УДК 517.946

©2008. **В.А. Маркашева**

ЛОКАЛЬНАЯ ГЁЛЬДЕРОВОСТЬ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛИНЕЙНЫМ ОПЕРАТОРОМ ТИПА БАОУЕНДИ-ГРУШИНА. ЧАСТЬ 2

В работе изучается свойство регулярности решений вырождающегося параболического уравнения с нелинейным оператором типа Баоуенди-Грушина. Установлено свойство локальной гёльдеровости решений.

Введение. Исследуется решение задачи Коши для квазилинейного вырождающегося параболического уравнения следующего вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_{\lambda,\alpha}[u] = div_L(|D_L u|^{\lambda-1} D_L u), (x, y, t) \in S_T = R^{N+M} \times (0, T). \tag{1.1}$$

Здесь $\lambda > 1$, а $x = (x_1, .., x_N), y = (y_1, .., y_M), N \geq 1, M \geq 1$ – произвольные точки евклидовых пространств R^N и R^M, соответственно. $z = (x, y) = (x_1, .., x_N, y_1, .., y_M)$, $z \in R^{N+M}$. Символом $D_L u$ обозначим вектор

$$D_L u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, .., \frac{\partial u}{\partial x_N}, |x|^\alpha \frac{\partial u}{\partial y_1}, |x|^\alpha \frac{\partial u}{\partial y_2}, .., |x|^\alpha \frac{\partial u}{\partial y_M} \right). \tag{1.2}$$

Далее,

$$|D_L u| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2 + |x|^{2\alpha} \sum_{j=1}^{M} (\frac{\partial u}{\partial y_j})^2},$$

$$div_L \vec{F}(x, y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} + |x|^\alpha \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial F_{j+N}}{\partial y_j}.$$

Если $\alpha = 0$, то при условии $\lambda > 1$ ([7]) уравнение (1.1) описывает процесс с медленной диффузией. Операторы типа $L_{1,\alpha} = \Delta_x + |x|^{2\alpha} \Delta_y$, где символ Δ означает оператор Лапласа, впервые исследовались в работах [1] и [6]. В работах [3] и [4] изучались качественные свойства решения уравнения $L_{\lambda,\alpha}[u] = f$, т.е. эллиптического аналога (1.1) (см. также [5] и имеющуюся там литературу).

Цель данной работы – доказать локальную гёльдеровость решений уравнения (1.1). Прежде, чем перейти к формулировкам основных результатов работы, введем необходимые понятия. Однородное расстояние для пространственных переменных $d(z, 0) = d((x, y), (0, 0)) = \left(|x|^{2(\alpha+1)} + (\alpha + 1)^2 |y|^2\right)^{1/2(\alpha+1)}$. В качестве шаров используем $B_\rho(z') = \{z \in R^{N+M} : d(z - z', 0) \leq \rho\}$. $Q = N + (\alpha + 1)M$ – однородная размерность в пространствах Карно-Каратеодори (см. [6]). B_ρ является естественным расширением понятия шара в пространствах Карно-Каратеодори.

Пусть $t > 0, R > 0$ – произвольные фиксированные числа.

Определение. Слабым решением уравнения (1.1) будем называть неотрицательную измеримую на $S_T = R^{N+M} \times (0, T)$ функцию

$$u(x,y,t) \in \mathfrak{V}_{\lambda+1,loc}(S_T) \equiv L_{\lambda+1}(t,T;\mathfrak{L}_{1,\lambda+1,loc}(R^{M+N})) \cap C(t,T;L_{2,loc}(R^{M+N})),$$

при каждом $t > 0$ удовлетворяющую интегральному тождеству :

$$\int\limits_{B_R} u(z,\tau)\eta(z,\tau)dz|_{t_1}^{t_2} + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{B_R}\{-u\eta_\tau + (|D_L u|^{\lambda-1}D_L u)D_L\eta\}dzd\tau = 0, \qquad (1.3)$$

для всех $\eta(x,y,t) \in C(t,T;\mathfrak{L}_{1,\lambda+1}(B_R)) \cap L_2(B_R \times (t,T))$ и для всех $t_1, t_2 : 0 < t \leq t_1 \leq t_2 \leq T$.

Основным результатом статьи является теорема вложения:

Теорема 5.3. *Пусть $u \in \mathfrak{V}_{\lambda+1,loc}(S_T) \cap L_{\infty,loc}(S_T)$ – слабое решение уравнения (1.1). Тогда $u(z,t)$ – локально гёльдерово на S_T и для любого компакта $K \subset S_T$ существует постоянные $\bar{\alpha} \in (0,1)$ и $C(\bar{\alpha})$, зависящие только от параметров задачи и $diamK$, такие что*

$$|u(z_1,t_1) - u(z_2,t_2)| \leq C(\bar{\alpha})(d^{\bar{\alpha}}(z_1,z_2) + |t_1 - t_2|^{\frac{\bar{\alpha}}{\lambda+1}}). \qquad (1.4)$$

Содержание теоремы 5.3 является естественным обобщением результатов работы [2], где изучался случай $\alpha = 0$. Доказательство теоремы 5.3 приводится подходом работы [2], где существенно используются также идеи работы [5].

Статья разделена на 2 части. В первую часть входят разделы 1 и 2. Во вторую часть входят разделы 3, 4 и 5. Структура статьи такова: в первом разделе описывается класс функций $\mathfrak{B}_{\lambda+1,loc}(S_T, \bar{M}, C)$, для $\lambda > 1$, и доказывается, что если слабое решение уравнения (1.1) из $L_{\infty,loc}(S_T)$, то принадлежит классу функций $\mathfrak{B}_{\lambda+1,loc}(S_T, \bar{M}, C)$, второй раздел содержит предварительные пояснения и обозначения, а также вспомогательные утверждения, на основании которых строится доказательство альтернатив и основного результата, разделы 3 и 4 доказывают соответственно первую и вторую альтернативы, а в пятом разделе приводится доказательство теоремы 5.3 при помощи альтернатив. Доказательства третьего, четвертого и пятого разделов используют лишь принадлежность функции классу $\mathfrak{B}_{\lambda+1,loc}(S_T, \bar{M}, C)$.

На протяжении всей работы символами $C, C_{i.j}$ будем обозначать различные положительные константы, зависящие лишь от параметров $\lambda, N, M, \bar{\alpha}, \alpha$. Индексы i, j означают, что эта константа впервые появляется в выражении $(i.j)$. Нумерация сквозная.

Продолжим доказательство теоремы 5.3.

3. Первая альтернатива.

Лемма 3.1. *Существует $\alpha_0 \in (0,1)$, не зависящее от w, R, s^*, такое , что если для некоторого $\bar{t} : \bar{t} \leq t_0, \bar{t} - \theta_0 R^{\lambda+1} \geq t_0 - \theta_* R^{\lambda+1}$, найдется цилиндр $S_R^{s_0}(z_0,\bar{t}) = S_R^{s_0}$,* *для которого справедлива оценка*

$$\left|(z,t) \in S_R^{s_0} : u(z,t) < \mu^- + \frac{w}{2^{s_0}}\right| \le \alpha_0 \left|S_R^{s_0}\right|, \tag{3.1}$$

то либо

$$w < 2^{s_0} R^{\varepsilon}$$

для некоторого произвольного $\varepsilon : 0 < \varepsilon < (\lambda+1)/(\lambda-1)$, *либо*

$$u(z,t) > \mu^- + w/2^{s_0+1} \tag{3.2}$$

для всех $(z,t) \in S_{R/2}^{s_0}$.

Доказательство леммы. Если первое утверждение неверно и $w \ge 2^{s_0} R^{\varepsilon}$, тогда цилиндр $S_R^{s_0}$ компактно вложен в цилиндр $S_R^{\varepsilon} = B_R \times (t_0 - R^{\lambda+1-\varepsilon(\lambda-1)}, t_0)$. Поскольку $u \in \mathfrak{B}_{\lambda+1,loc}(S_T, \bar{M}, C)$, то удовлетворяет первым двум условиям леммы 2.7. Положив $s = s_0, \theta = \theta_0, \rho = R, t = \bar{t}$, рассмотрим условие (2.7)

$$\int\limits_{\bar{t}-\theta\rho^{\lambda+1}}^{\bar{t}} mes\ \{z : (u - \mu^{\pm} \mp \frac{w}{2^s})^{\pm} > 0, z \in B_\rho\} d\tau = \left|(z,t) \in S_R^{s_0} : u(z,t) < \mu^- + \frac{w}{2^{s_0}}\right| \le$$

$$\le C_{2.9}^{-\frac{Q+\lambda+1}{\lambda+1}} 4^{-\frac{(Q+\lambda+1)^2}{\lambda+1}} \rho^{Q+\lambda+1} = C_{2.9}^{-\frac{Q+\lambda+1}{\lambda+1}} 4^{-\frac{(Q+\lambda+1)^2}{\lambda+1}} \left|S_R^{s_0}\right|.$$

Очевидно, что условие (2.7) справедливо при любом

$$\alpha_0 \le C_{2.9}^{-\frac{Q+\lambda+1}{\lambda+1}} 4^{-\frac{(Q+\lambda+1)^2}{\lambda+1}}.$$

Применив лемму 2.7, получим утверждение

$$u(z,t) > \mu^- + w/2^{s_0+1}$$

для всех $(z,t) \in S_{R/2}^{s_0}$. Что и требовалось доказать.□

Замечание 3.1. В данной лемме значение $\bar{t}$ не определено. Единственное ограничение уже описано в предыдущем разделе: $\bar{t} \le t_0$, $\bar{t} - \theta_0 R^{\lambda+1} \ge t_0 - \theta_* R^{\lambda+1}$. Выберем $s_1 :\ \ \bar{t} - \theta_0 (R/2)^{\lambda+1} = t_0 - \theta_1 (R/2)^{\lambda+1}$. Очевидно, что $s_0 \le s_1 \le s^*$.

Лемма 3.2. *Если*

$$H^- = ||(u - [\mu^- + \frac{w}{2^{s_0+1}}])^-||_{\infty, S_{R/2}^{s_1}} \ge \frac{w}{2^{s_0+2}} \tag{3.3}$$

и выполняются условия леммы 3.1, тогда для любого $\alpha_0 \in (0,1)$, *удовлетворяющего (2.1), найдется* $m = m(\alpha_0)$, *не зависящее от* w *и* R, *такое что либо* $w < 2^{s_1} R^{\varepsilon}$, *либо*

$$mes\ \left\{z \in B_{R/4} :\ u(z,t) < \mu^- + \frac{w}{2^{s_0+m}}\right\} < \alpha_0 |B_{R/4}| \tag{3.4}$$

сразу для всех $t \in [t_0 - \theta_1 (R/2)^{\lambda+1}, t_0]$.

Доказательство леммы 3.2. Поскольку $u \in \mathfrak{B}_{\lambda+1,loc}(S_T, \bar{M}, C)$, то неравенство (1.6) справедливо на цилиндре $S^{s_1}_{R/2}(z_0,t_0)$. В качестве срезающей функции выберем $\xi(z)$, которая равна 1 на шаре $B_{R/4}$, нулю вне шара $B_{R/2}$, и $|D_L\xi| \le 4/R$. Положим $\nu = w/2^{s_0+m},\ k = \mu^- + w/2^{s_0+1}$. Тогда (1.6) примет вид

$$\begin{gathered} \underset{t_0-\theta_{s_1}(R/2)^{\lambda+1}\le\tau\le t_0}{ess\ sup} \int\limits_{B_{R/2}} \psi^2(H^-,(u-[\mu^-+\tfrac{w}{2^{s_0+1}}])^-(\tau),\tfrac{w}{2^{s_0+m}})\xi^{\lambda+1}(z)dz \le \\ \le \int\limits_{B_{R/2}} \psi^2((u-k)^-)(t_0-\theta_{s_1}(R/2)^{\lambda+1})dz + C_{1.6}\iint\limits_{S^{s_1}_{R/2}} \psi|\psi|^{1-\lambda}|D_L\xi|^{\lambda+1}dzd\tau. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Заметим, что $(u-k)^- = -min([u-\mu^-]-w/2^{s_0+1},0) \le -min(-w/2^{s_0+1},0) = w/2^{s_0+1}$. Тогда $H^- \le w/2^{s_0+1}$ и

$$\psi = \ln^+\left(\frac{H^-}{H^- - (u-[\mu^-+\frac{w}{2^{s_0+1}}])^- + \frac{w}{2^{s_0+m}}}\right) \le \ln^+\left(\frac{H^-}{\frac{w}{2^{s_0+m}}}\right) \le$$

$$\le \ln(2^{m-1}) = (m-1)\ln 2.$$

$$|\psi_u|^{1-\lambda} = \left|\frac{1}{H^- - (u-k)^- + \frac{w}{2^{s_0+m}}}\right|^{1-\lambda} = |H^- - (u-k)^- + \frac{w}{2^{s_0+m}}|^{\lambda-1} \le$$

$$\le \left|\frac{w}{2^{s_0+1}} + \frac{w}{2^{s_0+1}}\right|^{\lambda-1} = \left(\frac{w}{2^{s_0}}\right)^{\lambda-1} = \theta_0.$$

Поскольку справедлива лемма 3.1, то $u > \mu^- + w/2^{s_0+1}$ при $t = \bar{t} - \theta_0(R/2)^{\lambda+1}$. Выберем $s_1:\ \ \bar{t} - \theta_0(R/2)^{\lambda+1} = t_0 - \theta_1(R/2)^{\lambda+1}$. Очевидно, что $s_0 \le s_1 \le s^*$. Тогда $(u-k)^-(t_0-\theta_1(R/2)^{\lambda+1}) = 0$, откуда $\psi\left((u-k)^-(t_0-\theta_1(R/2)^{\lambda+1})\right) = 0$. Оценим правую часть неравенства (3.5) сверху.

$$\int\limits_{B_{R/2}} \psi^2((u-k)^-)(t_0-\theta_1(R/2)^{\lambda+1})dz + C_{1.6}\iint\limits_{S^{s_1}_{R/2}} \psi|\psi|^{1-\lambda}|D_L\xi|^{\lambda+1}dzd\tau \le$$

$$\le \frac{C_{1.6}\theta_0(m-1)\ln 2}{(R/4)^{\lambda+1}}|S^{s_1}_{R/2}|.$$

Заметим, что

$$\psi^2 = (\ln^+\left(\frac{H^-}{H^- - (u-[\mu^-+\frac{w}{2^{s_0+1}}])^- + \frac{w}{2^{s_0+m}}}\right))^2 \ge$$

$$\ge (\ln^+\left(\frac{\frac{w}{2^{s_0+2}}}{\frac{w}{2^{s_0+m-1}}}\right))^2 = (m-3)^2\ln^2 2.$$

$$\underset{t_0-\theta_{s_1}(R/2)^{\lambda+1}\le\tau\le t_0}{ess\ sup}\int\limits_{B_{R/2}} \psi^2(H^-,(u-[\mu^-+\frac{w}{2^{s_0+1}}])^-(\tau),\frac{w}{2^{s_0+m}})\xi^{\lambda+1}(z)dz \ge$$

$$\geq (m-3)^2 \ln^2 2\ mes\ \left\{z \in B_{R/4}:\ (u(z,t) - [\mu^- + \frac{w}{2^{s_0+m}}])^- > 0\right\}.$$

Имеем для всех $t \in [t_0 - \theta_{s_1}(R/2)^{\lambda+1}, t_0]$ и $m = max([C_{1.6}2^{s_1}/\alpha_0] + 1; s_1 - s_0 + 1)$

$$mes\ \left\{z \in B_{R/4}:\ u(z,t) < \mu^- + \frac{w}{2^{s_0+m}}\right\} \leq C_{1.6}\frac{(m-1)4^{\lambda+1}}{(m-3)^2R^{\lambda+1}}\theta_0|S^{s_1}_{R/4}| \leq \alpha_0|B_{R/4}|.$$

Лемма доказана. □

Замечание 3.2. Выбор m не зависит от w, R, s^*. Дополнительное свойство m : $m + s_0 > s_1$ будет использовано при доказательстве следующей леммы 3.3.

Лемма 3.3. *Если выполняются условия леммы 3.1 и леммы 3.2, то либо* $w < 2^{s_1}R^{\varepsilon}$, *либо*

$$u(z,t) > \mu^- + \frac{w}{2^{s_0+m+1}} \tag{3.6}$$

для всех $(z,t) \in S^{s_1}_{R/8}(z_0,t_0)$.

Доказательство леммы 3.3. Выберем $\rho_n = R/8 + R/2^{n+3}$, $\bar\rho_n = (\rho_n + \rho_{n+1})/2$, $k_n = \mu^- + w/2^{s_0+m+1} + w/2^{s_0+m+1+n}, n = 0,1,2,..$ Обозначим $S_n = S^{s_1}_{\rho_n}, \bar S_n = S^{s_1}_{\bar\rho_n}$. Выберем срезающую функцию $\xi(z)$, которая равна 1 на $\bar S_n$, нулю вне S_n, и $|D_L\xi| \leq 2^{n+1}/\rho_n$. Поскольку $u \in \mathfrak{B}_{\lambda+1,loc}(S_T, \bar M, C)$, то неравенство (1.5) справедливо на каждом цилиндре S_n :

$$\begin{gathered}\underset{t_0-\theta_1(R/8)^{\lambda+1}\leq\tau\leq t_0}{ess\sup} ||(u-k_n)^-||^2_{L_2(B_{\bar\rho_n})} + ||D_L(u-k_n)^-||^{\lambda+1}_{L_{\lambda+1}(\bar S_n)} \leq \\ \leq ||(u-k_n)^-||^2_{L_2(B_{\bar\rho_n})}(t_0 - \theta_1(R/8)^{\lambda+1}) + \\ +C_{1.5}\tfrac{2^{n(\lambda+1)}}{\rho_n^{\lambda+1}}\iint\limits_{S_n}[(u-k_n)^-]^{\lambda+1}dzd\tau.\end{gathered} \tag{3.7}$$

Заметим, что поскольку $s_1 :\ \bar t - \theta_0(R/2)^{\lambda+1} = t_0 - \theta_1(R/2)^{\lambda+1}$, то $\tau = t_0 - \theta_1(R/8)^{\lambda+1}$: $\tau \in (\bar t - \theta_0(R/2)^{\lambda+1}, \bar t)$ и по лемме 3.1 $(u-k_n)^-(t_0 - \theta_1(R/8)^{\lambda+1}) = 0$ для всех $z \in B_{R/2}(z_0)$. Также заметим, что в силу выбора k_n

$$\left(\frac{2^{s_1}}{w}\right)^{\lambda-1} ess\sup \int\limits_{B_{\bar\rho_n}} [(u-k_n)^-]^{\lambda+1}dz \leq$$

$$\leq \left(\frac{2^{s_0+m}}{w}\right)^{\lambda-1} ess\sup \int\limits_{B_{\bar\rho_n}} [(u-k_n)^-]^{\lambda+1}dz \leq ess\sup \int\limits_{B_{\bar\rho_n}} [(u-k_n)^-]^2dz.$$

Сделав в неравенстве (3.7) замену переменной $\tau = t_0 + \theta_1\acute z$, получим оценку на цилиндрах $S_n = B_{\rho_n} \times (-(R/8)^{\lambda+1}, 0), \bar S_n = B_{\bar\rho_n} \times (-(R/8)^{\lambda+1}, 0)$:

$$\theta_1 ess\sup \int\limits_{B_{\bar\rho_n}} [(v-k_n)^-]^{\lambda+1}dz + \theta_1||D_L(v-k_n)^-||^{\lambda+1}_{L_{\lambda+1}(\bar S_n)} \leq C_{1.5}\frac{2^{n(\lambda+1)}}{\rho_n^{\lambda+1}}\theta_1|A_n^-|.$$

$$||(v-k_n)^-||^{\lambda+1}_{\mathfrak{V}_{\lambda+1}(\bar{S}_n)} \le C_{1.5}\frac{2^{n(\lambda+1)}}{\rho_n^{\lambda+1}}\left(\frac{w}{2^{s_1}}\right)^{\lambda+1}|A_n^-|. \tag{3.8}$$

Введем кусочно-гладкую срезающую функцию $\varphi_n(z)$, которая равна 1 на $B_{\rho_{n+1}}$, 0 вне $B_{\bar{\rho}_n}$, $|D_L\varphi_n| \le 2^{n+1}/\rho_n$. Тогда $(v-k_n)^-\varphi_n \in \mathfrak{V}^0_{\lambda+1}(\bar{S}_n)$. Следствие 2.5 и неравенство (3.8) дают

$$||(v-k_n)^-||^{\lambda+1}_{\mathfrak{V}_{\lambda+1}(S_{n+1})} \le ||(v-k_n)^-||^{\lambda+1}_{\mathfrak{V}_{\lambda+1}(\bar{S}_n)} \le$$

$$\le C_{2.5}|A_n^-|^{\frac{\lambda+1}{Q+\lambda+1}}||(v-k_n)^-\varphi_n||^{\lambda+1}_{\mathfrak{V}^0_{\lambda+1}(\bar{S}_n)} \le$$

$$\le C_{2.5}|A_n^-|^{\frac{\lambda+1}{Q+\lambda+1}}\left\{||(v-k_n)^-||^{\lambda+1}_{\mathfrak{V}_{\lambda+1}(\bar{S}_n)} + \frac{2^{(n+2)(\lambda+1)}}{{\rho_n}^{\lambda+1}}||(v-k_n)^-||^{\lambda+1}_{L_{\lambda+1}(S_n)}\right\} \le$$

$$\le C_{2.5}C_{1.5}\frac{2^{n(\lambda+1)}}{\rho_n^{\lambda+1}}\left(\frac{w}{2^{s_1}}\right)^{\lambda+1}|A_n^-|^{1+\frac{\lambda+1}{Q+\lambda+1}}.$$

Так как

$$||(v-k_n)^-||^{\lambda+1}_{\mathfrak{V}_{\lambda+1}(S_{n+1})} \ge$$

$$\ge |k_n-k_{n+1}|^{\lambda+1}|A_{n+1}^-| \ge (w/2^{s_0+m})^{\lambda+1}/2^{(\lambda+1)(n+1)}|A_{n+1}^-|,$$

имеем

$$|A_{n+1}^-| \le C_{2.5}C_{1.5}2^{\lambda+1}\frac{4^{n(\lambda+1)}}{\rho_n^{\lambda+1}}|A_n^-|^{1+\frac{\lambda+1}{Q+\lambda+1}} = C_{3.9}\frac{4^{n(\lambda+1)}}{\rho_n^{\lambda+1}}|A_n^-|^{1+\frac{\lambda+1}{Q+\lambda+1}}. \tag{3.9}$$

Введем новое обозначение $Y_n = |A_n^-|/|S_n|$. Тогда

$$Y_{n+1} \le C_{3.9}4^{n(\lambda+1)}Y_n^{1+\frac{\lambda+1}{Q+\lambda+1}}.$$

Заметим, что

$$Y_0 = \frac{\left|(z,t) : u > \mu^- + \frac{w}{2^{s_0+m}}, z \in B_{R/4}, t \in [t_0 - \theta_1(R/8)^{\lambda=1}, t_0]\right|}{|B_{R/4}\times[t_0-\theta_1(R/8)^{\lambda=1}, t_0]|} \le \alpha_0$$

в следствие леммы 3.2. Применим лемму 2.6. Доказательство завершено. □

Утверждение 3.4. *Для некоторого, фиксированного в лемме 3.1,* $\alpha_0 \in (0,1)$ *найдутся целые положительные* s_1 *и* m, *такие что, если существует цилиндр* $S_R^{s_0}(z_0,\bar{t})$:

$$\left|(z,t)\in S_R^{s_0} : u(z,t) < \mu^- + \frac{w}{2^{s_0}}\right| \le \alpha_0\left|S_R^{s_0}\right|,$$

тогда либо $w < 2^{s_1}R^\varepsilon$, *либо*

$$\operatorname*{\mathit{ess\ osc}}_{S^{s_1}_{R/8}(z_0,t_0)} u < w\left(1 - \frac{1}{2^{s_0+m+1}}\right). \tag{3.10}$$

Доказательство. Если выполняется условие (3.1) и

$$H^- = ||(u - [\mu^- + \frac{w}{2^{s_0+1}}])^-||_{\infty, S^{s_1}_{R/2}} \geq \frac{w}{2^{s_0+2}},$$

то справедливы леммы 3.1, 3.2, 3.3, откуда

$$u(z,t) > \mu^- + \frac{w}{2^{s_0+m+1}}$$

для всех $(z,t) \in S^{s_1}_{R/8}(z_0,t_0)$. Следовательно,

$$\underset{S^{s_1}_{R/8}(z_0,t_0)}{ess\inf}\, u(z,t) \geq \mu^- + \frac{w}{2^{s_0+m+1}}.$$

Тогда

$$\underset{S^{s_1}_{R/8}}{ess\ osc}\, u(z,t) = \underset{S^{s_1}_{R/8}}{ess\sup}\, u(z,t) - \underset{S^{s_1}_{R/8}}{ess\inf}\, u(z,t) \leq$$

$$\leq \mu^+ - \mu^- - \frac{w}{2^{s_0+m+1}} = w\left(1 - \frac{1}{2^{s_0+m+1}}\right).$$

Если же

$$H^- = ||(u - [\mu^- + \frac{w}{2^{s_0+1}}])^-||_{\infty, S^{s_1}_{R/2}} < \frac{w}{2^{s_0+2}},$$

то

$$\underset{S^{s_1}_{R/8}}{ess\inf}\, u(z,t) \geq \mu^- + \frac{w}{2^{s_0+1}} - \frac{w}{2^{s_0+2}} = \mu^- + \frac{w}{2^{s_0+2}} \geq \mu^- + \frac{w}{2^{s_0+m+1}}.$$

Утверждение доказано.□

Замечание 3.3. Число s_1 зависит от t_0 и $s_1 \leq s^*$, m зависит только от выбора α_0.

4. Вторая альтернатива. Первая альтернатива имеет смысл, если для некоторого, фиксированного в лемме 3.1, числа $\alpha_0 \in (0,1)$ существует хотя бы один цилиндр $S^{s_0}_R(z_0,\bar{t})$, такой что

$$\left|(z,t) \in S^{s_0}_R : u(z,t) < \mu^- + \frac{w}{2^{s_0}}\right| \leq \alpha_0 \left|S^{s_0}_R\right|. \tag{4.1}$$

Во второй альтернативе будем предполагать, что для подобного α_0 не существует ни одного цилиндра, для которого справедливо (4.1). Тогда для всех $\bar{t} < t_0 < T$ и цилиндров $S^{s_0}_R(z_0,\bar{t})$ выполняется

$$\left|(z,t) \in S^{s_0}_R : u(z,t) < \mu^- + \frac{w}{2^{s_0}}\right| > \alpha_0 \left|S^{s_0}_R\right|.$$

Используя верное неравенство $\mu^+ - w/2^{s_0} \geq \mu^- + w/2^{s_0}$, имеем

$$\left|(z,t) \in S^{s_0}_R : u(z,t) < \mu^- + \frac{w}{2^{s_0}}\right| \leq (1-\alpha_0) \left|S^{s_0}_R\right|, \tag{4.2}$$

для всех $S_R^{s_0}(z_0,\bar t)$, где $\bar t : \bar t - \theta_0 R^{\lambda+1} \geq t_0 - \theta_* R^{\lambda+1}, \bar t \leq t_0$.

Лемма 4.1. *Пусть справедливо (4.2). Тогда существует* $t^* \in [\bar t - \theta_0 R^{\lambda+1}, \bar t - (\alpha_0/2)\theta_0 R^{\lambda+1}]$, *такое что*

$$\left| z \in B_R : u(z,t^*) > \mu^+ - \frac{w}{2^{s_0}} \right| \leq \left(\frac{1-\alpha_0}{1-\frac{\alpha_0}{2}} \right) |B_R|.$$

Доказательство. От противного. Допустим, что не существует такого t^*, тогда для почти всех $t \in [\bar t - \theta_0 R^{\lambda+1}, \bar t - (\alpha_0/2)\theta_0 R^{\lambda+1}]$ справедливо

$$\left| z \in B_R : u(z,t) > \mu^+ - \frac{w}{2^{s_0}} \right| > \left(\frac{1-\alpha_0}{1-\frac{\alpha_0}{2}} \right) |B_R|.$$

Проинтегрировав неравенство по t на множестве $[\bar t - \theta_0 R^{\lambda+1}, \bar t - (\alpha_0/2)\theta_0 R^{\lambda+1}]$, получаем

$$\left| (z,t) \in S_R^{s_0}(\bar t) : u(z,t) > \mu^+ - \frac{w}{2^{s_0}} \right| >$$

$$> \int\limits_{\bar t - \theta_0 R^{\lambda+1}}^{\bar t - (\alpha_0/2)\theta_0 R^{\lambda+1}} \left\{ z \in B_R : u(z,t) > \mu^+ - \frac{w}{2^{s_0}} \right\} dt > (1-\alpha_0)|S_R^{s_0}|,$$

что противоречит (4.2).□

Лемма 4.2. *Предположим, что*

$$H^+ = ||(u - [\mu^+ - \frac{w}{2^{s_0+1}}])^+||_{\infty, S_R^{s_0}} > \frac{w}{2^{s_0+2}}.$$

Тогда существует целое положительное l, определенное в (2.1), не зависящее от w и R, такое что либо $w \leq 2^{s_0+l} R^{\varepsilon}$, либо

$$\left| z \in B_R : u(z,t) > \mu^+ - \frac{w}{2^{s_0+l}} \right| \leq \left(1 - \left(\frac{\alpha_0}{2} \right)^2 \right) |B_R|$$

для всех $t \in [\bar t - (\alpha_0/2)\theta_0 R^{\lambda+1}, \bar t]$.

Доказательство. Используем неравенство (1.6). Обозначим $S_R^* = B_R \times [t^*, t]$, $S_{R-\sigma R}^* = B_{R-\sigma R} \times [t^*, t]$, $t \in [\bar t - (\alpha_0/2)\theta_0 R^{\lambda+1}, \bar t]$. Положим $k = \mu^+ - w/2^{s_0}$, $\nu = w/2^{s_0+l}$. В качестве срезающей функции выберем $\xi(z)$, которая равна 1 на шаре $B_{R-\sigma R}$, нулю вне шара B_R, и $|D_L \xi| \leq 1/(\sigma R)$. Тогда (1.6) примет вид

$$\int\limits_{B_{R-\sigma R}} \psi^2 (H^+, (u - [\mu^+ - \frac{w}{2^{s_0}}])^+(\tau), \frac{w}{2^{s_0+l}}) \xi^{\lambda+1}(z) dz \leq$$

$$\leq \int\limits_{B_R} \psi^2((u-k)^+)(t^*) dz + C_{1.6} \int\!\!\int\limits_{S_R^*} \psi |\psi|^{1-\lambda} |D_L \xi|^{\lambda+1} dz d\tau.$$

Заметим, что $(u-k)^+ = max([u-\mu^+] + w/2^{s_0}, 0) \le max(w/2^{s_0}, 0) = w/2^{s_0}$. Тогда $H^+ \le w/2^{s_0}$ и

$$\psi = \ln^+\left(\frac{H^+}{H^+ - (u - [\mu^+ - \frac{w}{2^{s_0}}])^+ + \frac{w}{2^{s_0+l}}}\right) \le \ln^+\left(\frac{H^+}{\frac{w}{2^{s_0+l}}}\right) \le \ln(2^l) = l\ln 2.$$

$$|\psi_u|^{1-\lambda} = \left|\frac{1}{H^+ - (u-k)^+ + \frac{w}{2^{s_0+l}}}\right|^{1-\lambda} = |H^+ - (u-k)^+ + \frac{w}{2^{s_0+l}}|^{\lambda-1} \le$$

$$\le \left|\frac{w}{2^{s_0}} + \frac{w}{2^{s_0}}\right|^{\lambda-1} = 2^{\lambda-1}\left(\frac{w}{2^{s_0}}\right)^{\lambda-1} = \theta_0 2^{\lambda-1}.$$

Поскольку справедлива лемма 4.1, то оценим первый интеграл справа

$$\int\limits_{B_R} \psi^2((u-k)^+)(t^*)dz \le \int\limits_{\{z\in B_R: u>\mu+-\frac{w}{2^{s_0}}\}} \ln^2\left(\frac{H^+}{\nu}\right)dz \le$$

$$\le \ln^2\left(\frac{\frac{w}{2^{s_0}}}{\frac{w}{2^{s_0+l}}}\right)|\{z\in B_R : u > \mu + -\frac{w}{2^{s_0}}\}| \le l^2 \ln^2 2\left(\frac{1-\alpha_0}{1-\frac{\alpha_0}{2}}\right)|B_R|.$$

Получим оценку

$$\int\limits_{B_{R-\sigma R}} \psi^2((u-k)^+)(t)dz \le l^2\ln^2 2\left(\frac{1-\alpha_0}{1-\frac{\alpha_0}{2}}\right)|B_R| + \frac{C_{1.6}\theta_0 l 2^{\lambda-1}\ln 2(t-t^*)}{(\sigma R)^{\lambda+1}}|B_R|.$$

Учтем, что $\bar{t} - t^* \le \theta_0 R^{\lambda+1}$. Имеем

$$\int\limits_{B_{R-\sigma R}} \psi^2((u-k)^+)(t)dz \le l^2\ln^2 2\left(\frac{1-\alpha_0}{1-\frac{\alpha_0}{2}}\right)|B_R| + \frac{C_{1.6} l 2^{\lambda-1}\ln 2}{\sigma^{\lambda+1}}|B_R|.$$

Оценим левую часть неравенства

$$\int\limits_{B_{R-\sigma R}} \psi^2((u-k)^+)(t)dz \ge \int\limits_{\{z\in B_{R-\sigma R}: u>\mu+-\frac{w}{2^{s_0+l}}\}} \ln^2\left(\frac{H^+}{\nu}\right)dz \ge$$

$$\ge \ln^2\left(\frac{\frac{w}{2^{s_0+2}}}{\frac{w}{2^{s_0+l}}}\right)|\{z\in B_{R-\sigma R} : u > \mu + -\frac{w}{2^{s_0+l}}\}| \ge$$

$$\ge (l-2)^2\ln^2 2|\{z\in B_{R-\sigma R} : u > \mu + -\frac{w}{2^{s_0+l}}\}|.$$

Имеем

$$|\{z\in B_{R-\sigma R} : u > \mu + -\frac{w}{2^{s_0+l}}\}| \le$$

$$\leq \frac{1}{(l-2)^2 \ln^2 2}\left(l^2 \ln^2 2\left(\frac{(1-\alpha_0)}{(1-\frac{\alpha_0}{2})}\right)|B_R| + \frac{C_{1.6} l 2^{\lambda-1}\ln 2}{\sigma^{\lambda+1}}|B_R|\right).$$

Тогда

$$|\{z \in B_R : u > \mu + -\frac{w}{2^{s_0+l}}\}| \leq$$

$$\leq |\{z \in B_{R-\sigma R} : u > \mu + -\frac{w}{2^{s_0+l}}\}| + |B_R - B_{R-\sigma R}| \leq$$

$$\leq \left(\frac{l^2}{(l-2)^2}\frac{1-\alpha_0}{1-\frac{\alpha_0}{2}} + \frac{C_{1.6} l 2^{\lambda-1}}{\sigma^{\lambda+1}(l-1)^2 \ln 2} + Q\sigma\right)|B_R|$$

для всех $t \in [t^*, \bar{t}]$. По условию (2.1) l выбрана таким образом, что $(l/(l-2))^2 < (1-\alpha_0/2)(1+\alpha_0)$. Выберем σ достаточно малым, чтобы

$$\frac{C_{1.6} l 2^{\lambda-1}}{\sigma^{\lambda+1}(l-2)^2 \ln 2} \leq \frac{3}{8}\alpha_0^2,\ Q\sigma \leq \frac{3}{8}\alpha_0^2.$$

Тогда

$$|\{z \in B_R : u > \mu + -\frac{w}{2^{s_0+l}}\}| \leq (1-\alpha_0^2 + \frac{3}{8}\alpha_0^2 + \frac{3}{8}\alpha_0^2)|B_R| = (1-(\alpha_0/2)^2)|B_R|$$

для каждого $t \in [\bar{t} - (\alpha_0/2)\theta_0 R^{\lambda+1}, \bar{t}]$, поскольку $t^* \leq \bar{t} - (\alpha_0/2)\theta_0 R^{\lambda+1}$. Что и требовалось доказать. □

Замечание 4.1. Условие (4.2) выполняется для всех $\bar{t} \leq t_0 : t_0 \geq \bar{t} \geq t_0 - (\theta_* - \theta_0)R^{\lambda+1}$. Лемма 4.2 выполняется для $t \in [\bar{t} - (\alpha_0/2)\theta_0 R^{\lambda+1}, \bar{t}]$, значит, $t \in [t_0 - (\theta_* - \theta_0)R^{\lambda+1} - (\alpha_0/2)\theta_0 R^{\lambda+1}, t_0] = [t_0 - (\theta_* - (1-(\alpha_0/2))\theta_0)R^{\lambda+1}, t_0]$. Заметим, что $\theta_* - (1-(\alpha_0/2))\theta_0 = (2^{s^*}/w)^{\lambda-1} - (1-(\alpha_0/2))(2^{s_0}/w)^{\lambda-1} \geq (2^{s^*}/w)^{\lambda-1}(1 - 1/(1+\alpha_0/2)) = \theta_*(\alpha_0/(\alpha_0+2)) > \theta_*\alpha_0/3$. Значит, лемма 4.2 выполняется для всех $t \in [t_0 - (\alpha_0/3)\theta_* R^{\lambda+1}, t_0]$.

Лемма 4.3. *Если (4.2) выполняется, тогда для каждого* $\alpha_0 \in (0,1)$, *удовлетворяющего (2.1), существует целое положительное* s^*, *определенное в (2.2), такое что на цилиндре* $S_R^{s^*}(\alpha_0) = B_R \times [\bar{t} - (\alpha_0/3)\theta_* R^{\lambda+1}, \bar{t}]$ *либо* $w \leq 2^{s^*} R^{\varepsilon}$, *либо*

$$\left|(z,t) \in S_R^{s^*} : u(z,t) < \mu^+ - \frac{w}{2^{s^*}}\right| \leq \alpha_0 \left|S_R^{s^*}\right|.$$

Доказательство. Используем неравенство (1.5). Рассмотрим цилиндры $S_R^p(\alpha_0)$ и $S_{2R}^p(\alpha_0)$. Выберем срезающую функцию $\xi(z,t)$, которая равна единице на $S_R^p(\alpha_0)$, нулю вне $S_{2R}^p(\alpha_0)$, и такую, что $\xi(z, \bar{t} - (\alpha_0/3)(2^p/w)^{\lambda-1}2R^{\lambda+1}) = 0$, $0 < \xi_\tau \leq C_\xi/((\alpha_0/3)(2^p/w)^{\lambda-1}2R^{\lambda+1})$, $|D_L\xi| \leq 2/R$. Уровень $k = \mu^+ - w/2^{p-1}, p > s_0 + l$. Тогда неравенство (1.5) принимает вид

$$\begin{gathered}\iint\limits_{S_R^p(\alpha_0)} |D_L(u-k)^+|^{\lambda+1} dz d\tau \leq \tfrac{C_{1.5}}{R^{\lambda+1}} \iint\limits_{S_{2R}^p(\alpha_0)} [(u-k)^+]^{\lambda+1} dz d\tau + \\ + \tfrac{3C_{1.5}}{(\alpha_0/3)(\frac{2^p}{w})^{\lambda-1}2R^{\lambda+1}} \iint\limits_{S_{2R}^p(\alpha_0)} [(u-k)^+]^2 dz d\tau \leq \tfrac{C_{4.3}2^{Q+\lambda+1}}{\alpha_0 R^{\lambda+1}} \left(\tfrac{w}{2^p}\right)^{\lambda+1} |S_R^p(\alpha_0)|. \end{gathered} \tag{4.3}$$

Теперь используем лемму 2.1 на шаре B_R. Выберем $l = \mu^+ - w/2^p, k = \mu^+ - w/2^{p-1}$. Тогда для всех $t \in [\bar{t} - (\alpha_0/2)\theta_0 R^{\lambda+1}, \bar{t}]$

$$\lambda\left(\frac{w}{2^p}\right)|\{z \in B_R,\ u < \mu^+ - \frac{w}{2^p}\}| \leq \frac{C_{2.4}|B_R|^{\frac{Q+1}{Q}}}{mes\ (B_R - A^+_{k,R})} \int\limits_{A^+_{k,R} - A^+_{l,R}} |D_L u| dz.$$

Лемма 4.2 дает на отрезке $[\bar{t} - (\alpha_0/3)(2^p/w)^{\lambda-1}R^{\lambda+1}, \bar{t}]$ для всех $p \leq s^*$ оценку

$$mes\ (B_R - A^+_{\mu^+ - \frac{w}{2^{p-1}},R}) \geq \left(\frac{\alpha_0}{2}\right)^2 |B_R|.$$

Используя последнюю оценку, получаем

$$\left(\frac{w}{2^p}\right) mes\ (A^+_{\mu^+ - \frac{w}{2^p},R}(t)) \leq \frac{4C_{2.4}}{\alpha_0^2}|B_R|^{\frac{1}{Q}} \int\limits_{A^+_{k,R} - A^+_{l,R}} |D_L u| dz.$$

Обозначим

$$A_p = \int\limits_{\bar{t} - (\frac{\alpha_0}{3})\left(\frac{2^p}{w}\right)^{\lambda-1} R^{\lambda+1}}^{\bar{t}} mes\ \{A^+_{\mu^+ - \frac{w}{2^p},R}(t)\} dt.$$

Тогда, проинтегрировав последнее неравенство по t на отрезке $[\bar{t} - (\alpha_0/3)(2^p/w)^{\lambda-1}R^{\lambda+1}, \bar{t}]$, и применив неравенство Гельдера, получаем

$$\left(\frac{w}{2^p}\right) A_p \leq$$

$$\leq \frac{4C_{2.4}}{\alpha_0^2}|B_R|^{\frac{1}{Q}} \left(\int\limits_{S^p_R(\alpha_0)}\int |D_L(u-k)^+|^{\lambda+1} dz d\tau \right)^{\frac{1}{\lambda+1}} (A_p - A_{p-1})^{\frac{\lambda}{\lambda+1}}.$$

Используем (4.3)

$$\left(\frac{w}{2^p}\right)^{\frac{\lambda+1}{\lambda}} A_p^{\frac{\lambda+1}{\lambda}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{4C_{2.4}}{\alpha_0^2}\right)^{\frac{\lambda+1}{\lambda}} |B_R|^{\frac{\lambda+1}{\lambda Q}} \left(\frac{C_{4.3} 2^{Q+\lambda+1}}{\alpha_0 R^{\lambda+1}} \left(\frac{w}{2^p}\right)^{\lambda+1} |S^p_R(\alpha_0)| \right)^{\frac{1}{\lambda}} (A_p - A_{p-1}),$$

$$\begin{aligned} A_p^{\frac{\lambda+1}{\lambda}} &\leq \frac{2^{\frac{2(\lambda+1)}{\lambda} + \frac{Q+\lambda+1}{\lambda}} C_{2.4}^{\frac{\lambda+1}{\lambda}} C_{4.3}^{\frac{1}{\lambda}}}{\alpha_0^{\frac{2(\lambda+1)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}}} |S^p_R(\alpha_0)|^{\frac{1}{\lambda}} (A_p - A_{p-1}) = \\ &= \frac{C_{4.4}}{\alpha_0^{\frac{2(\lambda+1)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}}} |S^p_R(\alpha_0)|^{\frac{1}{\lambda}} (A_p - A_{p-1}), \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\sum_{p=s_0+l+1}^{s^*} A_p^{\frac{\lambda+1}{\lambda}} \leq \frac{C_{4.4}}{\alpha_0^{\frac{2(\lambda+1)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}}} |S^{s^*}_R(\alpha_0)|^{\frac{1}{\lambda}} \sum_{p=s_0+l+1}^{s^*} (A_p - A_{p-1}).$$

Поскольку для всех $p \leq s^*$, $A_{s^*} \leq A_p$, имеем

$$[s^* - s_0 - l - 1] A_{s^*}^{\frac{\lambda+1}{\lambda}} \leq \frac{C_{4.4}}{\alpha_0^{\frac{2(\lambda+1)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}}} |S_R^{s^*}(\alpha_0)|^{\frac{1}{\lambda}} A_{s^*},$$

$$A_{s^*} \leq \frac{C_{4.4}}{[s^* - s_0 - l - 1]^{\lambda} \alpha_0^{\frac{2}{\lambda} + \frac{1}{\lambda(\lambda+1)}}} |S_R^{s^*}(\alpha_0)| \leq \frac{C_{4.4}}{s^{*\lambda} \alpha_0^3} |S_R^{s^*}(\alpha_0)|.$$

s^* задано достаточно большим, чтобы $C_{4.4}/(s^{*\lambda}\alpha_0^3) \leq \alpha_0$. Лемма доказана. □

Лемма 4.4. *Предположим, что (4.2) выполняется, тогда s^*, определенное в (2.2), таково, что либо $w \leq 2^{s^*} R^{\varepsilon}$, либо*

$$u < \mu^+ - \frac{w}{2^{s^*+1}}$$

для всех $(z,t) \in S_{R/2}^{s^*}(\alpha_0)$.

Доказательство. Поскольку выполняется (4.2), то справедлива лемма 4.3. Из леммы 4.3 следует, что справедливо условие (2.7) при $\rho = R, s = s^*, k = \mu^+ - \frac{w}{2^{s^*}}$. Поскольку $u \in \mathfrak{V}_{\lambda+1}(S_\rho^s(z,\bar{t}))$, то верно неравенство (1.5). Используем лемму 2.7. Лемма 4.4 доказана. □

Утверждение 4.5. *Положительное целое s^*, не зависящее от w и R, определенное в (2.2), таково, что если верно (4.2) сразу для всех $\bar{t}$ на всех $S_R^{s_0}(z_0,\bar{t})$, тогда либо $w \leq 2^{s^*} R^{\varepsilon}$, для некоторого $\varepsilon : 0 < \varepsilon < (\lambda+1)/(\lambda-1)$, либо*

$$\mathop{ess\ osc}_{S_{R/2}^{s^*}(\alpha_0)} u \leq w\left(1 - \frac{1}{2^{s^*+1}}\right),$$

где $S_{R/2}^{s^*}(\alpha_0) = B_{R/2} \times (t_0 - (\alpha_0/3)\theta_*(R/2)^{\lambda+1}, t_0)$.

Доказательство. Если выполняется условие (4.2), и

$$H^+ = ||(u - [\mu^+ - \frac{w}{2^{s_0+1}}])^-||_{\infty, S_R^{s_0}} \geq \frac{w}{2^{s_0+2}},$$

то справедливы леммы 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, откуда

$$u(z,t) < \mu^+ - \frac{w}{2^{s^*+1}}$$

для всех $(z,t) \in S_{R/2}^{s^*}(\alpha_0)(z_0,t_0)$. Следовательно,

$$\mathop{ess\sup}_{S_{R/2}^{s^*}(\alpha_0)(z_0,t_0)} u(z,t) \leq \mu^+ - \frac{w}{2^{s^*+1}}.$$

Тогда

$$\mathop{ess\ osc}_{S_{R/2}^{s^*}(\alpha_0)} u(z,t) = \mathop{ess\sup}_{S_{R/2}^{s^*}(\alpha_0)} u(z,t) - \mathop{ess\inf}_{S_{R/2}^{s^*}(\alpha_0)} u(z,t) \leq$$

$$\leq \mu^+ - \frac{w}{2^{s^*+1}} - \mu^- = w\left(1 - \frac{1}{2^{s^*+1}}\right).$$

Если же

$$H^+ = ||(u - [\mu^+ - \frac{w}{2^{s_0+1}}])^-||_{\infty, S_R^{s_0}} < \frac{w}{2^{s_0+2}},$$

то

$$\operatorname*{ess\,sup}_{S^{s^*}_{R/2}(\alpha_0)} u(z,t) \leq \mu^+ - \frac{w}{2^{s_0+1}} + \frac{w}{2^{s_0+2}} = \mu^+ - \frac{w}{2^{s_0+2}} \leq \mu^+ - \frac{w}{2^{s^*+1}}.$$

Утверждение доказано. □

5. Доказательство теоремы вложения.

Утверждение 5.1. *Пусть* $u \in \mathfrak{B}_{\lambda+1,loc}(S_T, \bar{M}, C_{1.5}, C_{1.6})$. *Точка* $(z_0, t_0) \in S_T$ *такова, что для некоторых* $R_0 > 0$ *и* $\varepsilon > 0$ *цилиндр* $S^{\varepsilon}_{R_0} = B_{R_0}(z_0) \times [t_0 - R_0^{\lambda+1-\varepsilon(\lambda-1)}, t_0] \subset S_T$. *Для определенного в (2.2) положительного целого* s^*, *любого* $R : 0 < R \leq R_0$ *и* $w : 0 < w \leq 2\bar{M}$,

$$\operatorname*{ess\ osc}_{S^{s^*}_R(z_0,t_0)} u(z,t) \leq w,$$

где $S^{s^*}_R = B_R \times [t_0 - (2^{s^*}/w)^{\lambda-1} R^{\lambda+1}, t_0]$ *справедливо: либо* $w \leq 2^{s^*+1} R^{\varepsilon}$, *либо найдутся такие* $\sigma_0 \in \mathbb{N}$ *и* $\eta_0 \in (0,1)$, *что*

$$\operatorname*{ess\ osc}_{S^{\sigma_0}_{R/8}(z_0,t_0)} u(z,t) \leq \eta_0 w. \tag{5.1}$$

Замечание 5.1. Точка (z_0, t_0) – произвольная фиксированная точка из S_T.

Доказательство. Справедливо либо утверждение 3.4, либо утверждение 4.5. Следовательно, либо $w < 2^{s_1} R^{\varepsilon}$, откуда немедленно следует, что $w \leq 2^{s^*+1} R^{\varepsilon}$, либо

$$\operatorname*{ess\ osc}_{S^{s^*}_{R/2}(\alpha_0)} u \leq w\left(1 - \frac{1}{2^{s^*+1}}\right),$$

где $S^{s^*}_{R/2}(\alpha_0) = B_{R/2} \times (t_0 - (\alpha_0/3)\theta_*(R/2)^{\lambda+1}, t_0)$, либо $w \leq 2^{s^*+1} R^{\varepsilon}$, либо

$$\operatorname*{ess\ osc}_{S^{s_1}_{R/8}(z_0,t_0)} u < w\left(1 - \frac{1}{2^{s_0+m+1}}\right),$$

где $s_1 \leq s^*, m \geq s^*$.

Выберем $\sigma_0 \in \mathbb{N}$ – максимальное, при условии что $2^{\sigma_0(\lambda-1)} \leq (\alpha_0/3) 2^{s_1(\lambda-1)}$ и $\eta_0 = (1 - (1/2^{s_0+m+1}))$. Утверждение следует из элементарных оценок. □

Пусть $\bar{\theta} = \left(2^{s^*}/\bar{w}\right)^{\lambda-1}$, $\bar{w}$ – будет определена позднее, $S^{\varepsilon}_{R_0} = B_{R_0} \times (t_0 - R_0^{(\lambda+1)-\varepsilon(\lambda-1)}, t_0)$, $S^{\bar{\theta}}_{R_0} = B_{R_0} \times (t_0 - \bar{\theta} R_0^{\lambda+1}, t_0)$. Определим последовательность вложенных цилиндров $\{S_h\}_{h=0}^{\infty}$. Если

$$\operatorname*{ess\ osc}_{S^{\varepsilon}_{R_0}} u(z,t) \leq 2^{s^*} R_0^{\varepsilon},$$

тогда положим $w_0 = 2^{s^*} R_0^{\varepsilon}, S_0 = B_{R_0} \times (t_0 - (2^{s^*}/w_0) R_0^{\lambda+1}, t_0) = S_{R_0}^{\varepsilon}$. В противном случае, если

$$\underset{S_{R_0}^{\varepsilon}}{ess\ osc}\ u(z,t) > 2^{s^*} R_0^{\varepsilon},$$

существует $\bar{w} : 2^{s^*} R_0^{\varepsilon} < \bar{w} \le 2\bar{M},$ такая, что

$$\underset{S_{R_0}^{\bar{\theta}}}{ess\ osc}\ u(z,t) \le \bar{w}.$$

Положим $w_0 = \bar{w}, S_0 = S_{R_0}^{\bar{\theta}}$. Для $h = 0,1,2,..$ $w_h = max[\eta_0 w_{h-1}, 2^{s^*} R_{h-1}^{\varepsilon}], \theta_h = (2^{s^*}/w_h)^{\lambda-1}, R_h = R_0/C_{5.2}^h$,

$$S_h = S_{R_h}^{\theta_h} = B_{R_h}(z_0) \times [t_0 - \left(\frac{2^{s^*}}{w_h}\right)^{\lambda-1} R_h^{\lambda+1}, t_0],\ \text{где}\ \ C_{5.2} = 8\left(2^{s^*-\sigma_0}/\eta_0\right)^{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}. \quad (5.2)$$

Утверждение 5.2 . *Пусть выполняются требования утверждения 5.1, тогда для определенной выше последовательности цилиндров справедливо:*

$$S_{h-1} \subset S_h,\ \underset{S_h}{ess\ osc}\ u(z,t) \le w_h, h = 0,1,2,.. \quad (5.3)$$

Доказательство. Заметим, что для $h = 1,2,..$ $R_{h-1} > R_h,\ w_{h-1} > w_h$. Действительно, первое неравенство очевидно. Для второго неравенства возможны два случая. Если $2^{s^*} R_{h-1}^{\varepsilon} \le \eta_0 w_{h-1}$, то $w_h = \eta_0 w_{h-1} < w_{h-1}$, иначе, $\eta_0 w_{h-1} < 2^{s^*} R_{h-1}^{\varepsilon}$, и $w_h = 2^{s^*} R_{h-1}^{\varepsilon} < 2^{s^*} R_{h-2}^{\varepsilon} < max[\eta_0 w_{h-2}, 2^{s^*} R_{h-2}^{\varepsilon}] = w_{h-1}$. Но число $C_{5.2}$ выбрано таким образом, что справедлива оценка

$$\left(\frac{2^{s^*}}{w_h}\right)^{\lambda-1} R_h^{\lambda+1} \le \left(\frac{2^{\sigma_0}}{w_{h-1}}\right)^{\lambda-1} \left(\frac{R_{h-1}}{8}\right)^{\lambda+1} \le \left(\frac{2^{s^*}}{w_{h-1}}\right)^{\lambda-1} R_{h-1}^{\lambda+1}.$$

Откуда имеем $S_{h-1} \subset S_h$. Докажем оставшуюся часть (5.2) методом математической индукции. При $h = 0$ утверждение (5.2) тривиально выполняется. Предполагаем, что (5.2) справедливо при $h = k-1$. Докажем (5.2) для случая $h = k$. Из предположений имеем

$$\underset{S_{k-1}}{ess\ osc}\ u(z,t) \le w_{k-1}.$$

В утверждении 5.1 выберем $w = w_{k-1}, R = R_{k-1}$. Заметим, что случай $w_{k-1} \le 2^{s^*} R_{k-1}^{\varepsilon} \le max[\eta_0 w_{k-1}, 2^{s^*} R_{k-1}^{\varepsilon}] = w_k$ дает

$$\underset{S_k}{ess\ osc}\ u(z,t) \le \underset{S_{k-1}}{ess\ osc}\ u(z,t) \le w_{k-1} \le w_k.$$

В противном случае, для $S_{R_{k-1}/8}^{\sigma_0} = B_{R_{k-1}} \times (t_0 - (2^{\sigma_0}/w_{k-1})^{\lambda-1} (R_{k-1}/8)^{\lambda+1}, t_0)$ верна оценка

$$\underset{S_{R_{k-1}/8}^{\sigma_0}}{ess\ osc}\ u(z,t) \le \eta_0 w_{k-1} \le max[\eta_0 w_{k-1}, 2^{s^*} R_{k-1}^{\varepsilon}] = w_k.$$

В силу выбора $C_{5.2}$ верно вложение $S_k \subset S^{\sigma_0}_{R_{k-1}/8}$. Имеем

$$\underset{S_k}{ess\ osc}\ u(z,t) \le \underset{S^{\sigma_0}_{R_{k-1}/8}}{ess\ osc}\ u(z,t) \le w_k.$$

Утверждение (5.2) полностью доказано.□

Теорема 5.3. *Пусть* $u \in \mathfrak{V}_{\lambda+1,loc}(S_T) \cap L_{\infty,loc}(S_T)$ *– слабое решение уравнения (1.1). Тогда* $u(z,t)$ *– локально гёльдерово на* S_T *и для любого компакта* $K \in S_T$ *существует постоянные* $\bar\alpha \in (0,1)$ *и* $C(\bar\alpha)$, *зависящие только от параметров задачи и* $diamK$, *такие что*

$$|u(z_1,t_1) - u(z_2,t_2)| \le C(\bar\alpha)(d^{\bar\alpha}(z_1,z_2) + |t_1-t_2|^{\frac{\bar\alpha}{\lambda+1}}).$$

Доказательство теоремы 5.3. Положим

$$\bar\alpha = min\{(\varepsilon, -\log_{C^{\varepsilon}_{5.2}} \eta_0\}, C(\bar\alpha) = max\{2^{s^*}R_0^{\varepsilon}, w_0\}C^{\bar\alpha}_{5.2}.$$

Полагаем R_0 и ε такие, что $K \subset S_0^{\varepsilon}$. Из утверждения 1.1 следует, что условия утверждения 5.1 выполняются, тогда справедливо утверждение 5.2. Пускай $r: 0 < r \le R_0$ – произвольное. Найдется такое $h_0 \in \mathbb{N}$, что $R_{h_0+1} \le r < R_{h_0} \le C_{5.2}r < R_{h_0+1}$. Тогда легко заметить, что $S_r^{\varepsilon} \subset S_{h_0+1}$ и

$$\underset{S_{h_0+1}}{ess\ osc}\ u(z,t) \le w_{h_0+1},$$

тогда

$$\underset{S_r^{\varepsilon}}{ess\ osc}\ u(z,t) \le \underset{S^{\varepsilon}_{h_0+1}}{ess\ osc}\ u(z,t) \le w_{h_0+1} = max\{2^{s^*}R^{\varepsilon}_{h_0}, \eta_0 w_{h_0}\} \le$$
$$\le max\{2^{s^*}R_0^{\varepsilon}, w_{h_0}\}max\{C_{5.2}^{-\varepsilon h_0}, \eta_0^{h_0}\}.$$

Отметим, что в силу выбора $\bar\alpha$ имеем $\eta_0 \le C_{5.2}^{-\bar\alpha}$. Поскольку $R_{h_0} \le C_{5.2}r$, то $C_{5.2}^{-h_0} \le (C_{5.2}r)/R_0$. Откуда имеем

$$max\{C_{5.2}^{-\varepsilon h_0}, \eta_0^{h_0}\} \le \left(\frac{C_{5.2}r}{R_0}\right)^{\bar\alpha}.$$

Следовательно, для любого $r:\ 0 < r < R_0$

$$\underset{S_r^{\varepsilon}}{ess\ osc}\ u(z,t) \le max\{2^{s^*}R_0^{\varepsilon}, w_{h_0}\}\left(\frac{C_{5.2}r}{R_0}\right)^{\bar\alpha} = C(\bar\alpha)R_0^{-\bar\alpha}r^{\bar\alpha}.$$

Откуда следует справедливость теоремы 5.3.□

Автор выражает благодарность А.Ф.Тедееву за руководство над работой и А.В.Мартыненко за полезные обсуждения результатов работы.

1. *Baouendi M.S.* Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés // Bull. Soc. Math. France. – 1967. – Vol.95. – P.45-87.

2. *Di Benedetto E.* On the Local Behaviour of Solutions of Degenerate Parabolic Equations with Measurable Coefficients // Ann. Sc. Norm. Pisa Cl.Sci. – 1986. – Vol.13 (3). – P.487-535.
3. *Franchi B., Lanconelli E.* Une metrique associee a une classe d'operateurs elliptiques degeneres // Toronto: Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. – 1984.
4. *Franchi B., Lanconelli E.* Holder regularity theorem for a class of linear nonuniformly elliptic operators with measurable coefficients // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. – 1983. – Vol.10 (4). – P.523-541.
5. *Garofalo N., Nhieu D.-M.* Isoperimetric and Sobolev Inequalities for Carnot-Caratheodory Spaces and the Existence of Minimal Surfaces // Comm. Pure Appl. Math. – 1996. – Vol.49. – P.1081-1144.
6. *Grushin V.V.* On a class of hypoelliptic operators // Math USSR Sbornik. – 1970. – Vol.12 (3). – P.458-476.
7. *Kalashnikov A.S.* Some properties of the qualitative theory of nonlinear degenerate second-order parabolic equations // Russian Math. Surveys. – 1987. – Vol.42. – P.169-222.
8. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квази линейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736с.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
w9071981@yandex.ru

Получено 26.03.08