УДК 517.5

©2008. **Р.Р. Салимов**

ОЦЕНКА ВНУТРЕННЕЙ ДИЛАТАЦИИ КОЛЬЦЕВЫХ Q–ГОМЕОМОРФИЗМОВ

В статье установлена оценка внутренней дилатации для кольцевых Q-гомеоморфизмов при локально интегрируемой функции Q.

1. Введение. Ввиду того, что ёмкости и модули являются основным геометрическим методом в современной теории отображений, следующая концепция была предложена профессором Олли Мартио, см., напр., [7]–[9]. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и пусть $Q : D \to [1, \infty]$ – измеримая функция. Гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \bigcup \{\infty\}$ называется $Q-$*гомеоморфизмом*, если

$$M(f\Gamma) \leq \int\limits_D Q(x) \cdot \rho^n(x)\ dm(x) \tag{1}$$

для любого семейства Γ путей в D и любой допустимой функции ρ для Γ. Здесь m обозначает меру Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Эта концепция является естественным обобщением геометрического определения квазиконформного отображения по Вяйсяля, см., напр., 13.1 и 34.6 в [16]. Целью теории $Q-$гомеоморфизмов является установление взаимосвязей между различными свойствами мажоранты Q и самого отображения f.

Напомним, что борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства кривых Γ в $\mathbb{R}^n$, пишут $\rho \in adm\,\Gamma$, если

$$\int\limits_\gamma \rho\, ds \geq 1 \tag{2}$$

для всех $\gamma \in \Gamma$. *Модуль* семейства кривых Γ определяется равенством

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in adm\,\Gamma} \int\limits_D \rho^n(x)\, dm(x). \tag{3}$$

Для отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$, имеющего в D частные производные почти всюду (п.в.), полагаем $f'(x)$ – якобиева матрица отображения f в точке x, $J(x, f)$ – якобиан отображения f в точке x, т.е. детерминант $f'(x)$. В дальнейшем

$$\|f'(x)\| = \max_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}$$

– *матричная норма* $f'(x)$. Пусть, кроме того,

$$l\left(f'(x)\right) = \min_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}.$$

Напомним, что *внешняя дилатация* отображения f в точке x есть величина

$$K_O(x,f) \;=\; \frac{\|f'(x)\|^n}{|J(x,f)|},$$

если $J(x,f)\neq 0$, $K_O(x,f)=1$, если $f'(x)=0$, и $K_O(x,f)=\infty$ в остальных точках.

Внутренняя дилатация отображения f в точке x есть величина

$$K_I(x,f) \;=\; \frac{|J(x,f)|}{l\,(f'(x))^n}\ ,$$

если $J(x,f)\neq 0$, $K_I(x,f)=1$, если $f'(x)=0$, и $K_I(x,f)=\infty$ в остальных точках.

Линейная дилатация f в точке x есть величина

$$H(x,f) \;=\; \sqrt[n]{K_I(x,f)K_O(x,f)}.$$

Пусть $E\,,F\;\subseteq\;\mathbb{R}^n$ – произвольные множества. Обозначим $\Gamma(E,F,D)$ семейство всех кривых $\gamma:[a,b]\;\rightarrow\;\mathbb{R}^n$, которые соединяют E и F в D , т.е. $\gamma(a)\in E\,,\gamma(b)\in F$ и $\gamma(t)\in D$ при $t\in(a,\,b)$. Следующее понятие, мотивированное кольцевым определением квазиконформности по Герингу, см. [1], и представляющее собой обобщение и локализацию понятия Q–гомеоморфизма, впервые было введено В.Рязановым, У.Сребро и Э.Якубовым на плоскости, см., напр., [12], [13]. Пусть $r_0\;=\;dist(x_0,\partial D)$ и пусть $Q:D\rightarrow\;[0,\infty]$ – измеримая по Лебегу функция.

Положим

$$A(r_1,r_2,x_0)=\{x\;\in\;\mathbb{R}^n : r_1<|x-x_0|<r_2\}\,,$$

$$S_i\;=\;S(x_0,r_i)=\{x\;\in\;\mathbb{R}^n : |x-x_0|=r_i\},\quad i=1,2.$$

Говорят, что гомеоморфизм $f:D\rightarrow\mathbb{R}^n$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке* $x_0\;\in\;D$, если соотношение

$$M\left(f\left(\Gamma\left(S_1,\,S_2,\,A\right)\right)\right)\;\leq\int\limits_{A}Q(x)\cdot\eta^n(|x-x_0|)\;dm(x) \tag{4}$$

выполнено для любого кольца $A\;=\;A(r_1,r_2,x_0)$, $0\;<\;r_1\;<\;r_2\;<\;r_0$ и для каждой измеримой функции $\eta:(r_1,r_2)\rightarrow[0,\infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)\;dr\;\;\geq\;\;1\,.$$

Если (4) выполнено для каждой точки $x_0\;\in\;D$, то f называется кольцевым $Q-$гомеоморфизмом. Следует отметить, что в случае ограниченной функции $Q(x)$, определения кольцевого Q–гомеоморфизма и Q-гомеоморфизма эквивалентны, и, фактически, генерируют собой определение квазиконформных отображений, см. знаменитую работу Геринга [1]. В общем случае, каждый Q-гомеоморфизм является кольцевым, но не наоборот. В работе [12] приведены примеры кольцевых Q-гомеоморфизмов в фиксированной точке x_0, таких что $0 < Q(x) < 1$ на некотором множестве, для которого x_0 является точкой плотности.

Проблема локального поведения Q-гомеоморфизмов изучалась в $\mathbb{R}^n$ в случае $Q \in BMO$ (ограниченного среднего колебания) в работах [7]–[9], а в случае $Q \in FMO$ (конечного среднего колебания) и в других случаях в работах [10] и [11]–[13]. В работах [19], [14] было установлено свойство ACL для Q-гомеоморфизмов в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ при локально интегрируемой Q. Там же показана принадлежность таких Q-гомеоморфизмов соболевскому классу $W^{1,1}_{loc}$ и дифференцируемость п.в. Также установлена оценка внешней дилатации для Q-гомеоморфизмов

$$K_O(x,f) \ \leq \ C_n \ Q^{n-1}(x) \tag{5}$$

для п.в. $x \in D$. Эти результаты были перенесены на кольцевые Q-гомеоморфизмы в работе [20]. Здесь устанавливается новая оценка внутренней дилатации для кольцевых Q-гомеоморфизмов

$$K_I(x,f) \leq c_n Q(x) \tag{6}$$

для п.в. $x \in D$, где константа c_n зависит только от размерности n.

Следуя работе [6], пару $E = (A, C)$ называем *конденсатором*, где $A \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество, а C – непустое компактное множество, содержащееся в А. E называем *кольцевым конденсатором*, если $B = A \backslash C$ – кольцо, т.е., область, дополнение которой $\overline{\mathbb{R}^n} \backslash B$ состоит в точности из двух компонент. E называем *ограниченным конденсатором*, если множество A является ограниченным. Говорят, что конденсатор $E = (A, C)$ лежит в области D, если $A \subset D$. Очевидно, что если $f : D \to \mathbb{R}^n$ – открытое отображение и $E = (A, C)$ – конденсатор в D, то $(fA, \, fC)$ также конденсатор в fD. Далее $fE = (fA, \, fC)$.

Пусть $E = (A, \, C)$ – конденсатор. $W_0(E) = W_0(A, \, C)$ – семейство неотрицательных функций $u : A \to R^1$ таких, что 1) $u \in C_0(A)$, 2) $u(x) \geq 1$ для $x \in C$, и 3) u принадлежит классу ACL и пусть

$$|\nabla u| \; = \; \left(\sum_{i=1}^{n} \, (\partial_i u)^2 \right)^{1/2} .$$

Полагают

$$cap\, E \; = \; cap \; (A, \, C) \; = \; \inf_{u \in W_0(E)} \int_A \, |\nabla u|^n \; dm$$

и называют *ёмкостью* конденсатора E. Известно, что

$$cap \; E \geq \frac{(\inf m_{n-1} \, S)^n}{[m(A \setminus C)]^{n-1}}, \tag{7}$$

где $m_{n-1} \, S$ – $(n-1)$-мерная мера Лебега C^∞ – многообразия S, являющегося границей $S = \partial U$ ограниченного открытого множества U, содержащего C и содержащегося вместе со своим замыканием $\overline{U}$ в A, а точная нижняя грань берется по всем таким S. см. Предложение 5 из [17], и

$$cap\ E = M(\Delta(\partial A, \partial C; A \setminus C))\,, \tag{8}$$

где, для множеств S_1, S_2 и S_3 в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $\Delta(S_1, S_2; S_3)$ обозначает семейство всех непрерывных кривых, соединяющих S_1 и S_2 в S_3, см. [2]–[15].

Напомним, что отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ обладает (N^{-1})-*свойством,* если из условия $|f(E)| = 0$ следует $|E| = 0$, где $|E|$ – мера Лебега множества $E \subset D$.

Теорема 1. *Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ – кольцевой Q-гомеоморфизм с $Q \in L^1_{loc}$. Тогда f обладает (N^{-1})-свойством.*

Доказательство. Согласно [19], $f \in W^{1,1}_{loc}$ и

$$\|f'(x)\|^n \ \leq\ C_n\ Q^{n-1}(x)\, J(x,f)$$

для п.в. $x \in D$. Поэтому на основании работы [5], см. теорему 1.2., достаточно показать, что $Q^{n-1} \in L^{n'-1}_{loc}$, где $\frac{1}{n'} + \frac{1}{n} = 1$. Действительно, для компактного множества $V \subset D$ имеем, что

$$\int\limits_V Q(x)^{(n-1)(n'-1)} dx = \int\limits_V Q(x)\ dx\ < \infty.$$

Таким образом, по работе [18] получаем из теоремы 1:

Следствие 1. *Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ – кольцевой Q-гомеоморфизм с $Q \in L^1_{loc}$. Тогда $J(x,f) \neq 0$ п.в.*

Теорема 2. *Пусть D и D' – области в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и $f : D \to D'$ – кольцевой Q-гомеоморфизм с $Q \in L^1_{loc}$. Тогда п.в.*

$$K_I(x,f) \leq c_n Q(x)\,,$$

где константа c_n зависит только от n.

Доказательство. Согласно работе [20], f дифференцируемо п.в. и по следствию 1 $J(x,f) \neq 0$. В каждой точке $x \in D$ дифференцируемости отображения f, где $J(x,f) \neq 0$, рассмотрим конденсатор (E_r, G_r), где $E_r = \{y : |x-y| < 2r\}$ и $G_r = \{y : |x-y| \leq r\}$.

Тогда (fE_r, fG_r) – кольцевой конденсатор в D' и, согласно [2], см. также [3] и [15],

$$cap\,(fE_r, fG_r) = M(\Delta(\partial fE_r, \partial fG_r; fR_r(x)))\,,$$

где $R_r(x) = E_r \setminus G_r$ и, ввиду гомеоморфности f,

$$\Delta\left(\partial fE_r, \partial fG_r; fR_r(x)\right) = f\left(\Delta\left(\partial E_r, \partial G_r; R_r(x)\right)\right).$$

Таким образом, так как f является кольцевым Q-гомеоморфизмом,

$$cap\ (fE_r, fG_r) \leq \int\limits_{r<|x-y|<2r} Q(y)\, \eta^n(|x-y|)\ dm(y)$$

для любой неотрицательной измеримой функции $\eta\,:\,(r,2r)\,\rightarrow\,[0,\infty]$, такой что $\int\limits_r^{2r}\eta(t)dt\geq 1$.

В частности, рассмотрим однопараметрическое семейство вещественнозначных функций

$$\eta_r(t)\;=\;\left\{\begin{array}{ll}\frac{1}{r}, & \text{если}\;\;t\in(r,2r),\\ 0, & \text{если}\;\;t\in\mathbb{R}\setminus(r,2r).\end{array}\right.$$

Тогда

$$cap\;(fE_r,fG_r)\leq\frac{2^n\Omega_n}{m(E_r)}\int\limits_{E_r}Q(y)\,dm\,. \tag{9}$$

С другой стороны, по неравенству (5)

$$cap\;(fE_r,fG_r)\geq\frac{(\inf m_{n-1}\,S)^n}{[m(fE_r\setminus fG_r)]^{n-1}}. \tag{10}$$

Комбинируя (7) и (8) получаем, что

$$(\inf m_{n-1}\,S)^n\leq\frac{2^n\Omega_n\,[m(fE_r\setminus fG_r)]^{n-1}}{m(E_r)}\int\limits_{E_r}Q(y)\,dm,$$

где $m_{n-1}\,S$ – $(n-1)$-мерная мера Лебега C^∞ – многообразия S_r, являющегося границей $S_r=\partial U_r$ ограниченного открытого множества U_r, содержащего fG_r и содержащегося вместе со своим замыканием $\overline{U_r}$ в fE_r, а точная нижняя грань берется по всем таким S_r.

При $r\rightarrow 0$ множество $f(G_r)$ с точностью до $o(r)$ представляет собой эллипсоид $f'(G_r)$, являющийся образом шара G_r при линейном отображении f'. Если данный эллипсоид имеет полуоси $0<a_1r\leq...\leq a_nr$, то $m(f'G_r)=\Omega_na_1\ldots a_nr^n=\Omega_nJ(x,f)r^n$.

Разместим наш эллипсоид таким образом, чтобы его центр совпал с началом координат, а главные направления с координатными осями $e_1,...,e_n$. Тогда площадь его поверхности допускает нижнюю оценку:

$$m_{n-1}(f'(G_r))\geq 2m_{n-1}(Pr_1(f'(G_r)))=2\Omega_{n-1}a_2...a_nr^{n-1}=2\Omega_{n-1}\frac{J(x,f)}{l(f'(x)}r^{n-1},$$

где Pr_1 обозначает проекцию на гиперплоскость, перпендикулярную вектору e_1.

Следовательно,

$$\left[\omega_{n-1}\frac{J(x,f)}{l(f'(x))}r^{n-1}-o(r^{n-1})\right]^n\leq\left[m_{n-1}\partial f'(E_r)-o(r^{n-1})\right]^n\leq$$

$$\leq\frac{2^n\Omega_n\,[m(fE_r\setminus fG_r)]^{n-1}}{m(E_r)}\int\limits_{E_r}Q(y)\,dm.$$

Разделив это неравенство на $r^{n(n-1)}$ и устремляя $r \to 0$, будем иметь

$$\left[\frac{J(x,f)}{l(f'(x))}\right]^n \leq [J(x,f)]^{n-1} c_n Q(x)$$

для п.в. $x \in D$., следовательно,

$$K_I(x,f) = \frac{J(x,f)}{l^n(f'(x))} \leq c_n Q(x)$$

для п.в. $x \in D$.

Следствие 2. *Пусть D и D' – области в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и $f : D \to D'$ – кольцевой Q-гомеоморфизм с $Q \in L^1_{loc}$. Тогда п.в.*

$$H(x,f) \leq c_n Q(x),$$

где константа c_n зависит только от n.

Следствие 3. *Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ – кольцевой Q-гомеоморфизм с $Q \in L^1_{loc}$. Тогда $H(x,f), K_I(x,f) \in L^1_{loc}(D)$.*

Из работ [20], [4] вытекает важное следствие на плоскости для кольцевых Q-гомеоморфизмов.

Следствие 4. *Пусть $D\,, D'$ – области в $\mathbb{R}^2$, и пусть $f : D \to D'$ – кольцевой Q-гомеоморфизм с $Q \in L^1_{loc}$. Тогда $f^{-1} \in W^{1,2}_{loc}(D')$.*

1. *Gehring F.W.* Rings and quasiconformal mappings in space, Trans. Amer. Math. Soc., **103**, 1962, P.353-393.
2. *Gehring F.W.* Quasiconformal mappings in Complex Analysis and its Applications, V.2, International Atomic Energy Agency, Vienna, 1976.
3. *Hesse J.* A $p-$extremal length and $p-$capacity equality, Ark. Mat. 13 (1975), P.131-144.
4. *Hencle S., Koskela P.* Regularity of the inverse of a planar Sobolev homeomorphism, Arch. Ration. Mech. Anal. 180 (1975), no.1, P.75-95.
5. *Koskela P., Maly J.* Mappings of finite distortion: The zero set of Jacobian, J. Eur. Math. Soc., **5**, 2003, P.95-105.
6. *Martio O., Rickman S., Vaisala J.* Definitions for quasiregular mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. 448 (1969), 40pp.
7. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Mappings with finite length distortion, J. d'Anal. Math., 93 (2004), P.215-236.
8. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* $Q-$homeomorphisms, Contemporary Math., 364 (2004), P.193-203.
9. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On $Q-$homeomorphisms, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math., 30 (2005), P.49-69.
10. *Ignat'ev A., Ryazanov V.* Finite mean oscillation in the mapping theory, Ukrainian Math. Bull., 2 (2005), №3, P.403-424.
11. *Ryazanov V., Salimov R.* Weakly flat spaces and boundaries in the mapping theory, Ukrainian Math. Bull., 4 (2007), №2, P.199-234.
12. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On ring solutions of Beltrami equations, J. d'Anal. Math., 96 (2005), P.117-150.
13. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation and ring homeomorphisms, Ukrainian Math. Bull. 4 (2007), no.1, P.79-115.

14. *Salimov R.* ACL and differentiability of Q-homeomorphisms Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math., 33 (2008), P.295-301.
15. *Shlyk V.A.* On the equality between $p-$capacity and $p-$modulus, Sibirsk. Mat. Zh. 34, no.6 (1993), P.216-221; transl. in Siberian Math. J. 34, no.6 (1993), P.1196-1200.
16. *Väisälä J.* Lectures on $n-$Dimensional Quasiconformal Mappings, Lecture Notes in Math., 229, Berlin etc., Springer–Verlag, 1971.
17. *Кругликов В.И.* Ёмкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем, Матем. сб., 1986, 130, №2, С.185-206.
18. *Пономарев С. П.* (N^{-1})-свойство отображений и (N)-условие Лузина, Матем. заметки. 58 (1955), С.411-418.
19. *Салимов Р.* Абсолютная непрерывность на линиях и дифференцируемость одного обобщения квазиконформных отображений, Изв. РАН. Сер. матем., 2008, 72:5, С.141–148.
20. *Салимов Р., Севостьянов Е.* ACL и дифференцируемость почти всюду кольцевых гомеоморфизмов. – Труды ИПММ НАН Украины. – 2008. – вып.16. – С.171-178.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
salimov@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 07.04.2008