УДК 517.5

©2008. **А.Н. Миненкова**

ПОВЕДЕНИЕ L_1-НОРМЫ ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ СВЕРТКИ

В этой статье получены нижние оценки для интеграла функций, которые являются продолжением решения уравнения свертки, в окрестности любой точки, лежащей вне наименьшего отрезка, содержащего носитель свертывателя.

Введение. Пусть $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$, $T \neq 0$, где $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$ – пространство распределений с компактными носителями и пусть $r(T)$ – длина наименьшего отрезка, содержащего носитель T. Предположим, что

$$-\infty \leq a < b \leq +\infty, \quad b - a > 2r(T).$$

Введем следующее обозначение

$$(a, b)_T = \{t \in \mathbb{R}^1 : t - \text{supp}T \subset (a, b)\}.$$

Обозначим $C_T(a, b)$ – класс непрерывных функций f, которые являются решением уравнения свертки

$$(f * T)(t) = 0, \quad t \in (a, b)_T. \tag{1}$$

Пусть $\widehat{T} = \langle T, e^{-izt} \rangle$ – преобразование Фурье T, $\mathcal{Z}(\widehat{T})$ – множество всех нулей $\widehat{T}$. Для $\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T})$ обозначим

$$m(\lambda, T) = n_\lambda(\widehat{T}) - 1,$$

где $n_\lambda(\widehat{T})$ – кратность нуля λ функции $\widehat{T}$.

Появлению этой работы предшествовало изучение вопроса о неинтегрируемых продолжениях решений уравнений свертки. В связи с этим в [1, стр.86] был получен следующий результат.

Теорема. *Пусть $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$ и предположим, что*

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T})} \frac{m(\lambda, T)}{1 + |\text{Im}\lambda|} = \infty. \tag{2}$$

Тогда для каждого $R > r(T)$ существует функция $f \in C_T(-R, R)$ такая, что $f|_{(0,R)} \notin L^1(0, R)$ и $f|_{(-R,0)} \notin L^1(-R, 0)$. В частности, функция f не допускает непрерывного продолжения на [-R,R].

Также в работе [2] была получена нижняя оценка для интеграла функции, которая является решением уравнения свертки,в окрестности любой точки, лежащей вне наименьшего отрезка, содержащего носитель свертывателя.

Теорема 1. *Пусть $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$, $T \neq 0$, и предположим, что T удовлетворяет (2). Тогда для каждого $R > r(T)$ существует $f \in C_T(-R, R)$ такая, что для* *некоторой положительной последовательности* $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{+\infty} : \varepsilon_n \to 0$ *при достаточно больших* n

$$\int_{R-2\varepsilon_n}^{R-\varepsilon_n} |f(t)|dt \geq e^{c\varepsilon_n^{-4/3}}, \tag{3}$$

где $c > 0$ *не зависит от* ε_n.

1. Предварительные сведения. Для доказательства основного результата статьи нам понадобятся некоторые дополнительные утверждения и обозначения.

Пусть $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ – пространство распределений. Обозначим $\mathcal{D}'_T(a,b)$ – множество всех распределений f, которые удовлетворяют (1).

Для $z \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{Z}_+, t \in \mathbb{R}^1$ обозначим

$$e^{z,m}(t) = (it)^m e^{izt}.$$

Пусть $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ – ненулевая целая функция, n_λ – кратность ее нуля λ. Определим последовательность $\{a_j^{\lambda,\eta}(g)\}_{j=0}^{n_\lambda - 1}$ таким образом

$$a_j^{\lambda,\eta}(g) = \begin{cases} 0, & j < \eta, \\ \frac{n_\lambda!}{\eta! g^{(n_\lambda)}(\lambda)}, & j = \eta. \end{cases}$$

Для дальнейшего понадобится такая целая функция

$$a^{\lambda,\eta}(g,z) = \sum_{j=0}^{n_\lambda - 1} a_j^{\lambda,\eta}(g) \frac{g(z)}{(z-\lambda)^{n_\lambda - j}}.$$

Пусть $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$, $T \neq 0$, $\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T})$, $\eta \in \{0, ..., m(\lambda, T)\}$ и $f \in \mathcal{D}'_T(a,b)$, тогда можно показать, что для некоторых $c_{\lambda,\eta}(T,f) \in \mathbb{C}$ выполняется следующее равенство

$$f * T_{\lambda,0} = \sum_{\eta=0}^{m(\lambda,T)} c_{\lambda,\eta}(T,f) e^{\lambda,\eta},$$

где свертка рассматривается в $(a+r(T), b-r(T))$, а $T_{\lambda,0} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$ определяется таким образом

$$r(T_{\lambda,0}) = r(T)$$

и

$$\widehat{T}_{\lambda,0}(z) = a^{\lambda,0}(\widehat{T}, z),\ z \in \mathbb{C}.$$

В дальнейшем нам понадобится следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$, $T \neq 0$ *и* $f \in \mathcal{D}'(a,b)$ *и предположим, что*

$$f = \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}(\widehat{T})} \sum_{\eta=0}^{m(\lambda,T)} \gamma_{\lambda,\eta} e^{\lambda,\eta},$$

где $\gamma_{\lambda,\eta} \in \mathbb{C}$, *и ряд сходится в* $\mathcal{D}'(a,b)$. *Тогда* $f \in \mathcal{D}'_T(a,b)$ *и* $\gamma_{\lambda,\eta} = c_{\lambda,\eta}(T,f)$.

Доказательство этой теоремы приводится в [1, гл.3].

2. Оценка интегралов с полиномиальным весом. В этом разделе статьи улучшается результат Теоремы 1, а, именно, – показано, что продолжение решения уравнения свертки может быть не интегрируемым, даже если его умножить на некоторую функцию, равную нулю в особенности этого продолжения.

Теорема 3. *Пусть* $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$, $T \neq 0$, *и предположим, что* T *удовлетворяет (2). Тогда для каждого* $R > r(T)$ *существует* $f \in C_T(-R,R)$ *такая, что для некоторой положительной последовательности* $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{+\infty} : \varepsilon_m \to 0$ *при достаточно больших* m

$$\int_{-R+\varepsilon_m}^{R-\varepsilon_m} |f(t)|(R-|t|)^n dt \geq e^{\varepsilon_m^{-5/4}}, \tag{4}$$

где $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Обозначим через $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность нулей $\widehat{T}$. Далее, согласно условию (2), эта последовательность обладает следующими свойствами:

i) $\lim\limits_{k\to\infty} q_k = \infty$, где $q_k = l_k(1+|\mathrm{Im}\zeta_k|)^{-1}$ и $l_k = m(\zeta_k, T)$;

ii) $q_{k+1} > q_k^{1/3} > 1$ и $q_{k+1} > l_k^{1/3}/q_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Используем для доказательства ту же функцию, что и в доказательстве Теоремы 3 в [2], напомним, что эта функция имеет вид

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \left(\frac{t}{R}\right)^{l_k} e^{i\zeta_k t}, \quad t \in (-R,R),$$

где $\gamma_k = e^{l_k q_k^{-1/3}}$, а $R > r(T)$. Из условия i) и Теоремы 2 следует, что функция $f \in C_T(-R,R)$.

Рассмотрим следующий интеграл, используя Теорему 1, оценим его

$$\int_{-R+\varepsilon_m}^{R-\varepsilon_m} |f(t)|(R-|t|)^n dt \geq \int_{R-2\varepsilon_m}^{R-\varepsilon_m} |f(t)|(R-t)^n dt \geq \varepsilon_m^n \int_{R-2\varepsilon_m}^{R-\varepsilon_m} |f(t)| dt. \tag{5}$$

Согласно (3) и (5) для некоторого $c > 0$

$$\int_{-R+\varepsilon_m}^{R-\varepsilon_m} |f(t)|(R-|t|)^n dt \geq \varepsilon_m^n e^{c\varepsilon_m^{-4/3}} \geq e^{\varepsilon_m^{-5/4}}.$$

Следовательно, мы получили оценку (4). Теорема доказана. □

Благодарность. Автор выражает благодарность Волчкову Валерию Владимировичу за постановку задач и многочисленные советы, позволившие улучшить текст статьи.

1. *Volchkov V.V. , Volchkov Vit.V.* Mean periodic functions. – Donetsk: Donetsk National University Press., 2008. – 194c.

2. *Миненкова А.Н.* О характере неинтегрируемости продолжения решения уравнения свертки. – Донецк: Труды ИПММ НАН Украины. – **16.** – 2008. – С.152-155.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
a.minenkova@gmail.com

Получено 28.10.08