varepsilon = \varepsilon(p, \delta)$ при $\delta \to 1 + 0$ и поставлена задача нахождения точного предельного значения для ε во вложении (1.3). Этот точный предельный показатель был найден Л.Д'Апуццо и К.Сбордоне [6] для монотонных функций, а впоследствии Дж.Киннунен [7] показал, что условие монотонности можно опустить, а также исследовал данный вопрос в многомерном случае. В работах А.А.Кореновского и А.Пополи [8–10] найдены точные предельные значения ε во вложениях (1.2) и (1.3) также без предположения монотонности соответствующих функций, а Н.А.Малаксиано [11, 12] получил точные предельные значения показателей во вложениях (1.4). Следует отметить, что в перечисленных выше работах используются различные методы нахождения предельных показателей в соответствующих вложениях. Так, в [6–10] доказательства основаны на использовании различных неравенств типа Харди, а переход от произвольных функций к монотонным осуществляется с помощью точных оценок равноизмеримых перестановок функций из соответствующих классов. В [11, 12] производится сравнение функции из заданного класса с предполагаемой экстремальной функцией из другого класса. В.И.Васюниным [13] впоследствии был предложен новый подход к изучению точных вложений (1.2) и первый из (1.4), основанный на использовании функций Беллмана, который позволил вычислить не только точные предельные значения показателей, но и найти точные значения постоянных δ'.

В данной работе рассматривается задача нахождения предельных значений показателей α', β' и точных значений постоянной δ' во вложении

$$RH_{\alpha,\beta}(\delta) \subset RH_{\alpha',\beta'}(\delta'). \tag{1.5}$$

Данная задача рассматривалась в работах других авторов. Так, например, Кореновским А.А. в [14] были найдены предельные значения показателей α', β'. Доказательство было также основано на применении неравенств типа Харди.

В нашей работе для нахождения точных параметров в (1.5) использовался метод, основанный на применении функции Беллмана, предложенный в работе [13]. Применение данного метода позволило найти не только значения показателей α', β', но и постоянной δ'. Частный случай данной задачи рассмотрен в работе [15]. В ней рассматривались функции ω, принадлежащие классам Макенхаупта и Геринга. Работа [15] дополняет результаты, полученные в [13].

Доказательство, приведенное в данной работе для общего случая, является более простым, чем доказательства частных случаев.

При подготовке данной статьи в печать автору стало известно о работе В.И.Васюнина [16], в которой был рассмотрен более общий случай, когда α и β могут принимать нулевое и бесконечные значения.

Сформулируем основной результат данной работы.

Пусть функция $\omega \in RH_{\alpha,\beta}(\delta)$, где $\alpha < \beta$ и $\alpha \cdot \beta \neq 0$, α, β, δ – фиксированы. Интересует вопрос, для каких $\gamma \neq 0$ и при как значениях $B_1 = B_1(\gamma)$, $B_2 = B_2(\gamma)$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{B_2} \left(\omega^{\alpha}\right)_I^{1/\alpha} \le \left(\omega^{\gamma}\right)_I^{1/\gamma} \le B_1 \left(\omega^{\beta}\right)_I^{1/\beta}, \quad (I \subset I_0) \tag{1.6}$$

для произвольной функции $\omega \in RH_{\alpha,\beta}(\delta)$.[1]

Теорема 1. *Пусть γ^+ и γ^- – положительный и отрицательный корни уравнения*

$$\left(1-\frac{\alpha}{x}\right)^{1/\alpha} = \delta\left(1-\frac{\beta}{x}\right)^{1/\beta}.$$

Тогда выполнено неравенство (1.6) *с точными постоянными*

$$B_1(\gamma) = \begin{cases} +\infty, & \gamma \ge \gamma^+, \\ \left(1-\frac{\beta}{\gamma^+}\right)^{1/\beta}\left(1-\frac{\gamma}{\gamma^+}\right)^{-1/\gamma}, & \gamma^+ > \gamma \ge \beta, \gamma \ne 0, \\ 1, & \beta > \gamma, \gamma \ne 0, \end{cases} \tag{1.7}$$

$$B_2(\gamma) = \begin{cases} +\infty, & \gamma \le \gamma^-, \\ \left(1-\frac{\gamma}{\gamma^-}\right)^{1/\gamma}\left(1-\frac{\alpha}{\gamma^-}\right)^{-1/\alpha}, & \gamma^- < \gamma \le \alpha, \gamma \ne 0, \\ 1, & \alpha < \gamma, \gamma \ne 0, \end{cases} \tag{1.8}$$

и при этом значения B_1 и B_2, вообще говоря, нельзя уменьшить.

Замечание 1. Отметим, что корни уравнения из условия теоремы удовлетворяют соотношениям: $\gamma^- < \min\{0, \alpha\}$ и $\gamma^+ > \max\{0, \beta\}$.

2. Вспомогательные результаты. Для функции $\omega \in RH_{\alpha,\beta}(\delta)$ из неравенства Гельдера следует, что точка $x = ((\omega^\beta)_I, (\omega^\alpha)_I)$ лежит в области

$$\Omega_{\alpha,\beta}(\delta) = \left\{x = (x_1, x_2) > 0 : \quad 1 \le x_1^{1/\beta} x_2^{-1/\alpha} \le \delta\right\}.$$

Определим на области $\Omega^\delta_{\alpha,\beta}$ две функции

$$B_{min}(x;\gamma,\delta) = \inf_{\omega\in RH_{\alpha,\beta}(\delta)} \left\{ (\omega^\gamma)_I : (\omega^\beta)_I = x_1, (\omega^\alpha)_I = x_2 \right\}, \tag{2.1}$$

$$B_{max}(x;\gamma,\delta) = \sup_{\omega\in RH_{\alpha,\beta}(\delta)} \left\{ (\omega^\gamma)_I : (\omega^\beta)_I = x_1, (\omega^\alpha)_I = x_2 \right\}. \tag{2.2}$$

Поскольку для любой точки $x \in \Omega_{\alpha,\beta}(\delta)$ найдется функция ω, для которой $\left(\omega^\beta\right)_I = x_1$ и $(\omega^\alpha)_I = x_2$ (такая функция будет предъявлена ниже), то функции B_{min} и B_{max} определены корректно на всей области $\Omega_{\alpha,\beta}(\delta)$. В дальнейшем, говоря одновременно о функциях B_{min} и B_{max}, будем опускать индексы min и max. Функции B не зависят от интервала I, для двух интервалов I_1 и I_2 линейное отображение одного интервала на другой дает взаимно однозначное соответствие между классами $RH_{\alpha,\beta}(\delta, I_1)$ и $RH_{\alpha,\beta}(\delta, I_2)$, причем при таком отображении все средние значения функций не изменяются. Мы будем опускать значения параметров функций B, в случаях, когда ясно, что они фиксированы.

Через $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$ будем обозначать отрезок, интервал и полуинтервал с концами a и b не зависимо от того, какой из них больше.

[1] При $\gamma < \beta$ правая часть неравенства (1.6) превращается в обычное неравенство Гельдера, т.е. $B_1 = 1$, а при $\alpha < \gamma$ – левая часть, т.е. $B_2 = 1$.

Через $u^{\pm}_{\alpha,\beta}$ обозначим две функции, обратные к функции

$$t \ \to \ (1-t)\left(1-\frac{\alpha}{\alpha-\beta}t\right)^{-(\alpha-\beta)/\alpha}.$$

С помощью этой функции введем величины $s^{\pm} = u^{\pm}_{\alpha,\beta}(\frac{1}{\delta^\beta})$. $\frac{1}{\delta^\beta} > 1$, при $\beta < 0$, и $\frac{1}{\delta^\beta} < 1$, при $\beta > 0$. Поэтому величины $s^{\pm}$ определены корректно.

Кроме того, введем переменные $r^{\pm} = u^{\pm}_{\alpha,\beta}\left(\delta^{-\beta}x_1 x_2^{-\beta/\alpha}\right)$, и отметим, что $r^{\pm} = s^{\pm}$, когда $x_1^{1/\beta} = x_2^{1/\alpha}$.

Для функций B_{min}, B_{max} справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *При* $x_1^{1/\beta} = x_2^{1/\alpha}$ *справедливо равенство*

$$B_{max}(x;\gamma,\delta) = B_{min}(x;\gamma,\delta) = x_1^{\gamma/\beta} = x_2^{\gamma/\alpha}.$$

В остальных случаях

$$B_{min}(x;\gamma,\delta) = \begin{cases} x_1^{\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}} x_2^{\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}} \left(\frac{1-s^+}{1-r^+}\right)^{\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}} \left(\frac{1-\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}r^+}{1-\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}s^+}\right), \\ \gamma \in (-\infty, \max\{0,\beta\}] \setminus [\alpha, \min\{0,\beta\}], \\ x_1^{\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}} x_2^{\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}} \left(\frac{1-s^-}{1-r^-}\right)^{\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}} \left(\frac{1-\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}r^-}{1-\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}s^-}\right), \\ \gamma \in [\min\{\alpha,0\}, +\infty) \setminus [\max\{\alpha,0\}, \beta], \end{cases} \tag{2.3}$$

$$B_{max}(x;\gamma,\delta) = \begin{cases} x_1^{\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}} x_2^{\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}} \left(\frac{1-s^+}{1-r^+}\right)^{\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}} \left(\frac{1-\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}r^+}{1-\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}s^+}\right), \\ \gamma \in [\min\{\alpha,0\}, \gamma^+) \setminus [\max\{\alpha,0\}, \beta], \\ x_1^{\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}} x_2^{\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}} \left(\frac{1-s^-}{1-r^-}\right)^{\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}} \left(\frac{1-\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}r^-}{1-\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}s^-}\right), \\ \gamma \in (\gamma^-, \max\{0,\beta\}] \setminus [\alpha, \min\{0,\beta\}], \\ +\infty, \quad \gamma \in \mathbb{R} \setminus (\gamma^-, \gamma^+). \end{cases} \tag{2.4}$$

Через $\tilde{B}_{min}(x;\gamma,\delta)$ и $\tilde{B}_{max}(x;\gamma,\delta)$ обозначим выражения, стоящие в правых частях равенств (2.3) и (2.4) соответственно.

Для истинных значений функции Беллмана, определенных равенствами (2.1) и (2.2), будем использовать обычные обозначения B_{min} и B_{max}.

Для доказательства теоремы нам надо доказать, что

$$B_{min} \le \tilde{B}_{min}, \quad B_{max} \ge \tilde{B}_{max}, \tag{2.5}$$

$$B_{min} \ge \tilde{B}_{min}, \quad B_{max} \le \tilde{B}_{max}. \tag{2.6}$$

Перед этим дадим краткие пояснения, каким образом были получены равенства (2.3) и (2.4).

Во-первых, мы искали функции B_{min} и B_{max} в виде выпуклых вниз и вверх, соответственно. Действительно, если мы разобьем интервал I на две части $I = I^- \cup I^+$, $|I^\pm| = a^\pm |I|$, рассмотрим экстремальные (или в некотором смысле близкие к экстремальным) функции $\omega^\pm$, заданные соответственно на промежутках $I^\pm$, и для функции ω, заданной на I, совпадающей с ω^- на I^- и с ω^+ на I^+, напишем равенство:

$$\left(\omega^\gamma\right)_I = a^- \left(\omega^\gamma\right)_{I^-} + a^+ \left(\omega^\gamma\right)_{I^+},$$

то мы видим, что в правой части стоит выпуклая комбинация значений функции Беллмана B в точках $x^\pm$ (или близких к этим значениям), а среднее в левой части, по определению функции Беллмана, лежит между $B_{min}(x^0)$ и $B_{max}(x^0)$, $x^0 = a^- x^- + a^+ x^+$. Это рассуждение приводит нас к условию выпуклости вниз функции B_{min} и выпуклости вверх функции B_{max}.

Во-вторых, покажем, что функция B представима в виде:

$$B\left(x_1, x_2; \gamma, \delta\right) = x_1^{\frac{\gamma}{\beta}} \tilde{g}_1 \left(x_1 x_2^{-\frac{\beta}{\alpha}}; \gamma, \delta\right),$$

где $\tilde{g}_1\left(\cdot; \gamma, \delta\right)$– функция на отрезке $\left[1, \delta^\beta\right]$, удовлетворяющая условию $\tilde{g}_1\left(1; \gamma, \delta\right) = 1$, и, кроме того, $\tilde{g}_1 \geq 1$ при $\frac{\gamma}{\beta} \bar{\in} (0,1)$ и $0 \leq \tilde{g}_1 \leq 1$ при $\frac{\gamma}{\beta} \in (0,1)$.

Для любой функции $\omega \in RH^\delta_{\alpha,\beta}\left(I_0\right)$ и произвольной положительной константы t, $\tilde{\omega} = t\omega \in RH^\delta_{\alpha,\beta}\left(I_0\right)$. Средние значения этих функций связаны соотношениями $\left(\tilde{\omega}^\alpha\right)_I = t^\alpha \left(\omega^\alpha\right)_I$, $\left(\tilde{\omega}^\beta\right)_I = t^\beta \left(\omega^\beta\right)_I$ и $\left(\tilde{\omega}^\gamma\right)_I = t^\gamma \left(\omega^\gamma\right)_I$. Переходя к верхним (нижним) граням в последнем из них, получаем

$$B\left(t^\beta x_1, t^\alpha x_2; \gamma, \delta\right) = t^\gamma B\left(x_1, x_2; \gamma, \delta\right).$$

Положим $t = x_2^{-1/\alpha}$ и получим [2]

$$B\left(x_1 x_2^{-\beta/\alpha}, 1; \gamma, \delta\right) = x_2^{-\gamma/\alpha} B\left(x_1, x_2; \gamma, \delta\right).$$

Откуда имеем, что $B\left(x\right) = x_1^{\gamma/\beta}\left(x_1 x_2^{-\beta/\alpha}\right)^{-\gamma/\beta} B\left(x_1 x_2^{-\beta/\alpha}, 1; \gamma, \delta\right) = x_1^{\gamma/\beta} \tilde{g}_1 \left(x_1 x_2^{-\beta/\alpha}\right)$, где $\tilde{g}_1$ – функция на отрезке $\left[1, \delta^\beta\right]$, определяемая тождеством $\tilde{g}_1\left(y\right) = y^{-\gamma/\beta} B\left(y, 1\right)$. Согласно неравенству Гельдера, $\left(\omega^\gamma\right)_I \leq \left(\omega^\beta\right)_I^{\gamma/\beta}$ при $\gamma/\beta \in (0,1)$, и $\left(\omega^\gamma\right)_I \geq \left(\omega^\beta\right)_I^{\gamma/\beta}$ при $\gamma/\beta \bar{\in} (0,1)$, откуда следует, что $0 \leq \tilde{g}_1 \leq 1$ при $\gamma/\beta \in$

[2]Данное представление нам необходимо, чтобы преобразовать функцию B двух переменных к некоторой функции одной переменной. В данном случае мы сделали это "взяв за главную" переменную x_1 и исключили переменную x_2. Можно было строить рассуждения "взяв за главную" переменную x_2. Для этого нам надо было бы исключить переменную x_1, положив $t = x_1^{-1/\beta}$. В результате мы получили бы соотношение $B\left(1, x_1^{-\alpha/\beta} x_2\right) = x_2^{-\gamma/\beta} B(x_1, x_2)$, и, преобразовав его, $B(x_1, x_2) = x_2^{\gamma/\alpha} \tilde{g}_2 \left(x_1^{-\alpha/\beta} x_2\right)$.

$(0,1)$ и $\tilde{g}_1 \geq 1$ при $\gamma/\beta \bar{\in} (0,1)$. Более того, так как тождество $x_1^{1/\beta} = x_2^{1/\alpha}$ справедливо тогда и только тогда, когда $\omega = x_1^{1/\beta} = x_2^{1/\alpha} = const$, то $B\left(x_1 x_2^{-\beta/\alpha}, 1; \alpha, \beta, \gamma, \delta\right) = x_1^{\gamma/\beta}$, т.е. $\tilde{g}_1(1) = 1$.

Введем новую переменную $y = x_1 x_2^{-\beta/\alpha}$ и считаем в терминах функции $\tilde{g}_1$ матрицу вторых производных функции B. Из условий выпуклости B_{min} и вогнутости B_{max} мы получаем, что матрица вторых производных функции B должна быть не просто знакоопределенной, а еще и вырожденной. Приравнивая её определитель к нулю, мы приходим к дифференциальному уравнению, решая которое, мы и получаем необходимые формулы. Данное рассуждение не может быть строгим доказательством данных формул. Поэтому вернемся к доказательству неравенств (2.5) и (2.6). Неравенства (2.5) доказываются с помощью предъявления экстремальной функции, что отражено в лемме 1. Доказательство неравенств (2.6) содержится в лемме 5, которая опирается на леммы 2–4. Данные леммы будут сформулированы, а доказательство их аналогично соответствующим леммам в работе [13].

Лемма 1. *Для $x \in \Omega^{\delta}_{\alpha,\beta}$ и $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ справедливы неравенства*

$$B_{max}(x) \geq \tilde{B}_{max}(x), \quad B_{min}(x) \leq \tilde{B}_{min}(x).$$

Замечание 2. Для произвольной точки $x \in \Omega^{\delta}_{\alpha,\beta}$, для которой $x_1^{1/\beta} x_2^{-1/\alpha} \neq 1$ на отрезке $[0,1]$ положим

$$\omega_{c,a,\nu}(t) = \begin{cases} ca^{\nu} t^{-\nu}, & 0 \leq t \leq a, \\ c, & a \leq t \leq 1. \end{cases}$$

где $a \in (0,1]$.

Для того, чтобы получить экстремальную функцию для B, возьмем

$$\nu = \frac{1}{\gamma}, \quad a = \frac{s-r}{s\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha-\beta} r\right)}, \quad c = \left(x_1 \frac{(1-s)\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha-\beta} r\right)}{(1-r)\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha-\beta} s\right)} \right)^{1/\beta}$$

с выбором знаков для γ, s и r в соответствии с формулами (2.3) и (2.4).

Лемма 2. *Пусть $x^{\pm}$ – две произвольные точки области $\Omega^{\delta}_{\alpha,\beta}$. Если отрезок $[x^-, x^+]$, соединяющий эти точки, целиком лежит в $\Omega^{\delta}_{\alpha,\beta}$, то для любой пары неотрицательных чисел $\alpha^{\pm}$, удовлетворяющих условию $\alpha^- + \alpha^+ = 1$, справедливы неравенства*

$$\tilde{B}_{max}\left(\alpha^- x^- + \alpha^+ x^+\right) \geq \alpha^- \tilde{B}_{max}\left(x^-\right) + \alpha^+ \tilde{B}_{max}\left(x^+\right),$$

$$\tilde{B}_{min}\left(\alpha^- x^- + \alpha^+ x^+\right) \leq \alpha^- \tilde{B}_{min}\left(x^-\right) + \alpha^+ \tilde{B}_{min}\left(x^+\right).$$

Лемма 3. *Пусть задан параметр $\delta > 1$. Тогда для любого $\varepsilon > \delta$ и для любой функции $\omega \in RH^{\delta}_{\alpha,\beta}(I)$ существует разбиение $I = I^- \cup I^+$, $|I^{\pm}| = \nu^{\pm}|I|$, при котором* *весь отрезок, соединяющий точки* $x^\pm = \left((\omega^\beta)_{I^\pm}, (\omega^\alpha)_{I^\pm}\right)$*, лежит в* $\Omega^\varepsilon_{\alpha,\beta}$*. Более того, параметры разбиения* $\nu^\pm$ *могут быть выбраны равномерно (относительно функции* ω *и, следовательно, относительно интервала* I*) отдаленными от 0 и от 1.*

Лемма 4. *Пусть* $x \in \Omega^\delta_{\alpha,\beta}$*,* $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *и* $\varepsilon > \delta$*. Тогда справедливы неравенства*

$$B_{max}(x;\alpha,\beta,\gamma,\delta) \le \tilde{B}_{max}(x;\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon),$$
$$B_{min}(x;\alpha,\beta,\gamma,\delta) \ge \tilde{B}_{min}(x;\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon).$$

Лемма 5. *Пусть* $x \in \Omega^\delta_{\alpha,\beta}$*,* $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*. Тогда справедливы неравенства* (4.2).

Доказательство. Покажем, что из леммы 4 следуют неравенства (4.2).

Эти неравенства можно получить, переходя к пределу при $\varepsilon \to \delta$. Действительно, $\tilde{B}_{min}$ – непрерывная функция параметра ε. Рассматривая $\tilde{B}_{max}$, обратим внимание отдельно на ее конечные и бесконечные значения. Если $\gamma \notin \left(\alpha + \frac{\beta-\alpha}{s^-\left(\delta^{-\beta}\right)}, \alpha + \frac{\beta-\alpha}{s^+\left(\delta^{-\beta}\right)}\right)$, то $\gamma \notin \left(\alpha + \frac{\beta-\alpha}{s^-\left(\varepsilon^{-\beta}\right)}, \alpha + \frac{\beta-\alpha}{s^+\left(\varepsilon^{-\beta}\right)}\right)$ для всех ε, удовлетворяющих условию леммы 4. Поэтому $B_{max}(x;\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \tilde{B}_{max}(x;\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon) = +\infty$ и первое неравенство в (4.2) становится очевидным. Если $\gamma \in \left(\alpha + \frac{\beta-\alpha}{s^-\left(\delta^{-\beta}\right)}, \alpha + \frac{\beta-\alpha}{s^+\left(\delta^{-\beta}\right)}\right)$, то для ε достаточно близких к δ имеем $\gamma \in \left(\alpha + \frac{\beta-\alpha}{s^-\left(\varepsilon^{-\beta}\right)}, \alpha + \frac{\beta-\alpha}{s^+\left(\varepsilon^{-\beta}\right)}\right)$, поскольку интервалы открыты. Следовательно, мы опять получили конечную и непрерывную функцию $\tilde{B}_{max}$ как функцию параметра ε, и можем переходить к пределу при $\varepsilon \to \delta$.

Лемма 5 доказана, а с ней и теорема 2.

3. Доказательство теоремы 1. По определению функций $u^\pm_{\alpha,\beta}$ имеем, что величины $s^\pm$ и $\gamma^\pm$ связаны соотношением

$$\gamma^\pm = \alpha + (\beta - \alpha)/s^\pm. \tag{3.1}$$

В силу определения функций B_{min} и B_{max} мы можем записать следующие соотношения для констант B_1 и B_2:

$$B_1(\gamma) = \begin{cases} \sup_{x\in\Omega^\delta_{\alpha,\beta}} \left\{x_1^{-1/\beta} B^{1/\gamma}_{max}(x;\gamma,\delta)\right\}, & \text{при } \gamma > 0, \\ \sup_{x\in\Omega^\delta_{\alpha,\beta}} \left\{x_1^{-1/\beta} B^{1/\gamma}_{min}(x;\gamma,\delta)\right\}, & \text{при } \gamma < 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

$$B_2(\gamma) = \begin{cases} \sup_{x\in\Omega^\delta_{\alpha,\beta}} \left\{x_2^{1/\alpha} B^{-1/\gamma}_{max}(x;\gamma,\delta)\right\}, & \text{при } \gamma < 0, \\ \sup_{x\in\Omega^\delta_{\alpha,\beta}} \left\{x_2^{1/\alpha} B^{-1/\gamma}_{min}(x;\gamma,\delta)\right\}, & \text{при } \gamma > 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Исходя из определения чисел $r^\pm$ и $s^\pm$, имеем

$$x_1 x_2^{-\frac{\beta}{\alpha}} = \left(\frac{1-r^\pm}{1-s^\pm}\right)\left(\frac{1-\frac{\alpha}{\alpha-\beta}s^\pm}{1-\frac{\alpha}{\alpha-\beta}r^\pm}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}}. \tag{3.4}$$

Обозначим

$$g_1(r) = \left(\tfrac{1-s}{1-r}\right)^{1/\beta} \left(\tfrac{(\alpha-\beta)-\alpha r}{(\alpha-\beta)-\alpha s}\right)^{1/\beta-1/\gamma} \left(\tfrac{(\alpha-\beta)-(\alpha-\gamma)r}{(\alpha-\beta)-(\alpha-\gamma)s}\right)^{1/\gamma},[3]$$

$$g_2(r) = \left(\frac{(\alpha-\beta)-\alpha r}{(\alpha-\beta)-\alpha s}\right)^{1/\gamma-1/\alpha} \left(\frac{(\alpha-\beta)-(\alpha-\gamma)r}{(\alpha-\beta)-(\alpha-\gamma)s}\right)^{-1/\gamma}.$$

С помощью (3.4) формулы (3.2), (3.3) запишем в следующем виде

$$B_1(\gamma) = \max_{r\in[0,s]} \{g_1(r)\}, \quad B_2(\gamma) = \max_{r\in[0,s]} \{g_2(r)\}, \tag{3.5}$$

где знаки r, s в первом из (3.5) совпадают со знаками для функции B_{max}, при $\gamma > 0$ и со знаками для функции B_{min}, при $\gamma < 0$, а во втором наоборот, совпадают со знаками для функции B_{max}, при $\gamma < 0$ и со знаками для функции B_{min}, при $\gamma > 0$.

Для того, чтобы найти постоянные B_1 и B_2, нам достаточно знать интервалы монотонности функций g_1, g_2. Для этого достаточно найти логарифмические производные функций $g_1(r)$ и $g_2(r)$. Найдем

$$\frac{\partial}{\partial r}\ln g_1 = \frac{r(\beta-\gamma)}{(1-r)\left((\alpha-\beta)-\alpha r\right)\left((\alpha-\beta)-(\alpha-\gamma)r\right)}.$$

Так как $r < 1$ и, по определению r, $\alpha r > (\alpha-\beta)$ и $(\alpha-\gamma)r > (\alpha-\beta)$, то знак производной g_1' совпадает со знаком $(\ln g_1)'$, который, в свою очередь, совпадает со знаком выражения $(\beta-\gamma)r$. Теперь воспользуемся формулой (3.5) и найдем значения $B_1(\gamma)$ в зависимости от значений параметра γ.

1. $\gamma \in [\max\{0,\beta\},\gamma^+)\bigcap(0,+\infty)$ или $\gamma \in [\min\{0,\beta\},0)$.[4] Тогда $r, s > 0$ и $(\beta-\gamma)r^+ < 0$, а значит функция $g_1(r^+)$ убывает на промежутке $[0,s^+]$ и её максимум достигается при $r^+ = 0$.

$$B_1 = (1-s^+)^{1/\beta}\left((\alpha-\beta)-\alpha s^+\right)^{1/\gamma-1/\beta}\left((\alpha-\beta)-(\alpha-\gamma)s^+\right)^{-1/\gamma}(\alpha-\beta)^{1/\beta}.$$

2.[5] $\gamma \in (0,\beta)$. Знак $\frac{\partial}{\partial r}\ln g_1$ совпадает со знаком r, который совпадает со знаками для B_{max}. Поэтому, если $r > 0$, то функция возрастает на отрезке $[0,s^+]$, если $r < 0$, то функция убывает на отрезке $[s^-,0]$. В обоих случаях, максимум достигается при $r^\pm = s^\pm$. Поэтому $B_1 = 1$.

3. $\gamma \in (-\infty,\min\{\beta,0\})$. Случай аналогичен предыдущему, только знак r совпадает со знаками для B_{min}. Поэтому также $B_1 = 1$.

С помощью (3.1) формула для B_1 в первом случае, преобразуется в формулу (для того же случая) в (1.7).

Проводя аналогичные исследования функции $g_2(r)$ и применяя формулу (3.5), получим формулу (1.8).

Теорема 1 доказана.

---

[3] Функция g_1 и введенная ранее функция $\tilde g_1$ связаны соотношением $g_1 = \tilde g_1^{1/\gamma}$.

[4] Данный случай имеет место только при $\beta < 0$

[5] Данный случай имеет место только при $\beta > 0$

1. *Muckenhoupt B.* Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function, Trans. Amer. Math. Soc. **165** (1972), P.207-226.
2. *Gehring F.W.* The L^p-integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping, Acta Math. **130** (1973), P.265-277.
3. *Coifman R.R., Fefferman Ch.* Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals, Studia Math. **15** (1974), P.241-250.
4. *Bojarski B.* Remarks on the stability of reverse Hölder inequality, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser A I Math. **10** (1985), P.89-94.
5. *Wik I.* Reverse Hölder inequality with constant close to 1, Ric. Math. **39** (1990), no.1, P.151-157.
6. *D'Apuzzo L., Sbordone C.* Reverse Hölder inequalities. A sharp result, Rendiconti di Math. **10** (1990), ser. VII, P.357-366.
7. *Kinnunen J.* Sharp result on reverse Hölder inequalities, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I. Math. Diss. **95** (1994), P.1-34.
8. *Кореновский А.А.* О точном продолжении обратного неравенства Гельдера и условия Макенхаупта, Матем. заметки **52** (1992), №6, С.32-44.
9. *Popoli A.* Optimal integrability in B_p^q classes, Le Mat. **52** (1997), no.1, P.159-170.
10. *Popoli A.* Weighted reverse Holder inequalities, Rend. Acc. Sc. Fiz. Mat. **62** (1995), P.187-212.
11. *Малаксиано Н.А.* О точных вложениях классов Геринга в классы Макенхаупта, Матем. заметки **70** (2001), №5, С.742-750.
12. *Malaksiano N.A.* The precise embeddings of the one-dimensional Muckenhoupt classes in Gehring classes, Acta Sci. Math. Szeged **68** (2002), P.237-248.
13. *Васюнин В.И.* Точная константа в обратном неравенстве Гельдера для макенхауптовских весов, Алгебра и Анализ **15** (2003), №1, С.73-117.
14. *Кореновский А.А.* Об обратном неравенстве Гельдера, Математические заметки **81** (2007), вып.3, С.361–373.
15. *Шлепаков О.Р.* О экстремальных свойствах функций, удовлетворяющих обратному неравенству Гельдера. – Одес. нац. ун-т. - Одесса, 2007. – 34 с. - Рус. – Деп. в ГНТБ Украины 16.04.07, №30 – УК 2007.
16. *Васюнин В.И.* Взаимные оценки L^p-норм и функция Беллмана, Записки научных семинаров ПОМИ **355** (2008), С.81-138.

Одесский национальный ун-т
им. И.И.Мечникова
oleg@gavrilovka.com.ua

Получено 31.10.08