

УДК 51-74:536.2

©2008. О.В. Литовченко

ИДЕНТИФИКАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ ВНЕШНЕГО ТЕПЛООБМЕНА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Исследуется возможность идентификации распределенных параметров модели теплофизического процесса с помощью метода наименьших квадратов. Рассмотрены случаи идентификации функции параметра лучистого теплообмена и функции параметра конвективного теплообмена, имеющей два локальных максимума. Представлен алгоритм идентификации, приведены и проанализированы данные численных расчётов по нахождению распределенных по времени параметров.

1. Введение. Задача идентификации распределенного параметра относится к обратным задачам и является некорректно поставленной в классическом смысле. К настоящему времени наиболее популярным методом решения такого класса задач является метод регуляризации Тихонова. Недостатком метода регуляризации является большой объем вычислений, связанный с процедурой поиска нужного значения параметра регуляризации, а также с овражностью регуляризирующего функционала [4]. Другой существенный недостаток метода связан с самой идеей регуляризации: сглаживания решения в пределах погрешности измерений. Чем больше погрешность, тем можно получить более гладкую кривую, но при этом возрастает опасность получения хотя и более плавной кривой, но все в большей степени отклоняющейся от истинной [1, 3]. В этом смысле метод регуляризации принципиально отличается от ряда методов, которые обеспечивают получение достаточно точного решения при росте погрешности в исходных данных. К таким методам относится, например, метод наименьших квадратов.

В представленной работе для идентификации распределенных параметров модели теплофизического процесса предлагается применить метод наименьших квадратов.

2. Идентификация параметра лучистого теплообмена. Сформулируем обратную задачу нахождения коэффициента лучистого теплообмена для одномерного уравнения теплопроводности с нелинейными граничными условиями 3-го рода. Ставится задача нахождения $\sigma = \sigma(\tau)$ как функции, зависящей от времени в виде аппроксимирующего полинома.

Математическая модель.

Математическая модель процесса выглядит следующим образом

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(\tau, x)}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq \ell \quad (1)$$

с нелинейными граничными условиями третьего рода

$$-\lambda \frac{\partial T(\tau, x)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \sigma_1 [T_{gr}^4(\tau) - T^4(\tau, 0)], \quad (2)$$

$$\lambda \left. \frac{\partial T(\tau, x)}{\partial x} \right|_{x=l} = \sigma_2 [T_{gr.}^4(\tau) - T^4(\tau, l)], \quad (3)$$

и начальным условием

$$T(0, x) = t_0(x), \quad (4)$$

где $T(\tau, x)$ – температура тела, $T_{gr.}(\tau)$ – температура греющей среды, λ – коэффициент теплопроводности среды, σ_1, σ_2 – коэффициенты лучистой теплоотдачи сверху и снизу.

Для решения обратных задач обычно требуются знания о температуре нагреваемого тела [5].

Для простоты изложения метода предполагаем нагрев симметричным, поэтому $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. В этом случае минимальный объем необходимой для решения задачи информации соответствует измерению температуры тела в какой-либо одной точке одномерной области $0 \leq x \leq l$. Предположим, известна температура тела на границе с внешней средой:

$$T(\tau, 0) = f(\tau). \quad (5)$$

Задача состоит в нахождении $\sigma = \sigma(\tau)$ как функции, зависящей от времени. Предполагая функцию $\sigma(\tau)$ непрерывной, с целью аппроксимации искомой функции воспользуемся полиномом n -ой степени

$$\sigma(\tau) = a_0 + a_1 \cdot \tau + \dots + a_n \cdot \tau^n, \quad (6)$$

степень полинома будет определяться по принципу невязки.

Решение обратной задачи.

Решив задачу Дирихле, получим температуры $T(\tau_i, x_j)$, которые будут необходимы для вычисления производной в граничном условии. Для решения задачи Дирихле используем метод конечных разностей и метод прямой итерации.

В области $0 \leq x \leq l, 0 \leq \tau \leq \tilde{\tau}$ введем равномерную сетку $\omega_{i,j}$, т.е. будем рассматривать не $T(\tau, x)$, а $T(i\Delta\tau, j\Delta x)$, где $\Delta x = \frac{l}{n}$, i и j шаги по времени и по координате. Условие сходимости метода $0 \leq a \frac{\Delta\tau}{\Delta x} \leq \frac{1}{2}$.

Применив явную конечно-разностную схему, получим представление уравнения теплопроводности в виде:

$$T_{i+1,j} = c_1 T_{i,j-1} + (1 - 2 \cdot c_1) T_{i,j} + c_1 T_{i,j+1},$$

где $c_1 = \frac{\Delta\tau a}{\Delta x^2}$.

Теперь в граничном условии $\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = \sigma(\tau) [T_{gr.}^4(\tau) - T^4(\tau, 0)]$ неизвестным является только величина лучистого теплообмена $\sigma(\tau)$.

Имеем систему уравнений граничных условий в r моментах времени:

$$\frac{\lambda}{\Delta x} (T(\tau_i, x_1) - T(\tau_i, x_0)) = \sigma_i [T_{gr.}^4 - T^4(\tau_i, x_0)], \quad i = \overline{1, r}, \quad (7)$$

где σ_k – это значение полинома в момент времени k и $\sigma_k = a_0 + a_1 \cdot k \cdot \Delta\tau + \dots + a_n k^n \Delta\tau^n$, $k = \overline{1, r}, r \gg n$;

или в матричной форме

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\Delta x} \begin{pmatrix} T(\tau_1, x_1) - T(\tau_1, x_0) \\ T(\tau_2, x_1) - T(\tau_2, x_0) \\ \dots \\ \dots \\ T(\tau_r, x_1) - T(\tau_r, x_0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sigma_1 \cdot (T_{gr.}^4 - T^4(\tau_1, x_0)) \\ \sigma_2 \cdot (T_{gr.}^4 - T^4(\tau_2, x_0)) \\ \dots \\ \dots \\ \sigma_r \cdot (T_{gr.}^4 - T^4(\tau_r, x_0)) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_{gr.}^4 - T^4(\tau_1, x_0) \\ T_{gr.}^4 - T^4(\tau_2, x_0) \\ \dots \\ \dots \\ T_{gr.}^4 - T^4(\tau_r, x_0) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

Выделим компоненты неизвестных параметров полинома, представленного в матричной форме

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_0 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1\Delta\tau & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\Delta\tau & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r\Delta\tau \end{pmatrix} + \dots + \\ &+ \begin{pmatrix} a_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1\Delta\tau^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2^n\Delta\tau^n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r^n\Delta\tau^n \end{pmatrix} = \\ &= a_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} + a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1\Delta\tau & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\Delta\tau & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r\Delta\tau \end{pmatrix} + \dots + \\ &+ a_n \cdot \begin{pmatrix} 1\Delta\tau^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2^n\Delta\tau^n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r^n\Delta\tau^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для удобства записи преобразований введем такие обозначения

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad A^1 = \begin{pmatrix} 1\Delta\tau & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\Delta\tau & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r\Delta\tau \end{pmatrix},$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1\Delta\tau^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2^n\Delta\tau^n & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & r^n\Delta\tau^n \end{pmatrix}, \quad P = \frac{\lambda}{\Delta x} \begin{pmatrix} T(\tau_1, x_1) - T(\tau_1, x_0) \\ T(\tau_2, x_1) - T(\tau_2, x_0) \\ \dots \\ \dots \\ T(\tau_r, x_1) - T(\tau_r, x_0) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} T_{gr}^4 - T^4(\tau_1, x_0) \\ T_{gr}^4 - T^4(\tau_2, x_0) \\ \dots \\ \dots \\ T_{gr}^4 - T^4(\tau_r, x_0) \end{pmatrix}.$$

P_k и H_k — k -тые элементы столбцов, A_{kk}^i — k -й элемент главной диагонали матрицы A^i .

Тогда уравнение (8) в матричной форме будет иметь вид

$$P = \tilde{\sigma}H. \quad (9)$$

Метод наименьших квадратов.

Для нахождения функции методом МНК введем меру отклонения в виде суммы квадратов разности измеренных температур от расчетных по модели (1)–(6).

$$S(\sigma) = \sum_{k=1}^r (P_k - \sigma_k H_k)^2. \quad (10)$$

Используя введенные обозначения параметр σ можно записать как

$$\sigma(\tau) = a_0 \cdot A^0 + a_1 \cdot A^1 + \dots + a_n \cdot A^n,$$

тогда квадратичный функционал будет иметь вид

$$S(\sigma) = \sum_{k=1}^r (P_k - \sigma_k H_k)^2 = (P - (a_0 \cdot A^0 + a_1 \cdot A^1 + \dots + a_n \cdot A^n) \cdot H)^T \cdot (P - (a_0 \cdot A^0 + a_1 \cdot A^1 + \dots + a_n \cdot A^n) \cdot H) = P^T P - 2 \sum_{k=0}^n a_k H^T A^k P + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i a_j H^T A^{i+j} H.$$

Задача сводится к нахождению параметров полинома, которые бы минимизировали функционал $S(\sigma)$. Пусть, например, минимум достигается при $\sigma' = \sigma(\tau')$. Тогда в этой точке должно быть выполнено необходимое условие минимума функционала S

$$\frac{dS(\sigma')}{da_m} = 0, \quad m = \overline{0, n}; \quad (11)$$

Вычислим векторы первых производных суммы квадратов отклонений по компонентам a_0, a_1, \dots, a_n :

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = \frac{\partial[(P-\tilde{\sigma}H)^T(P-\tilde{\sigma}H)]}{\partial a_j} = 2a_0 H^T A^j H + 2a_1 H^T A^{j+1} H + \dots +$$

$$+ 2a_n H^T A^{j+n} H - 2H^T A^j P = 0, \text{ где } j = \overline{0, n}.$$

Получили систему из $n+1$ линейных алгебраических уравнений с $n+1$ неизвестными

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^n a_m H^T A^m H = H^T A^0 P, \\ \sum_{m=0}^n a_m H^T A^{m+1} H = H^T A^1 P, \\ \dots \\ \sum_{m=0}^n a_m H^T A^{m+n} H = H^T A^n P. \end{cases} \quad (12)$$

Из структуры строк матрицы этой системы видна их линейная независимость, следовательно, детерминант не обращается в ноль и решение системы единственное.

Из системы (12) получаем вектор неизвестных компонент параметра $\sigma(\tau)$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^T A^0 H & H^T A^1 H & \dots & H^T A^n H \\ H^T A^1 H & H^T A^2 H & \dots & H^T A^{n+1} H \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H^T A^n H & H^T A^{n+1} H & \dots & H^T A^{2n} H \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} H^T A^0 P \\ H^T A^1 P \\ \dots \\ H^T A^n P \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Вычислительный эксперимент.

Для проверки работоспособности полученных соотношений была выполнена программная реализация алгоритма на языке С и проведен численный расчет по нахождению функции $\sigma(\tau)$. В качестве тестовой функции, т.е. истинного распределения значений параметра, взята функция

$$\sigma_t(\tau) \cdot 10^8 = 0.6 \cdot x^4 - 3.02 \cdot x^3 + 3.65 \cdot x^2 + 0.57 \cdot x + 2.$$

На известные значения температуры поверхности тела был нанесен шум ξ , имитирующий погрешность измерений [6], распределенный по нормальному закону с математическим ожиданием равным нулю.

Тогда из соотношений (13) и (6) получили аппроксимирующие полиномы с первой по четвертую степень ($\sigma_i, i = \overline{0, 4}$) (см. рис.1)

Чтобы убедиться в качестве полученных оценок, найдем среднеквадратическое отклонение (СКО), характеризующее погрешность для накладываемого шума ξ , отклонения аппроксимирующего полинома $\sigma(\tau)$ от тестовой функции и для отклонения расчетной температуры на границе тела от исходных данных.

Расчеты погрешностей СКО найденных решений и отклонения измеренных температур от расчетных при погрешности измерения $\text{СКО}_\xi = 5.96^0\text{C}$ приведены в таблице 1.

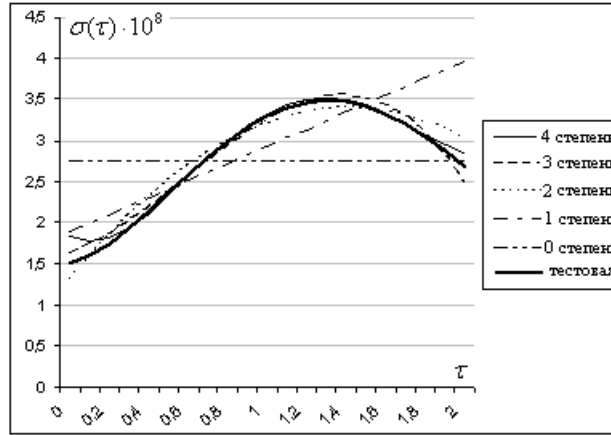


Рис. 1. Графики полученных аппроксимирующих полиномов для тестовой функции $\sigma_t(\tau)$

Таблица 1. Погрешности найденных решений.

Степень аппроксимирующего полинома $\sigma(\tau)$	0	1	2	3	4
СКО $_{\sigma}$, Вт/м ² ·К ⁴	0.63	0.43	0.14	0.08	0.07
СКО $_T$, °С	46.40	23.71	21.42	21.01	21.01

Результаты вычислений показывают, что приемлемая точность полученного решения достигается начиная с полинома 3-ей степени.

3. Идентификация параметра конвективного теплообмена. Рассмотрим задачу нахождения распределенного во времени параметра конвективного теплообмена $\alpha(\tau)$ в граничном условии третьего рода

$$-\lambda \frac{\partial T(\tau, x)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha_1 [T_{gr.}(\tau) - T(\tau, 0)], \quad (14)$$

$$\lambda \frac{\partial T(\tau, x)}{\partial x} \Big|_{x=l} = \alpha_2 [T_{gr.}(\tau) - T(\tau, l)], \quad (15)$$

модели теплового процесса (1), (4), (5), (14), (15). Для простоты предположим $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Для аппроксимации искомой функции воспользуемся полиномом n-ой степени

$$\alpha(\tau) = a_0 + a_1 \cdot \tau + \dots + a_n \cdot \tau^n, \quad (16)$$

степень полинома будет определяться по принципу невязки.

Система (7) для случая аппроксимации параметра конвективного теплообмена принимает следующий вид

$$\frac{\lambda}{\Delta x} (T(\tau_i, x_1) - T(\tau_i, x_0)) = \alpha_i [T_{gr.} - T(\tau_i, x_0)], \quad i = \overline{1, r}, \quad (17)$$

где α_k – это значение полинома в момент времени k и $\alpha_k = a_0 + a_1 \cdot k \cdot \Delta\tau + \dots + a_n k^n \Delta\tau^n$, $k = \overline{1, r}$, $r \gg n$.

Уравнение (9) записывается следующим образом

$$P = \tilde{\alpha}H, \tag{18}$$

где $\tilde{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_r \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} T_{gr} - T(\tau_1, x_0) \\ T_{gr} - T(\tau_2, x_0) \\ \dots \\ \dots \\ T_{gr} - T(\tau_r, x_0) \end{pmatrix}$.

Разрешив систему (13), можем найти неизвестные коэффициенты аппроксимирующего полинома (16).

Рассмотрим случай идентификации функции $\alpha(\tau)$, которая имеет 2 точки локального максимума на рассматриваемом промежутке времени. Такой вид параметр конвективного теплообмена может принимать, когда процесс нагрева проводится в двух рабочих зонах. В качестве тестовой функции была взята

$$\alpha_t(\tau) = -224.94 \cdot x^4 + 914.52 \cdot x^3 - 1165.2 \cdot x^2 + 501.81 \cdot x + 30.$$

После зашумления тестовых значений температуры на границе тела и использования предложенного метода идентификации из соотношений (13) и (6) для случая аппроксимации константой, функциями первой-четвертой степеней были получены следующие результаты (см. Рис.2).

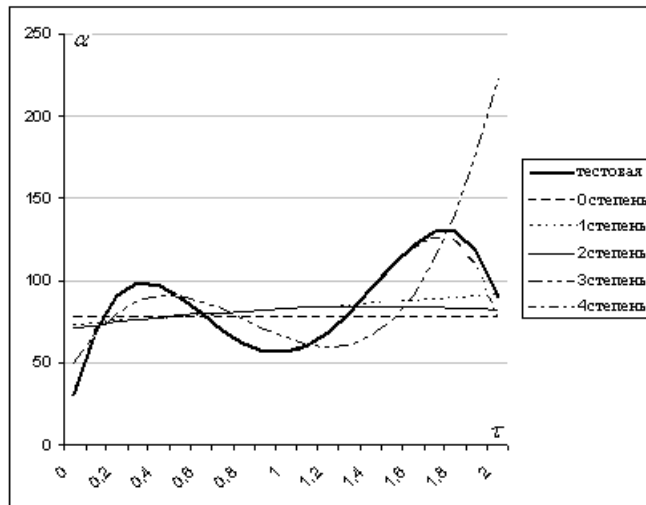


Рис. 2. Графики полученных аппроксимирующих полиномов для тестовой функции $\alpha_t(\tau)$

Численные оценки погрешностей найденных решений и отклонения измеренных температур от расчетных представлены в таблице 2.

Таблица 2. Погрешности найденных решений

Степень аппроксимирующего полинома $\alpha(\tau)$		0	1	2	3	4
СКО $_{\alpha}$, Вт/м ² ·°C		26.37	22.52	24.54	27.64	2.46
СКО $_T$, °C		29.31	29.04	29.43	24.74	20.55

Полиномы нулевой, первой и второй степеней фактически сгладили экстремумы тестовой зависимости. Полином 3-ей степени не может в полной мере воспроизвести искомую функцию. А в случае, когда полином на качественном уровне совпадает с тестовой функцией, то МНК дает достаточно высокую точность решения задачи.

4. Достаточное условие минимума. Для того чтобы убедиться, что уравнение (13) определяет минимум, достаточно убедиться, что матрица вторых производных (матрица Гессе) полуположительно определена [2].

$$G = \begin{pmatrix} H^T A^0 H & H^T A^1 H & \dots & H^T A^n H \\ H^T A^1 H & H^T A^2 H & \dots & H^T A^{n+1} H \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H^T A^n H & H^T A^{n+1} H & \dots & H^T A^{2n} H \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Для главных миноров этой матрицы введем такие обозначения: G_1 – минор размерностью 1×1 , G_2 – минор размерностью 2×2 , G_i – минор размерностью $i \times i$.

Рассмотрим матрицу G : эта матрица не зависит от a_0, a_1, \dots, a_n , симметрична и все ее элементы положительны, каждый из них является суммой r слагаемых. Например,

$$H^T A^0 H = \sum_{k=1}^r H_k^2 A_{kk}^0, \quad H^T A^1 H = \sum_{k=1}^r H_k^2 A_{kk}^1, \quad H^T A^i H = \sum_{k=1}^r H_k^2 A_{kk}^i.$$

Заметим, что матрица представима в виде произведения двух матриц, размерностями $n + 1 \times r$ и $r \times n + 1$. Причем эти матрицы будут транспонированными по отношению друг к другу.

Т.е. матрицу (19) можно записать в таком виде

$$G = \begin{pmatrix} H_1 A_{11}^0 & H_2 A_{22}^0 & \dots & H_r A_{rr}^0 \\ H_1 A_{11}^1 & H_2 A_{22}^1 & \dots & H_r A_{rr}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_1 A_{11}^n & H_2 A_{22}^n & \dots & H_r A_{rr}^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H_1 A_{11}^0 & H_1 A_{11}^1 & \dots & H_1 A_{11}^n \\ H_2 A_{22}^0 & H_2 A_{22}^1 & \dots & H_2 A_{22}^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_r A_{rr}^0 & H_r A_{rr}^1 & \dots & H_r A_{rr}^n \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Обозначим матрицы-множители как $Q(n + 1 \times r)$ и соответственно $Q^T(r \times n + 1)$.

Заметим, что любой из главных миноров G_i ($i = \overline{1, n + 1}$) является произведением первых i строк матрицы Q и первых i столбцов матрицы Q^T $G_i = Q_i \cdot Q_i^T$. А детерминант G_i равен сумме квадратов детерминантов всех $i \times i$ матриц, которые можно составить из столбцов Q_i . Т.е. $\det G_i = \sum_{k=1}^{c_r^i} (\det D_k)^2$, где D_k ($k = \overline{1, c_r^i}$) – описанные $i \times i$ матрицы $i = \overline{1, n + 1}$.

Из сказанного выше следует, что $\det G_i > 0 \quad \forall i = \overline{1, n+1}$.

По критерию Сильвестра для положительно определенных матриц, из того, что все главные миноры матрицы Гессе положительны, получаем положительную определенность матрицы G .

Т.о. мы показали, что условия (11) определяют глобальный минимум функционала S . И из полученного соотношения (13) можем найти вектор параметра аппроксимирующего полинома (6).

5. Свойства оценки параметра. В обратной задаче теплопроводности наряду с температурой поверхности тела используется еще ряд измеряемых величин. Это такие величины, как: время, координата датчика, толщина образца. Предполагается, что все они, за исключением температуры, известны точно. А измерения температуры являются основным источником погрешностей и неопределенностей, и ее погрешность предполагается белым шумом.

Оценки параметров, получаемые по методу МНК, при условии выполнения предпосылок относительно случайных погрешностей наблюдений, будут обладать следующими свойствами:

1. оценки параметров являются несмещенными, т.е. математическое ожидание оценок параметров равно истинному значению параметров. Данное свойство является логическим следствием второго предположения о характере погрешности. Несмещенность означает, что выборочные оценки параметров концентрируются вокруг неизвестных истинных параметров;

2. оценки состоятельны, иначе говоря, дисперсия оценки параметра стремится к нулю с возрастанием числа наблюдений r ;

3. оценки являются эффективными в том смысле, что они имеют минимальную дисперсию по сравнению с любыми другими оценками этого параметра.

Если предположение 3 или 4 нарушено, то свойство несмещенности и состоятельности оценок сохраняется, однако оценки оказываются менее эффективными, чем в случае, когда эти допущения соблюдаются.

Совершенно очевидно, что не безразлично, какими свойствами обладает оценка. Что касается свойства несмещенности, то оно является необходимым. В самом деле, смещенные оценки априори дают неверное положение кривой в пространстве независимых переменных. Свойство состоятельности означает, что при увеличении объема наблюдения оценки параметров становятся более надежными в вероятностном смысле, т.е. с ростом r оценки все плотнее концентрируются вокруг истинных неизвестных значений параметров. Свойство эффективности, в общем, является наиболее важным, поскольку оно определяет степень возможной ошибки прогноза.

Основные результаты и выводы. В статье предложен эффективный метод идентификации распределенных параметров внешнего теплообмена в линейных и нелинейных граничных условиях задачи теплопроводности. Искомое решение аппроксимируется полиномом n -ой степени, коэффициенты которого отыскиваются методом наименьших квадратов. Разработан алгоритм идентификации, который программно реализован на языке С. Численные исследования наглядно показали, что предложенный метод успешно решает поставленную задачу и обладает рядом

преимуществ по сравнению с известными методами решения обратных задач на основе идеи регуляризации.

1. *Алифанов О.М.* О методах решения некорректных обратных задач // Инженерно-физический журнал. – 1983, т.45. – С.742-752.
2. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966, 576с.
3. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974, С.224
4. *Ткаченко В.Н.* Моделирование тепловых процессов в автоматизированных системах обработки информации // Вісник Донецького національного університету, Серія А. Природничі науки. – 2002, №2, С.379-383.
5. *Мацевитый Ю.М.* Обратные задачи теплопроводности. В 2-х т. : Т.2. Приложения. – НАН Украины, Институт проблем машиностроения. – Киев: Наукова думка, 2003.
6. *Коздоба Л.А., Кружковский П.Г.* Методы решения обратных задач теплопереноса. – Киев: Наукова думка. – 1982. – 385с.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
lit.ov@i.ua

Получено 04.12.08