УДК 517.5

©2008. **О.Д. Трофименко**

ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ ДЛЯ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В данной статье получен аналог теоремы о среднем для случая полианалитических функций.

Введение. Пусть функция $f \in C(D)$ $(D : |z| < 1)$. f называется ареоларно моногенной в D тогда и только тогда, когда $(\frac{\partial}{\partial \bar{z}})f$ - аналитическая функция в D.

Пусть Ω – область в $\mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$. Функция f, локально интегрируемая в Ω, называется m-аналитической в Ω тогда и только тогда, когда $(\frac{\partial}{\partial \bar{z}})^m f = 0$ в смысле распределений.

Изучению m-аналитических функций предшествовали работы М.О.Рида [1], [2] об ареоларно моногенных функциях. По поводу результатов, связанных с различными классами m-аналитических функций, см. [3], [4]. Приведем ранее полученные результаты.

Теорема А. *(см.[1]) Если $f(z) \in C(D)$, $D : |z| < 1$, тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(A) *$f(z)$-ареоларно моногенная в D.*

(B) *Уравнение*

$$L(f; z, r) \equiv \int\limits_{C(z,r)} (\zeta - z) f(\zeta) d\zeta = 0 \tag{1}$$

выполнено для каждого $C(z, r)$ в D ($C(z, r)$ – граница замкнутого диска $D(z, r)$ с центром в точке z и радиусом r).

(C) *Уравнение*

$$A(f; z, r) \equiv \iint\limits_{D(z,r)} (\zeta - z)^2 f(\zeta) d\xi d\eta = 0 \tag{2}$$

выполнено для каждого $D(z, r)$ в D.

Теорема В. *(см.[3], гл.5) Если функция f – m-аналитична в $\Omega(\Omega \subset \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N})$, то уравнение*

$$\int\limits_{|z|=r} f(z + \zeta) z^{m-1} dz = 0 \tag{3}$$

выполнено для почти всех $\zeta \in \Omega, r \in (0, dist(\zeta, \partial\Omega))$.

Обратное утверждение также выполнено.

Теорема C. *Пусть 0 – произвольная точка в* $\Omega(\Omega \subset \mathbb{C}^n)$ *и* $\Delta^p\Phi = 0$ *в* $S_{\rho_p} \subset \Omega$ *(*$p = 0, 1, 2, ..., S_{\rho_p}$ *– сфера с радиусом* ρ_p *и центром в 0); тогда* $\forall \rho_j \le \rho_p$

$$\Phi(0) + \sum_{i=2}^{p} \rho_j^{2(i-1)} A_i = \frac{1}{\omega_N} \int\limits_{r=\rho_j} \Phi d\omega, \tag{4}$$

где A_i *не зависит от* ρ_j, ω_N *– площадь поверхности* n*-мерной единичной сферы.* В данной работе обобщены результаты для m-аналитических функций и получен аналог основного результата Пизетти для полигармонических функций (см. Теорема C).

1. Формулировка основного результата. В этом разделе приводится теорема о среднем для m-аналитических функций.

Теорема 1. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$ *и* f *–* m*-аналитична в* Ω *(*Ω *– область в* $\mathbb{C}$*). Тогда* $\forall \zeta \in \Omega$ *выполнено равенство*

$$\sum_{l=1}^{m-1} \frac{1}{(l-1)!l!} \left(\left(\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)^{l-1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}\right)^{l} \right) f(\zeta)\rho^{2l} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-\zeta|=\rho} f(z)dz, \tag{5}$$

$\rho < dist(\zeta, \partial\Omega)$.

Как промежуточный результат, получена следующая лемма, которая понадобится нам для доказательства основного результата.

Лемма. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, *тогда для любой функции вида* $f = z^k \bar{z}^{m-1}$ *выполнено равенство (5).*

Доказательство леммы. Для доказательства этой леммы рассмотрим два случая.

При $k \ge m-1$ получим

$$\int\limits_{|z-\zeta|=\rho} f(z)dz = \int\limits_{|z-\zeta|=\rho} z^k \bar{z}^{m-1} dz = 2\pi i \sum_{l=1}^{m-1} C_k^{l-1} C_k^l \rho^{2l} \zeta^{k-l+1} \bar{\zeta}^{k-l} = \tag{6}$$

$$= \sum_{l=1}^{m-1} \frac{C_k^{l-1} C_k^l (k-l+1)!(m-l-1)!}{k!(m-1)!} \left(\left(\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)^{l-1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}\right)^{l} \right) f(\zeta)\rho^{2l} =$$

$$= \sum_{l=1}^{m-1} \frac{1}{(l-1)!l!} \left(\left(\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)^{l-1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}\right)^{l} \right) f(\zeta)\rho^{2l}.$$

Если $k < m-1$, то

$$\int\limits_{|z-\zeta|=\rho} f(z)dz = \int\limits_{|z-\zeta|=\rho} z^k \bar{z}^{m-1} dz = 2\pi i \sum_{l=1}^{k+1} C_k^{l-1} C_k^l \rho^{2l} \zeta^{k-l+1} \bar{\zeta}^{k-l} = \tag{7}$$

$$= \sum_{l=1}^{m-1} \frac{1}{(l-1)!l!} \left(\left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^{l-1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \right)^{l} \right) f(\zeta) \rho^{2l}.$$

Из (6) и (7) следует, что f удовлетворяет (5). $\square$

2. Доказательство основного результата. Теперь докажем Теорему 1.

Доказательство. Используем общий вид m-аналитических функций

$$f(z) = \varphi_1(z) + \bar{z}\varphi_2(z) + ... + \bar{z}^{m-1}\varphi_m(z), \quad z \in \Omega, \tag{8}$$

где $\varphi_i(z)$ – аналитические функции в Ω (см. [3]), $i = \overline{1, m}$. Тогда m-аналитическую функцию можно локально равномерно приблизить функциями типа $g(z) = z^k \bar{z}^n$, где $k \in \mathbb{Z}_+$ и $n = \overline{0, m-1}$. Следовательно, используя результат Леммы, получаем, что любая m-аналитическая функция удовлетворяет (5). $\square$

1. *Maxwell O. Reade* On areol monogenic functions. – Bulletin of the American Mathematical Society, **53**, 1947, PP.98-103.
2. *Maxwell O. Reade* A theorem of Fédoroff. – Duke Math.J., **18**, PP.105-109.
3. *M.B.Balk* Polyanalytic functions and their generalizations. – Progress in Science and Technology, **85**, VINITI, PP.187-246.
4. *Volchkov V.V.* Integral Geometry and Convolution Equations. – Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London. – 454p.

Донецкий национальный ун-т
odtrofimenko@gmail.com

Получено 28.10.08