УДК 517.54

©2008. **О.А. Очаковская**

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ НА ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПОЛУПЛОСКОСТЯХ

Исследуются гармонические пары функций на гиперболических полуплоскостях. Получено уточнение теоремы В.К.Дзядыка о геометрическом описании голоморфных функций.

Введение. Всюду в дальнейшем u, v – вещественные функции, заданные в области Ω на комплексной плоскости $\mathbb{R}$. Известная теорема В.К.Дзядыка о геометрическом описании голоморфных функций утверждает, что если $u,\ v \in C^1(\Omega)$, то для того, чтобы хотя бы одна из функций $u+iv$, $u-iv$ была голоморфна в Ω, необходимо и достаточно, чтобы площади поверхностей графиков функций u, v, $\sqrt{u^2+v^2}$, расположенные над любым комплексным подмножеством из Ω, были равны (см. [1]). Теорема В.К.Дзядыка получила дальнейшее развитие и уточнение в ряде работ других авторов (см. [2–5]). например, было показано (см. [2]), что в ее формулировке вместо функции $\sqrt{u^2+v^2}$ можно взять произвольную функцию $\varphi(u,v)$, для которой выполнено равенство

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2=1. \tag{1}$$

В частности, можно положить $\varphi=\alpha u+\beta v$, где α,β ненулевые вещественные постоянные, удовлетворяющие условию $\alpha^2+\beta^2=1$. Что касается снятия такого обременительного условия, как непрерывная дифференцируемость u,v, то известный пример функции Т.Бора $w=x+i|y|$ на плоскости показывает, что даже условие Липшица не может обеспечить справедливость теоремы. Тем не менее, для некоторых φ теорема В.К.Дзядыка допускает усиление, если вместо непрерывности частных производных от u,v требовать лишь их существование всюду в области (см. [3]).

Для всякой функции $f\in C^1(\Omega)$ и компактного множества $A\subset\Omega$ символом $S(f,A)$ обозначим площадь поверхности графика f, расположенной над A. Положим также

$$f_1=u,\qquad f_2=v,\qquad f_3=\varphi(u,v),$$

где $\varphi\in C^1(\mathbb{R})$ – заданная функция с условием (1). В работах [4], [5] рассматривалась следующая

Проблема 1. Пусть $\mathcal{A}$ – некоторая совокупность компактных подмножеств Ω и пусть $u,v\in C^1(\Omega)$. Предположим, что

$$S(f_1,A)=S(f_2,A)=S(f_3,A)\quad \text{для любого}\quad A\in\mathcal{A}. \tag{2}$$

При каких условиях на $\mathcal{A}$ можно утверждать, что хотя бы одна из функций $u+iv$, $u-iv$ голоморфна в Ω?

Например, если $\mathcal{A}$ состоит из всех компактных подмножеств Ω нулевой меры, то этого утверждать нельзя (условие (2) в этом случае выполняется для любых $u, v \in C^1(\Omega)$).

Обозначим символом Γ_Ω множество всех пар u, v функций в Ω, таких, что хотя одна из функций $u+iv$, $u-iv$ голоморфна в Ω. В [4] получены некоторые результаты положительного характера, связанные с проблемой 1. В частности, в [4] показано, что если $u, v \in C^1(\Omega)$, то из (1) следует, что если $u, v \in C^1(\Omega)$, то из (1) следует, что $(u, v) \in \Gamma_\Omega$ в случае, когда $\mathcal{A} = \{g(A)\}$, где A – фиксированное множество Помпейю в Ω, а g – любая изометрия плоскости $\mathbb{C}$, для которой $g(A) \subset \Omega$. Отметим, что полного описания множеств Помпейю до сих пор не получено. Подобные обзоры по этому вопросу содержатся в [4, 6, 7, 8]. В [5] рассматривались случаи, когда $\mathcal{A}$ состоит из всех кругов Ω, радиусы которых принадлежат заданному двухэлементному подмножеству положительных чисел. При этом для шаров A каждого их этих радиусов предполагалось выполнение только одного из равенств в (2). Вместо другого равенства требовалась лишь оценка сверху для разности соответствующих площадей в терминах различных интегральных средних. В данной работе изучается подобная задача, когда Ω является гиперболическим аналогом полуплоскости. Для рассмотренных Ω результаты работы существенно уточняют достаточное условие теоремы В.К.Дзядыка (необходимое условие в ней тривиально).

1. Формулировка основного результата. Для формулировки основного результата работы введем ряд обозначений. Рассмотрим гиперболическую плоскость, реализованную в виде круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ с гиперболическим расстоянием

$$d(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \ln \frac{|1 - z_1 z_2| + |z_2 - z_1|}{|1 - z_1 z_2| - |z_2 - z_1|}$$

между точками $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$. Пусть o – центр круга $\mathbb{D}$.

Группа $SU(1,1)$ состоит из матриц вида $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$, где $a, b \in \mathbb{C}$, $|a|^2 - |b|^2 = 1$, и действует на $\mathbb{D}$ посредством комформных отображений $gz = \frac{az+b}{bz+a}$, $z \in \mathbb{D}$. Нетрудно видеть, что для любых $z \in \mathbb{D}$, $g_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \in SU(1,1)$, $g_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \in SU(1,1)$ выполнено равенство $g_1 g_2 z = gz$, где g равно произведению матриц g_1 и g_2. Расстояние d и мера $d\mu(z) = \frac{dx\ dy}{(1-|z|^2)^2}$ инвариантны относительно $SU(1,1)$.

Пусть $r > 0$, $z \in \mathbb{D}$. Положим $K_r(z) = \{w \in \mathbb{D} : d(z,w) \leq r\}$. Множество $K_r(z)$ называется *геодезическим кругом* радиуса r с центром в точке z.

Рассмотрим некоторые важные подгруппы группы $SU(1,1)$. Пусть

$$A = \left\{ a_t = \begin{pmatrix} ch\ t & sh\ t \\ sh\ t & ch\ t \end{pmatrix}, \ \ t \in \mathbb{R}^1 \right\}, \quad N = \left\{ n_s = \begin{pmatrix} 1 + is & -is \\ is & 1 - is \end{pmatrix}, \ \ s \in \mathbb{R}^1 \right\}.$$

Орбитами группы A являются дуги окружностей, проходящих черех точки -1 и 1, содержащиеся в круге $\mathbb{D}$. Орбитами группы N являются орициклы, т.е. окружности, содержащиеся в $\mathbb{D}$ и касающиеся границы $\mathbb{D}$ в точке $z = 1$.

Из определений A и d видно, что $d(o, a_t o) = d(o, th\ t) = t$, при всех $t \in \mathbb{R}^1$. Кроме того, всякое $z \in \mathbb{D}$ имеет вид

$$z = n_s a_t o,$$

где числа $s, t \in \mathbb{R}^1$ определяются однозначно и имеет место равенство

$$z = \frac{sh\ t - ise^{-t}}{ch\ t - ise^{-t}}.$$

Для любого $z = n_s a_t o \in \mathbb{D}$ мы положим $\langle z, 1\rangle = t$. Аналогом полуплоскости в гиперболическом случае является множество

$$H_\alpha\{z = n_s a_t o : \langle z, 1\rangle > \alpha, s \in \mathbb{R}\},$$

где $\alpha \in \mathbb{R}^1$. Мы также положим $H_{-\infty} = \mathbb{D}$.

Пусть $r > 0$, $z \in \mathbb{C}$ и

$$\Phi_r(z) = 2ch\ r \int_{-r}^{r} e^{izt} \sqrt{th^2 r\ ch^2 t - sh^2 t\ dt}.$$

Тогда функция Φ_r имеет бесконечно много нулей. Все нули функции Φ_r являются вещественными, простыми и расположены симметрично относительно точки $z = 0$ (см. [9]). Положим $N(r) = \{z > 0 : \Phi_r(z) = 0\}$. Для $t \in R^1$ обозначим $\gamma_t = \{z = n_s a_t o \in \mathbb{D} = s \in R^1\}$.

Если $f \in C^1(\Omega)$ и $K_r(z) \subset \Omega$, положим $S(f, r, z) = S(f, K_r(z))$. Пусть также (i, j, k) – произвольная перестановка чисел 1, 2, 3.

Теорема. *Пусть* $\alpha \in [-\infty, +\infty)$, r_1, r_2 *– фиксированы и* $N(r_1) \cap N(r_2) = \emptyset$, *Пусть также* $u, v \in C^1(H_\alpha)$ *и выполнены следующие условия:*

1) $S(f_i, r_1, z) = S(f_j, r_1, z)$ *для всех* $K_{r_1}(z) \subset H_\alpha$;

2) $S(f_j, r_2, z) = S(f_k, r_2, z)$ *для всех* $K_{r_2}(z) \subset H_\alpha$;

3) Существует $\nu_1 > \alpha + r_2$ *такое, что для любого* $k \in \mathbb{Z}_+$ *почти всех* $\xi > \nu_1$ *выполнено*

$$M_{k,1}(\xi) = \int_{\gamma_\xi} \frac{|S(f_i, r_2, \zeta) - S(f_j, r_2, \zeta)|}{(1 - |\zeta|^2)^{\frac{k}{2}+1}} |d\zeta| < +\infty$$

и

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\inf_{q \geq m} (M_{q,1}(\xi))^{\frac{1}{q}} \right)^{-1} = +\infty;$$

4) Существует $\nu_2 > \alpha + r_1$ *такое, что для любого* $k \in \mathbb{Z}_+$ *почти всех* $\xi > \nu_2$ *выполнено*

$$M_{k,2}(\xi) = \int_{\gamma_\xi} \frac{|S(f_k, r_1, \zeta) - S(f_j, r_1, \zeta)|}{(1 - |\zeta|^2)^{\frac{k}{2}+1}} |d\zeta| < +\infty$$

и

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\inf_{q \geq m} (M_{q,2}(\xi))^{\frac{1}{q}} \right)^{-1} = +\infty;$$

5) Существует $\nu_3 > \alpha + r_2$ *такое, что для любого* $k \in \mathbb{Z}_+$

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \iint\limits_{H_{\nu_3} \setminus H_T} \frac{|S(f_i, r_2, \zeta) - S(f_j, r_2, \zeta)|}{(1 - |\zeta|^2)^{\frac{k}{2}}} e^{(k+1)\langle \zeta, 1\rangle} d\mu(\zeta) = 0;$$

6) Существует $\nu_4 > \alpha + r_1$ такая, что для любых $k \in \mathbb{Z}_+$

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \iint\limits_{H_{\nu_4}\setminus H_T} \frac{|S(f_j, r_1, \zeta) - S(f_k, r_1, \zeta)|}{(1-|\zeta|^2)^{\frac{k}{2}+1}} e^{(k+1)\langle\zeta,1\rangle} d\mu(\zeta) = 0.$$

Тогда $(u, v) \in \Gamma_{H_\alpha}$.

Отметим, что условия 3)–6) теоремы 1 требуют достаточно быстрого убывания величин $|S(f_j, r_1, z) - S(f_k, r_1, z)|$ и $|S(f_i, r_2, z) - S(f_j, r_2, z)|$ при $z \to 1$. Используя результаты работы [10], можно получить явные оценки этих величин, обеспечивающие выполнение условий 3)–6).

2. Доказательство основного результата. Прежде всего отметим, что необходимость в теореме 1 является частным случаем известных результатов (см. [1], [2]). Докажем достаточность.

Рассмотрим функции

$$g_m(x, y) = (1 - |z|^2)^2 \left(1 + \left(\frac{\partial f_m}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_m}{\partial y}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad m = 1, 2, 3. \tag{3}$$

Для любой функции g класса $C^1(K_r(z))$ площадь поверхности графика g, расположенного над $K_r(z)$ равна

$$\begin{aligned}&\int_{K_r(z)} \left(1 + \left(\frac{\partial g}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial g_m}{\partial \eta}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} d\xi\, d\eta = \\ &= \int_{K_r(z)} (1 - |\zeta|^2)^2 \left(1 + \left(\frac{\partial g}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial g_m}{\partial \eta}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} d\mu(\zeta),\end{aligned} \tag{4}$$

где, как обычно, $\zeta = \xi + i\eta$.

Из условий 1) и 2) следует, что

$$\int_{K_{r_1}(z)} g_i(\xi, \eta) d\mu(\zeta) = \int_{K_{r_1}(z)} g_j(\xi, \eta) d\mu(\zeta) \quad \text{для всех} \quad K_{r_1}(z) \subset H_\alpha$$

и

$$\int_{K_{r_2}(z)} g_j(\xi, \eta) d\mu(\zeta) = \int_{K_{r_2}(z)} g_k(\xi, \eta) d\mu(\zeta) \quad \text{для всех} \quad K_{r_2}(z) \subset H_\alpha.$$

Положим $h = g_i - g_j$ и

$$f(z) = \int_{K_{r_2}(z)} h(\xi, \eta) d\mu(\zeta), \quad z \in H_{\alpha + r_2}. \tag{5}$$

Тогда

$$\int_{K_{r_1}(z)} h(\xi, \eta) d\mu(\zeta) = 0, \quad \text{для всех} \quad K_{r_1}(z) \subset H_\alpha, \tag{6}$$

а также

$$\int_{K_{r_1}(z)} h(\xi)d\mu(\zeta) = 0, \quad \text{для всех} \quad K_{r_1}(z) \subset H_{\alpha+r_2}. \tag{7}$$

Кроме того, из определения f и условий 3) следует, что для любого $k \in \mathbb{Z}_+$ и почти всех $\xi > \nu_1 + r_2$ выполнено

$$M_{k,1}(\xi) = \int_{\gamma_\xi} \frac{|f(\zeta)|}{(1-|\zeta|^2)^{\frac{k}{2}+1}} |d\zeta| < +\infty$$

и

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\inf_{q\geq m} \left(M_{k,1}(\xi)\right)^{\frac{1}{q}} \right)^{-1} = +\infty.$$

Аналогично, из условия 5) получим, что для любого $k \in \mathbb{Z}_+$ и почти всех $\xi > \nu_3 + r_2$

$$\varliminf_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \iint\limits_{H_{\nu_3}\setminus H_T} \frac{f(\zeta)}{(1-|\zeta|^2)^{\frac{k}{2}+1}} e^{(k+1)\langle\zeta,1\rangle} d\mu(\zeta) = 0.$$

Используя результат работы [10], заключаем, что $f = 0$. Учитывая (5) и (6), по теореме о двух радиусах [9] имеем $h = 0$, поскольку $N(r_r) \cap N(r_2) = \emptyset$. Таким образом, $g_i = g_j$. Рассуждая аналогично и используя условия 4) и 6) вместо 3) и 5), получаем $g_j = g_k$. Отсюда и из равенств (3), (4) следует, что $(u, v) \in \Gamma_{H_\alpha}$. Таким образом, теорема 1 доказана.

1. *Дзядык В.К.* Геометрическое определение аналитических функций // Успехи мат. наук. – 1960. – 15, №1. – С.191-194.
2. *Goodman A.* On the criterium of analytical function // Amer. Math. Monthly. – 1964. – 71. – P.265-267.
3. *Трохимчук Ю.Ю.* Об одном критерии аналитичности функций // Укр. мат. журнал. – 2007. – Т.59. – №10. – С.1410-1418.
4. *Volchkov V.V.* Integral Geometry and Convolution Equations. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454pp.
5. *Волчков В.В.* Теоремы о шаровых средних на симметрических пространствах // Мат. сборник. – 2001. – Т. 192. – №9. – С.17-38.
6. *Очаковская О.А.* Гармонические пары функций на подмножествах комплексной плоскости // Труды ИПММ НАНУ. – 2007. – вып.15. – С.146-150.
7. *Zalcman L* A bibliographic survey of the Pompeiu problem, in: B.Fuglege al. (eds.) // Approximations (Kluwer Academic: Dordrecht). – 1992. – P.185-194.
8. *Zalcman L.* Supplementary bibliography to "A bibliographic survey of the Pompeiu problem"// Rodon transforms and Tomography, Contemp Math. – 2001. – V.278. – P.69-74.
9. *Berenstein C.A. and Struppa D.C.* Complex analysis and convolution equations in Several Complex Variables, V', (G.M.Henkin, Ed.) // Encyclopedia of Math. Sciences. – 1993. – V.54. – chapt.1. – P.1-108, (Springer-Verlag: New York, Berlin).
10. *Волчков В.В.* Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах на гиперболических пространствах // Изв. РАН. – 2001г. – т.65. – №2. – С.3-26.
11. *Очаковская О.А.* Отображения со свойством сохранения гиперболической меры // Вестник ДНУ. – вып.8. – 2003. – С.81-86.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
ochakov@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 20.09.08