

УДК 531.38, 531.36

©2008. Б.И. Коносеви́ч, Ю.Б. Коносеви́ч

## МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯ В ТЕОРИИ ГИРОСКОПОВ

Для поддержания вращения ротора в гироскопах используются электродвигатели переменного тока асинхронного или синхронного типа. В работе дано описание механизма формирования суммарного момента относительно оси ротора для обоих типов двигателей, и в нелинейном случае указаны свойства этого момента, используемые при исследовании динамики прибора.

**Введение.** Основным элементом механических гироскопов является гироскоп, представляющий собой кожух, в котором на подшипниках установлен вал с закрепленным на нем осесимметричным ротором. Ось симметрии ротора совпадает с осью вала. Первоначально в теории гироскопов принималось допущение, что ротор вращается по инерции без трения [1–3]. На практике быстровращающийся ротор испытывает значительное тормозящее воздействие диссипативных сил. Поэтому для поддержания вращения ротора используют электродвигатель, так что кожух представляет собой статор, а ротор гироскопа – ротор электродвигателя.

При исследовании динамики гироскопа с электроприводом ротора иногда принимается допущение, что угловая скорость вращения ротора относительно кожуха постоянна [4]. Реальным приборам в большей степени соответствует модель, основанная на учете характера взаимодействия магнитного поля статора и ротора электродвигателя [5]. Силы, действующие на ротор со стороны статора, создают относительно оси ротора момент  $L$ , равный алгебраической сумме вращающего момента электродвигателя  $L_1$  и момента сил диссипации  $L_2$ . В случае *синхронного* двигателя суммарный момент  $L$  зависит от угла  $\varphi$  поворота ротора относительно статора и от угловой скорости  $\dot{\varphi}$  вращения ротора относительно статора, в случае *асинхронного* двигателя момент  $L$  зависит только от  $\dot{\varphi}$ .

Обычно в теории гироскопов пользуются линейными приближениями суммарного момента  $L$ . В настоящей работе рассмотрен механизм формирования этого момента для асинхронного и синхронного электродвигателей, проанализирована структура нелинейных формул для  $L$ , выделены устойчивые режимы работы электродвигателя, для синхронного двигателя получено разложение момента  $L$  на потенциальную и диссипативную составляющие. Представленные результаты полезны при исследовании динамики гироскопических систем.

### 1. Момент асинхронного электродвигателя относительно оси ротора.

В случае *асинхронного* двигателя ротор представляет собой стальной цилиндр и не имеет собственного магнитного поля. В статоре создается магнитное поле, результирующий вектор напряженности которого  $\mathbf{H}$  постоянен по модулю, ортогонален оси ротора и вращается вокруг нее с постоянной угловой скоростью  $\omega > 0$ . При несовпадении угловой скорости ротора  $\dot{\varphi}$  с  $\omega$  в нем индуцируются электрические токи, и в результате взаимодействия этих токов с вращающимся магнитным полем статора

возникает вращающий момент двигателя – ротор вовлекается во вращение. Следовательно, вращающий момент асинхронного двигателя является функцией  $L_1 = L_1(\dot{\varphi})$  угловой скорости ротора  $\dot{\varphi}$ , обращающейся в ноль при  $\dot{\varphi} = \omega$ ; знак этого момента противоположен знаку разности  $\dot{\varphi} - \omega$  [6]. Модуль момента  $L_1$  тем больше, чем больше модуль разности  $\dot{\varphi} - \omega$ .

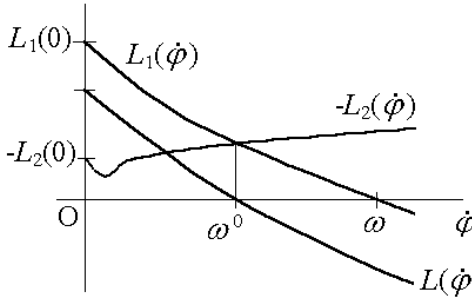


Рис. 1. Вращающий, диссипативный и суммарный моменты для асинхронного двигателя

При возрастании угловой скорости ротора от 0 до  $\omega$  угловая скорость вращения магнитного поля статора относительно ротора  $\omega - \dot{\varphi}$  монотонно убывает от  $\omega$  до 0, и поэтому момент  $L_1(\dot{\varphi})$  монотонно убывает на отрезке  $[0, \omega]$  от положительного значения  $L_1(0)$  до нуля. При  $\dot{\varphi} > \omega$  момент  $L_1(\dot{\varphi})$  продолжает убывать, становясь отрицательным. Момент сил сопротивления  $L_2$  является отрицательной функцией  $L_2 = L_2(\dot{\varphi})$  угловой скорости  $\dot{\varphi}$ , монотонно убывающей вне малой окрестности нуля. Графики функций  $L_1(\dot{\varphi})$ ,  $-L_2(\dot{\varphi})$  схематически изображены на рис.1.

Если при запуске двигателя вращающий момент  $L_1(0)$  по модулю больше диссипативного момента  $L_2(0)$ , то есть  $L_1(0) > -L_2(0)$ , то ротор приходит во вращение. В этом случае существует единственное значение  $\omega^0$  ( $\omega^0 < \omega$ ) угловой скорости ротора  $\dot{\varphi}$ , при котором моменты  $L_1$  и  $L_2$  уравниваются друг друга, то есть  $L(\omega^0) = L_1(\omega^0) + L_2(\omega^0) = 0$ . Поэтому асинхронный электродвигатель может обеспечить режим равномерного вращения ротора  $\varphi = \omega^0 t + \varphi_0$ , где  $\omega^0 \in (0, \omega)$ , а  $\varphi_0$  – постоянная, определяемая начальными условиями запуска.

Итак, для асинхронного двигателя суммарный момент  $L = L_1 + L_2$  сил, действующих относительно оси ротора, является функцией угловой скорости ротора  $\dot{\varphi}$ . Момент  $L(\dot{\varphi})$  обращается в ноль при  $\dot{\varphi} = \omega^0$  ( $\omega^0 < \omega$ ), а при  $\dot{\varphi} \neq \omega^0$  знак  $L(\dot{\varphi})$  противоположен знаку разности  $\dot{\varphi} - \omega^0$  (рис.1). При значениях  $\dot{\varphi}$ , близких к  $\omega^0$ , момент  $L(\dot{\varphi})$  является монотонно убывающей функцией.

Предполагая эту функцию непрерывно дифференцируемой и выделяя ее линейную часть в окрестности стационарного вращения, получаем известную приближенную формулу [5]:  $L = -\lambda(\dot{\varphi} - \omega^0)$ . Здесь  $\lambda = -dL(\omega^0)/d\dot{\varphi} > 0$ . Постоянные  $\lambda, \omega^0$  характеризуют асинхронный двигатель и силы диссипации.

Легко видеть, что режим равномерного вращения асинхронного двигателя асимптотически устойчив по  $\dot{\varphi}$

## 2. Момент синхронного электродвигателя относительно оси ротора.

Вращающий момент  $L_1$  синхронного двигателя формируется следующим образом. В статоре электродвигателя создается магнитное поле, результирующий вектор напряженности которого  $\mathbf{H}$  постоянен по модулю, ортогонален оси ротора и вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью  $\omega > 0$ , составляя угол  $\varphi_H = \omega t + \varphi_{H0}$  с направлением отсчета угла  $\varphi$ . Ротор синхронного двигателя имеет собственное постоянное магнитное поле, результирующий вектор напряженности которого  $\mathbf{H}^0$  ор-

тогонален оси ротора. Так как противоположные магнитные полюса притягиваются, то в результате взаимодействия этих двух полей возникает вращающий момент  $L_1$ , который стремится совместить направление  $-\mathbf{H}^0$  с  $\mathbf{H}$ . Следовательно, если обозначить через  $\tilde{\gamma}$  угол между векторами  $\mathbf{H}$  и  $-\mathbf{H}^0$  (рис.2), то  $L_1 = L_1(\tilde{\gamma})$ , причем при  $0 < |\tilde{\gamma}| < \pi$  знак  $L_1(\tilde{\gamma})$  противоположен знаку  $\tilde{\gamma}$ . При  $\tilde{\gamma} = 0$  будет  $L_1(0) = 0$ . Угол  $\tilde{\gamma}$  называется углом мощности [7].

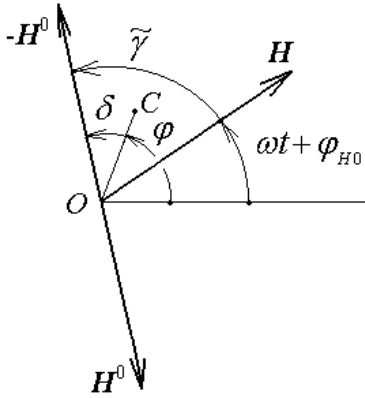


Рис. 2. Угол мощности  $\tilde{\gamma}$  для синхронного электродвигателя

Равенство  $L_1(\tilde{\gamma}) = 0$ , очевидно, имеет место и при  $\tilde{\gamma} = \pm\pi$ . Но в этом случае знак  $L_1(\tilde{\gamma})$  совпадает со знаком приращения угла  $\tilde{\gamma}$ .

Если угол  $\tilde{\gamma}$  получает приращение, кратное  $2\pi$ , то взаимное положение векторов  $\mathbf{H}$  и  $-\mathbf{H}^0$  не изменяется. Поэтому не изменяется и вращающий момент  $L_1(\tilde{\gamma})$ . Следовательно, момент  $L_1(\tilde{\gamma})$  является  $2\pi$ -периодической функцией угла  $\tilde{\gamma}$ . В дальнейшем эта функция предполагается непрерывно дифференцируемой. Ее максимальное значение  $L_{1\max}$  положительно, а минимальное – отрицательно, так как при некоторых значениях угла  $\tilde{\gamma}$  момент  $L_1(\tilde{\gamma})$  является вращающим, а при некоторых – тормозящим. Таким образом, в рамках рассматриваемой модели гра-

фик зависимости  $L_1 = L_1(\tilde{\gamma})$  изображается в виде синусоидальной кривой, показанной на рис.3.

В общем случае, когда центр масс ротора C не лежит на оси его вращения, обозначим через OC перпендикуляр к оси вращения ротора, опущенный из точки C. Угол  $\varphi$  поворота ротора отсчитывается в плоскости, ортогональной оси ротора, от некоторого фиксированного в статоре направления до направления оси OC. Направление вектора  $-\mathbf{H}^0$  в роторе определяет угол  $\delta$  между лучом OC и вектором  $-\mathbf{H}^0$ . Поэтому угол мощности равен (рис.2)

$$\tilde{\gamma} = \varphi + \delta - \omega t - \varphi_{H0}. \quad (1)$$

Момент  $L_2(\dot{\varphi})$  сил сопротивления при  $\dot{\varphi} \geq 0$  является отрицательной функцией  $\dot{\varphi}$ , монотонно убывающей на всей полуоси  $\dot{\varphi} \geq 0$  (исключая, быть может, некоторую окрестность нуля). Поэтому график зависимости  $L_2$  от  $\dot{\varphi}$  имеет вид, схематически изображенный на рис.4.

Суммарный момент сил, действующих на ротор со стороны статора, равен алгебраической сумме моментов  $L_1$  и  $L_2$ :  $L = L_1(\tilde{\gamma}) + L_2(\dot{\varphi})$ .

Режим равномерного вращения  $\varphi = \omega^0 t + \varphi^0$  ротора синхронного двигателя существует только при угловой скорости ротора  $\omega^0$ , равной угловой скорости  $\omega$  вращения поля статора. Действительно, вращение ротора описывается дифференциальным уравнением  $I\ddot{\varphi} = L_1 + L_2$ , где  $I$  – осевой момент инерции ротора. Если предположить, что режим равномерного вращения существует при  $\omega^0 \neq \omega$ , то в этом режиме угол мощности (1) является величиной переменной. Тогда момент  $L_1$

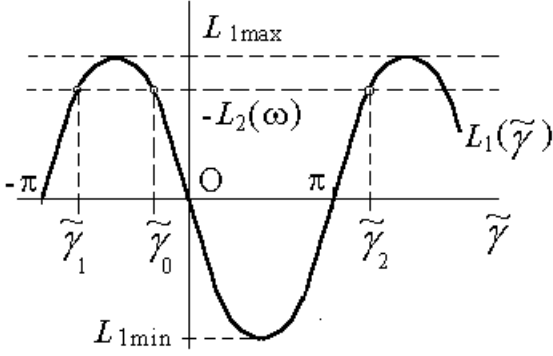


Рис. 3. График зависимости  $L_1(\tilde{\gamma})$  и равновесные значения угла  $\tilde{\gamma}$

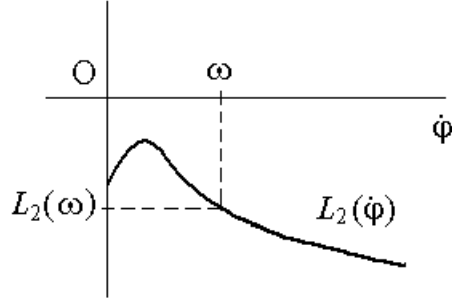


Рис. 4. График зависимости  $L_2(\phi)$

будет переменным, а момент  $L_2$  – постоянным. Поэтому  $\ddot{\phi} \neq 0$ , что невозможно при равномерном вращении.

Существование режима равномерного вращения  $\varphi = \omega t + \varphi^0$  означает существование такого значения  $\tilde{\gamma}$ , при котором вращающий момент двигателя уравновешивает момент сил сопротивления при  $\dot{\varphi} = \omega$ , то есть

$$L_1(\tilde{\gamma}) + L_2(\omega) = 0. \quad (2)$$

Очевидно, что уравнение (2) разрешимо относительно  $\tilde{\gamma}$  только в случае, когда значение  $-L_2(\omega)$  лежит в области значений функции  $L_1(\tilde{\gamma})$ , то есть выполнено двойное неравенство  $L_{1\min} \leq -L_2(\omega) \leq L_{1\max}$ . Так как  $L_{1\min} < 0$ ,  $-L_2(\omega) > 0$ , то левое неравенство всегда выполнено. Следовательно, режим равномерного вращения синхронного двигателя существует при одном условии:  $L_{1\max} + L_2(\omega) \geq 0$ . Оно означает, что момент сопротивления по модулю не должен превосходить максимального вращающего момента двигателя.

Как показано ниже (п.4), в случае  $L_{1\max} + L_2(\omega) = 0$  режим равномерного вращения ротора синхронного электродвигателя неустойчив и поэтому нереализуем. Отбрасывая этот случай, будем предполагать, что

$$L_{1\max} + L_2(\omega) > 0. \quad (3)$$

Тогда на периоде функции  $L_1(\tilde{\gamma})$  уравнение (2) имеет решение  $\tilde{\gamma}_0$ , принадлежащее участку убывания этой функции, а также решение, принадлежащее участку возрастания (рис.3).

Из (1) следует, что для режима равномерного вращения  $\varphi = \omega t + \varphi^0$  при  $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_0$  угол  $\varphi^0$  равен

$$\varphi^0 = \tilde{\gamma}_0 - \delta + \varphi_{H0}. \quad (4)$$

Пусть  $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$  – ближайšie к  $\tilde{\gamma}_0$  решения уравнения (2), лежащие, соответственно, слева и справа от точки  $\tilde{\gamma}_0$  (рис.3). Так как функция  $L_1(\tilde{\gamma})$  убывает в окрестности

точки  $\tilde{\gamma}_0$ , то в левой полуокрестности этой точки  $L_1(\tilde{\gamma}) > L_1(\tilde{\gamma}_0) = -L_2(\omega)$ , а в правой полуокрестности  $L_1(\tilde{\gamma}) < L_1(\tilde{\gamma}_0) = -L_2(\omega)$ . Первое из этих неравенств обращается в равенство при  $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_1$ , а второе – при  $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_2$ . Таким образом, имеем

$$L_1(\tilde{\gamma}) + L_2(\omega) \begin{cases} > 0, & \tilde{\gamma} \in (\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_0); \\ = 0, & \tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_2; \\ < 0, & \tilde{\gamma} \in (\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_2). \end{cases} \quad (5)$$

Для дальнейшего удобно вместо угла  $\tilde{\gamma}$  ввести угол

$$\gamma = \tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}_0. \quad (6)$$

Из (1), (6) получаем для угла  $\gamma$  выражение

$$\gamma = \varphi - \omega t - \varphi^0, \quad (7)$$

где угол  $\varphi^0$  определен формулой (4). Если центр масс ротора  $C$  лежит на оси его вращения, то возникает произвол в выборе направления связанной с ротором оси, до которой отсчитывается угол  $\varphi$ . Этот произвол можно устранить, проведя данную ось в направлении вектора  $-\mathbf{H}^0$ . Тогда  $\delta = 0$  в (1), (4).

Будем рассматривать вращающий момент двигателя  $L_1$  как функцию  $L_1(\gamma)$  угла  $\gamma$ . Тогда суммарный момент относительно оси ротора равен

$$L = L_1(\gamma) + L_2(\dot{\varphi}). \quad (8)$$

Представим момент (8) в виде суммы

$$L = L_p(\gamma) + L_d(\dot{\gamma}) \quad (9)$$

потенциального и диссипативного моментов

$$L_p(\gamma) = L_1(\gamma) + L_2(\omega), \quad L_d(\dot{\gamma}) = L_2(\dot{\varphi}) - L_2(\omega). \quad (10)$$

Поскольку функция  $L_2(\dot{\varphi})$  – монотонно убывающая по  $\dot{\varphi}$ , то диссипативный момент  $L_d(\dot{\gamma})$  – монотонно убывающая функция  $\dot{\gamma}$ , обращающаяся в ноль при  $\dot{\gamma} = \dot{\varphi} - \omega = 0$ . Поэтому знак  $L_d(\dot{\gamma})$  противоположен знаку  $\dot{\gamma}$ :

$$\dot{\gamma} L_d(\dot{\gamma}) < 0 \quad (\dot{\gamma} \neq 0), \quad L_d(0) = 0. \quad (11)$$

Так как  $dL_d(\dot{\gamma})/d\dot{\gamma} < 0$  в рабочем диапазоне значений  $\dot{\gamma}$ , то в линейном приближении по  $\dot{\gamma}$  имеем формулу

$$L_d(\dot{\gamma}) = -\lambda_2 \dot{\gamma}, \quad (12)$$

где

$$\lambda_2 = -dL_d(0)/d\dot{\gamma} > 0. \quad (13)$$

Из определения (10) момента  $L_p(\gamma)$  с учетом равенства  $L_1(0) + L_2(\omega) = 0$  следует, что в линейном приближении по  $\gamma$  этот момент равен

$$L_p(\gamma) = -\lambda_1 \gamma. \quad (14)$$

Здесь

$$\lambda_1 = -dL_1(0)/d\gamma > 0, \quad (15)$$

так как точка  $\gamma = 0$  лежит на участке убывания функции  $L_1(\gamma)$ .

Подставив выражения (14), (12) в (9), получаем для момента  $L$  приближенную формулу

$$L = L(\gamma, \dot{\gamma}) = -\lambda_1\gamma - \lambda_2\dot{\gamma}, \quad (16)$$

справедливую при малых значениях  $\gamma, \dot{\gamma}$ . Положительные параметры  $\lambda_1, \lambda_2$ , определенные формулами (13), (15), характеризуют синхронный электродвигатель и силы диссипации. Формула (16) точно до обозначений совпадает с формулой  $L = -K_c z - N_\gamma \dot{z}$ , принятой в [5, с.132].

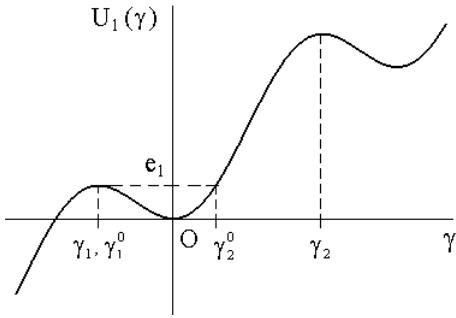


Рис. 5. График зависимости  $U_1(\gamma)$

**3. Потенциальная энергия взаимодействия магнитных полей.** Момент  $L_p(\gamma)$  выше назван потенциальным, так как его можно представить по формуле

$$L_p(\gamma) = -dU_1(\gamma)/d\gamma, \quad (17)$$

где

$$U_1(\gamma) = - \int_0^\gamma L_p(\sigma) d\sigma \quad (18)$$

– это потенциальная энергия взаимодействия магнитных полей ротора и статора синхронного двигателя. Поскольку  $L_p(\gamma)$  – периодическая функция  $\gamma$ , то ее можно записать в виде  $L_p(\gamma) = \bar{L}_p + \tilde{L}_p(\gamma)$ , где число  $\bar{L}_p$  – это среднее значение функции  $L_p(\gamma)$  за период, а  $\tilde{L}_p(\gamma) = L_p(\gamma) - \bar{L}_p$  – периодическая функция с нулевым средним значением. Тогда из (18) следует, что потенциальная энергия  $U_1(\gamma)$  равна сумме

$$U_1(\gamma) = -\gamma\bar{L}_p + \tilde{U}_1(\gamma)$$

линейной функции  $-\gamma\bar{L}_p$  и периодической функции

$$\tilde{U}_1(\gamma) = - \int_0^\gamma \tilde{L}_p(\sigma) d\sigma.$$

В простейшем случае, когда разложение  $L_1(\gamma)$  в ряд Фурье содержит только одну гармонику (как на рис.3), график зависимости  $U_1(\gamma)$  имеет вид, изображенный на рис.5. В общем случае на низшую гармонику налагаются более высокие и график  $U_1(\gamma)$  имеет более сложный вид. Но и в этом случае поведение кривой  $U_1(\gamma)$  на отрезке  $[\gamma_1, \gamma_2]$  остается таким же, как на рис.5, а именно, функция  $U_1(\gamma)$  имеет в точке  $\gamma_0 = 0$  изолированный минимум, равный нулю, монотонно убывает на  $[\gamma_1, 0]$ , монотонно возрастает на  $[0, \gamma_2]$ , и  $dU_1(\gamma_k)/d\gamma = 0, k = 0, 1, 2$ .

Действительно, в соответствии с определениями (6), (10), (18) угла  $\gamma$  и функций  $L_p(\gamma)$ ,  $U_1(\gamma)$  из (5) получаем

$$L_p(\gamma) = -\frac{dU_1(\gamma)}{d\gamma} \begin{cases} > 0, & \gamma \in (\gamma_1, 0); \\ = 0, & \gamma = \gamma_1, 0, \gamma_2; \\ < 0, & \gamma \in (0, \gamma_2). \end{cases} \quad (19)$$

Следовательно, подинтегральный дифференциал в (18) на интервалах  $(\gamma_1, 0)$ ,  $(0, \gamma_2)$  отрицателен, и поэтому

$$U_1(\gamma) > 0 \quad (\gamma \in (\gamma_1, \gamma_2), \gamma \neq 0), \quad U_1(0) = 0. \quad (20)$$

**4. Устойчивость равномерного вращения ротора синхронного электродвигателя.** Логически возможны четыре типа равномерных вращений синхронного электродвигателя, которые соответствуют решениям уравнения (2) относительно угла  $\tilde{\gamma}$ , лежащим:

- а) на участке убывания вращающего момента  $L_1(\tilde{\gamma})$ ,
- б) на участке его возрастания,
- в) в точке его локального максимума,
- г) в точке его локального минимума.

Решения типов а), б) уравнение (2) имеет лишь при условии (3).

Рассмотрим вопрос об устойчивости режимов равномерного вращения ротора неподвижного синхронного двигателя в случаях а)-г). В каждом из этих случаев выбираем соответствующее решение уравнения (2) за начало отсчета угла  $\gamma$  и представляем суммарный момент  $L$  по формулам (9), (10). Тогда динамика ротора описывается дифференциальным уравнением

$$I\ddot{\gamma} = L_p(\gamma) + L_d(\dot{\gamma}), \quad (21)$$

а режим равномерного вращения соответствует решению  $\gamma = 0$  этого уравнения.

В соответствии с (18), потенциальная энергия  $U_1(\gamma)$  имеет в точке  $\gamma = 0$  изолированный минимум в случае а) и изолированный максимум в случае б). В случаях в), г) функция  $U_1(\gamma)$  имеет перегиб при  $\gamma = 0$ . Следовательно, во всех случаях, кроме случая а), функция  $U_1(\gamma)$  принимает отрицательные значения при сколь угодно малых значениях  $\gamma$ .

Рассмотрим функцию

$$W(\gamma, \dot{\gamma}) = \frac{1}{2}I\dot{\gamma}^2 + U_1(\gamma). \quad (22)$$

Имеем  $W(0, 0) = 0$ , а производная этой функции по времени в силу уравнения (21) с учетом (17) равна

$$\dot{W}(\gamma, \dot{\gamma}) = \dot{\gamma}L_d(\dot{\gamma}). \quad (23)$$

Согласно (11),  $\dot{W} \leq 0$ , причем  $\dot{W} = 0$  только при  $\dot{\gamma} = 0$ . Но при  $\dot{\gamma} \equiv 0$  дифференциальное уравнение (21) сводится к конечному уравнению  $L_p(\gamma) = 0$ , которое не имеет в окрестности точки  $\gamma = 0$  других решений, кроме самой этой точки (см. рис.3).

Поэтому в фазовом пространстве  $(\gamma, \dot{\gamma})$  уравнения (21), кроме стационарной точки  $(\gamma, \dot{\gamma}) = (0, 0)$  в некоторой ее окрестности, не существует других целых полутраекторий, где  $\dot{W} \equiv 0$ .

Так как в случае *a*) функция  $U_1(\gamma)$  имеет нулевой минимум при  $\gamma = 0$ , то функция  $W(\gamma, \dot{\gamma})$  – определено положительная. Следовательно, по теореме Барбашина-Красовского [8], стационарное решение  $(\gamma, \dot{\gamma}) = (0, 0)$  уравнения (21), соответствующее равномерному вращению ротора, асимптотически устойчиво в случае *a*).

В каждом из случаев *б)-г)* функция  $U_1(\gamma)$  принимает отрицательные значения в сколь угодно малой окрестности точки  $\gamma = 0$ . Поэтому функция (22) принимает отрицательные значения в сколь угодно малой окрестности стационарной точки  $(\gamma, \dot{\gamma}) = (0, 0)$ . Производная  $\dot{W}(\gamma, \dot{\gamma})$  по-прежнему выражается формулой (23) и является знакопостоянной отрицательной. Множество точек фазового пространства  $(\gamma, \dot{\gamma})$  уравнения (21), в которых  $\dot{W}(\gamma, \dot{\gamma}) = 0$ , определено соотношением  $\dot{\gamma} = 0$ . Оно содержит решение уравнения (21), если выполнено условие  $L_p(\gamma) = 0$ . Но ни в одном из случаев *б)-г)* в окрестности стационарной точки  $(\gamma, \dot{\gamma}) = (0, 0)$  не существует других целых полутраекторий, удовлетворяющих условиям  $\dot{\gamma} = 0, L_p(\gamma) = 0$ . Поэтому данная стационарная точка неустойчива на основании теоремы Барбашина-Красовского [8].

Итак, режимы равномерного вращения ротора неподвижного синхронного электродвигателя неустойчивы в случаях *б)-г)*. Асимптотически устойчивым и поэтому практически реализуемым является только режим равномерного вращения в случае *a*), когда равновесное значение угла мощности лежит на участке убывания вращающего момента  $L_1$ .

1. Николаи Е.Л. О движении уравновешенного гироскопа в кардановом подвесе // Прикл. математика и механика. – 1939. – **3**, вып.4. – С.237-244.
2. Magnus K. Beiträge zur Dynamik des kraftefreien kardanisch gelagerten Kreisels // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. – 1955. – **35**, No. 1/2. – P.83-91.
3. Plymale B.T., Goodstein R. Nutation of a free gyro subjected to an impulse // Transactions of ASME. Journal of Applied Mechanics. – 1955. – **22**, No. 3. – P.365-376.
4. Климов Д.М. О движении астатического гироскопа в кардановом подвесе с неаксиально насаженным ротором // Доклады АН СССР. – 1959. – **124**, №3. – С.29-32.
5. Климов Д.М., Харламов С.А. Динамика гироскопа в кардановом подвесе. – М.: Наука, 1978. – 208с.
6. Сыромятников И.А. Режимы работы асинхронных и синхронных двигателей. 4-е изд. – М.: Энергоатом, 1984. – 240с.
7. Лищенко А.И. Синхронные двигатели с автоматическим регулированием возбуждения. – К.: Техника, 1969. – 192с.
8. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 224с.